Lista 01 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

Observação: Nesta lista assume-se, além dos conhecimentos obtidos nas aulas da semana 01, apenas o conhecimento obtido no ensino básico das funções seno, cosseno, logatitmo, polinomial e exponencial. Assume-se, também, que o aluno saiba resolver inequações.

(1) Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 5, 7, 41\}$. Construa:

   (a) Uma relação $\mathcal{R}_1$ de A em B que seja total mas não seja unívoca;
   (b) Uma relação $\mathcal{R}_2$ de B em A que seja total mas não seja unívoca;
   (c) Uma relação $\mathcal{R}_3$ de A em B que seja unívoca mas não seja total;
   (d) Uma relação $\mathcal{R}_4$ de A em A que seja unívoca e total.

(2) Considere os conjuntos:

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}.$$

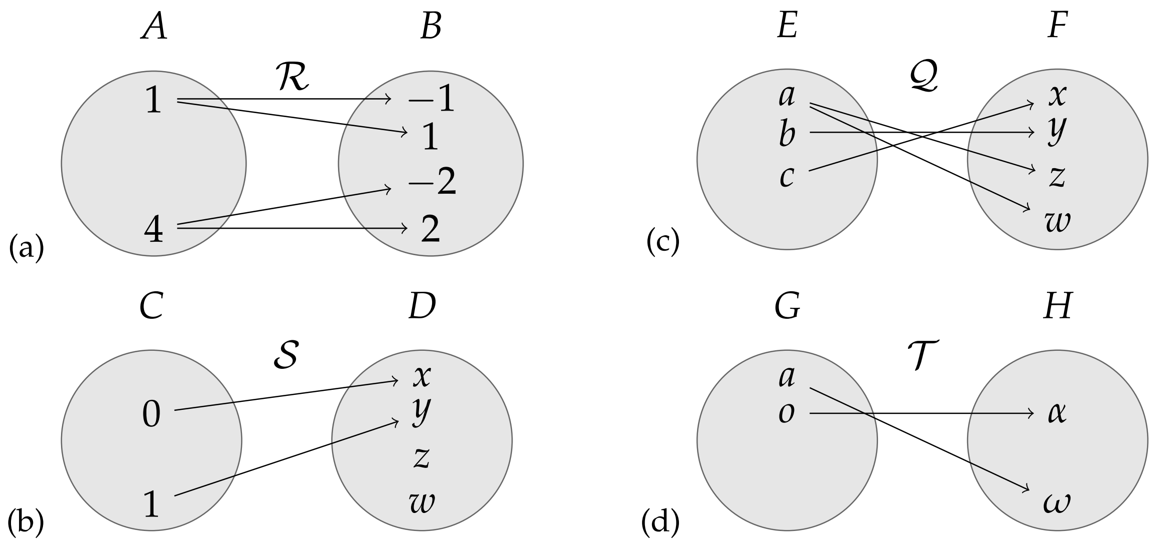
Descreva explicitamente as relações:

   (i) $\mathcal{R}$ de A em B dada por:$\{(a, b) | b = a^2\}$
   (ii) $\mathcal{S}$ de B em A dada por $\{(b, a) | b = a^2\}$

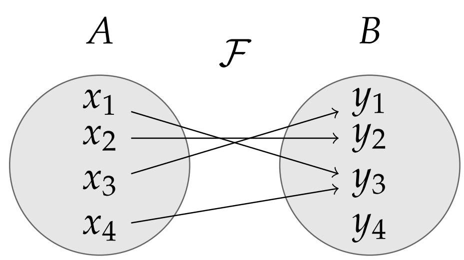
Decida se $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$ é função e justifique sua resposta.

(3) Escreva o conjunto de pares ordenados que cada diagrama representa, explicite o domínio, o contradomínio e conjunto imagem de cada relação e, em seguida, classifique as relações quanto a cada um dos seguintes atributos: univocidade, totalidade, injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

*jeancb@ime.usp.br



(4) Considere o diagrama a seguir:



(a) Escreva o conjunto de pares ordenados que o diagrama representa;

(b) Determine se o diagrama representa uma função. Em caso positivo, responda se é injetora e/ou sobrejetora, e em caso negativo, justifique;

(c) Determinar a pré-imagem, pela relação $\mathcal{F}$, dos seguintes conjuntos:

(c_1) $\{y_1, y_3\}$ (c_2) $\{y_4\}$ (c_3) $\{y_2, y_3, y_4\}$
(c_4) $\{y_2\}$ (c_5) $\{y_1, y_2\}$ (c_6) B

(5) Determinar o domínio e o contradomínio de cada uma das funções a seguir:

(a) $q(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$;

(b) $r(x) = \sqrt{x^2-4} + \dfrac{1}{x}$

(c) $\ell(x) = \log(x+1)$

(d) $m(x) = \log(\sin(x))$

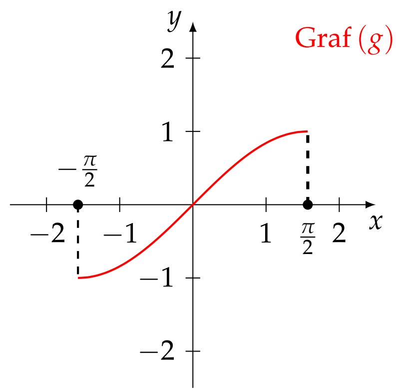
(e) $n(x) = \dfrac{1}{e^x}$

(f) $p(x) = \dfrac{\sin(x)}{\log(x)}$

(6) Em cada caso abaixo, explicitar domínio, contradomínio, conjunto-imagem e classificar, usando os critérios gráficos, as seguintes funções quanto à sua injetividade, sobrejetividade e/ou bijetividade:

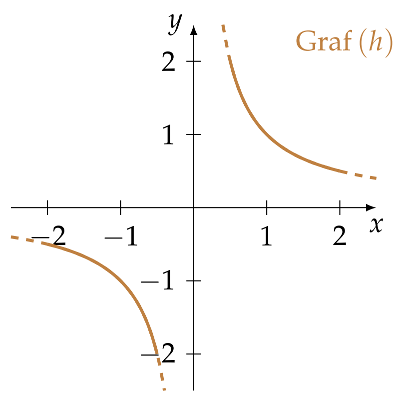
(i)

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ & \theta & \mapsto & \sin(\theta) \end{array}$$



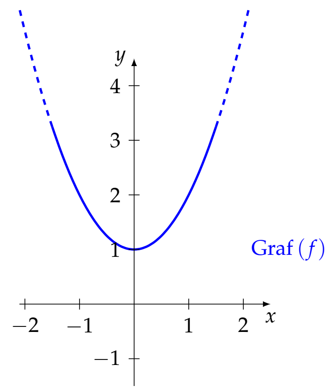
(ii)

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$



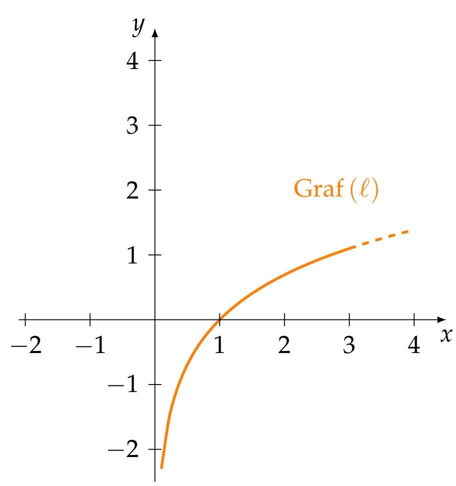
(iii)

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$



(iv)

$$\begin{array}{rccc} \ell: &]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log(x) \end{array}$$



(7) Determinar, quando possível, as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ nos seguintes casos:

(a)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x+3, & \text{se } x \leq 3 \\ x-4, & \text{se } x > 3 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x-7 \end{array}$$

(8) Considere a função:

$$F(x) = e^{\sin(\log(x^2-1))}$$

O domínio de F deve ser o maior subconjunto $\operatorname{dom}(F)$ de R tal que, dado $x \in (F)$ seja possível calcularmos $e^{\sin(\log(x^2-1))}$. Sabe-se que o domínio da função logarítmica é o conjunto de todos os números reais positivos, de modo que para calcularmos $\log(x^2-1)$ devemos garantir que $x^2-1>0$, ou seja, que $x<-1$ ou que $x>1$. Não há restrições para o cálculo do seno e da função exponencial, de modo que:

$$\operatorname{dom}(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -1) \vee (1 < x)\} =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$$

Podemos "decompor" F como a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccccccc}]-\infty,-1[\cup]1,\infty[& \xrightarrow{m} & [2,\infty[& \xrightarrow{h} & [\log(2),\infty[& \xrightarrow{g} & [-1,1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 & \mapsto & \log(x^2+1) & \mapsto & \sin(\log(x^2+1)) & \mapsto & e^{\sin(\log(x^2+1))} \end{array}$$

ou seja,

$$F = f \circ g \circ h \circ m,$$

onde $f(w) = e^w, g(z) = \sin(z), h(y) = \log(y)$ e $m(x) = x^2+1$. Nos itens a seguir, encontre o domínio de F e "decomponha" de modo análogo ao efetuado acima:

(a) $F(x) = \sin\left(\dfrac{2}{x-3}\right)$

(b) $F(x) = \sin(2 \cdot \log(x-1))$

(c) $F(x) = \dfrac{1}{\log(x^3-2)}$

(d) $F(x) = \dfrac{3}{2\sin(4x)\cos(4x)}$

(e) $F(x) = e^{\sin(\log(2x))}$

(f) $F(x) = \log\left(\dfrac{1}{x^2-2}\right)$