Lista 08 de MAT 0121

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Adaptar a **Definição 11** da Agenda 6 para o caso de funções de três variáveis reais a valores reais, ou seja, enunciar o que devemos entender por uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ser contínua em $(x_0, y_0, z_0) \in R$ nos termos daquela definição. Expressar a continuidade de uma função de três variáveis reais a valores reais em um ponto em termos de limites.

(2) Utilizando o **Teorema 7** da Agenda 6, demonstrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

(3) Nos itens seguintes, justificar a continuidade das funções com fulcro nos conhecimentos que você adquiriu sobre funções contínuas em Cálculo I, nos **Exemplos 13, 14, 15, 18** e **18** e nos **Teoremas 16** e **21** da Agenda 6:

(a) $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$ em $(x_0, y_0) = (2, 1)$;

(b) $g(x, y, z) = \sin(3x + 2y - z)$ em $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$;

(c) $h(x, y) = \tan(x) - \cos(y)$ em $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$;

(d) $\ell(x, y) = \sin(x \cdot y^2) - e^{\tan(x^2)}$ em $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

(4) Seja:

$$f(x, y) = \frac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$$

(a) Calcular o limite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de cada reta que passa pela origem (isto é, ao longo de conjuntos da forma $S_m = \{(x, m \cdot x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ e o eixo Oy).

(b) Calcular o limite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo da parábola $\mathscr{P} = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

*jeancb@ime.usp.br

(c) Determinar se existe ou não $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(5) Utilizando as propriedades operatórias e demais propriedades de limites, calcular:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x + e^y}{\cos(x)+\sin(y)}$

(b) $\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,0)} \dfrac{y^3 + xz^2}{x^2+y^2+z^2}$

(6) Seja f a função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Verificar que:

(a) f é contínua nos pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$;

(b) f é descontínua nos pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 = 1$

(7) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, é necessário que f esteja definida em (x_0, y_0)? Por quê?

(8) Se $f(x_0, y_0) = 3$, o que podemos dizer sobre:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

nos seguintes casos?

(a) Em que f é contínua em (x_0, y_0);

(b) Em que f é descontínua em (x_0, y_0).

(9) Considere o seguinte resultado:

Teorema 1 (Teorema do Confronto para Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais). *Sejam $f, g, h : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções, $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$ e $\eta > 0$ tais que:*

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta))(g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y))$$

Se:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$$

então:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Demonstração. De fato,

1. Uma vez que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |g(x,y) - L| < \varepsilon$$

2. Uma vez que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |h(x,y) - L| < \varepsilon$$

3. Dado $\varepsilon > 0$, considerando $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$, onde δ_1 e δ_2 são dados nos passos **1.** e **2.**, temos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L - \varepsilon \overset{①}{<} g(x,y) \overset{②}{<} f(x,y) \overset{③}{<} h(x,y) \overset{④}{<} L + \varepsilon$$

4. Como para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |h(x,y) - L| < \varepsilon,$$

segue que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

$\square$

Justificar as desigualdades ①, ②, ③ e ④.

(10) Sabe-se que para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale a desigualdade:

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan(x \cdot y)}{x \cdot y} < 1$$

Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x \cdot y)}{x \cdot y}$$

(11) Calcular, caso exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$