

LISTA 10 DE MAT 0121

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

- (1) Determinar a diferencial, na forma de funcional linear expresso em termos dos elementos da base $\{dx, dy\}$ de $(\mathbb{R}^2)^*$, das seguintes funções nos seguintes pontos:
 - (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $(1, 1)$;
 - (b) $g(x, y) = x \cdot \cos(y)$ em $(0, 0)$;
 - (c) $h(x, y) = x^2 + y^3$ em $(2, 5)$
- (2) O raio e a altura de uma caixa cilíndrica são medidos como tendo 3m e 8m, respectivamente, com erro de ± 0.05 m. Usar a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume.
- (3) Justificar as seguintes afirmações:
 - (a) A função $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , para qualquer que seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
 - (b) A função $f(x, y) = e^{x \cdot y}$ é diferenciável em $(5, 2)$;
 - (c) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$, então f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \text{int.}(U)$.

A precisão obtida na aproximação de $f = f(x, y)$ por sua (pseudo)-linearização¹, $L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, em um ponto (x_0, y_0) em que f é diferenciável depende:

1. da proximidade entre x e x_0 ;
2. da proximidade entre y e y_0 ;
3. da curvatura do gráfico de f no ponto (x_0, y_0) (que, por sua vez, depende das derivadas parciais de ordem dois de f)

*jeancb@ime.usp.br

¹usamos o prefixo “pseudo” porque, a rigor, a menos que tenhamos $f(x_0, y_0) = 0$, a função L será afim, e não linear.

Na verdade, se pudermos encontrar um majorante simultâneo, $M > 0$ para $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \right|$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right|$ e $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right|$ em um retângulo centrado em (x_0, y_0) , somos capazes de limitar o erro máximo cometido ao tomar $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ por meio da desigualdade:

$$\text{erro} \leq \frac{M}{2} \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \quad (1)$$

- (4) Obter uma (pseudo-)linearização da função $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - 3$ no entorno do ponto $(3, 2)$. O que garante que tal linearização existe? Estimar, usando a desigualdade (1), o erro máximo cometido ao calcular $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x \leq 4) \& (1 \leq y \leq 3)\}$
- (5) Obter uma (pseudo-)linearização da função $f(x, y) = e^x \cdot \cos(y)$ em $(0, \pi/2)$, e estimar o erro máximo cometido ao calcular $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \& (0 \leq y \leq \pi)\}$
- (6) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $|a|$ for muito maior que $|b|, |c|, |d|$, para quais valores de a, b, c e d o valor do determinante:

$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

é mais sensível? Justifique sua resposta.

- (7) Este exercício fornece um exemplo de que a **Regra da Cadeia** não se aplica quando a função $f = f(x, y)$ não é diferenciável. Considere a função:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostrar que:

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$;
- (b) Se $g(t) = (a \cdot t, b \cdot t)$, $a \neq 0 \neq b$, então $f \circ g$ é diferenciável em $t_0 = 0$ e $(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \neq 0$;
- (c) Verificar que $\nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = 0$.
- (8) Sejam $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(0, 0, 0)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$. Se $F(u, v) = f(u - v, u^2 - 1, 3v - 3)$, determinar $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 1)$.

- (9) Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em U . Calcular $z'(1)$ nos seguintes casos:
- (a) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(3, -1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3, -1) = 4$ e $z(t) = f(3t^2, t - 2t^2)$;
 - (b) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) = 3$ e $z(t) = f(t - 1, t + 1)$;
 - (c) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = -3$ e $z(t) = f(t^2, 4t - 1)$.
- (10) Dada $F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $x(u, v, w) = u^2v$, $y(u, v, w) = v^2$ e $z(u, v, w) = e^{-uw}$, calcular $\frac{\partial F}{\partial v}$.
- (11) Sejam g e σ diferenciáveis tais que $g(x, y) = e^{x+y}$, $\sigma'(0) = (1, 2)$ e $\sigma(0) = (1, -1)$. Se $F(t) = g(\sigma(t))$, calcular $F'(0)$.