LISTA 03 DE MAT 0111

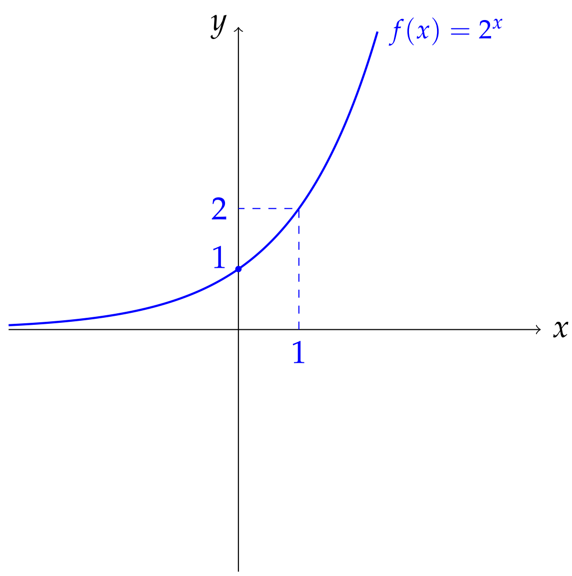
Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Esboçar os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2^x$

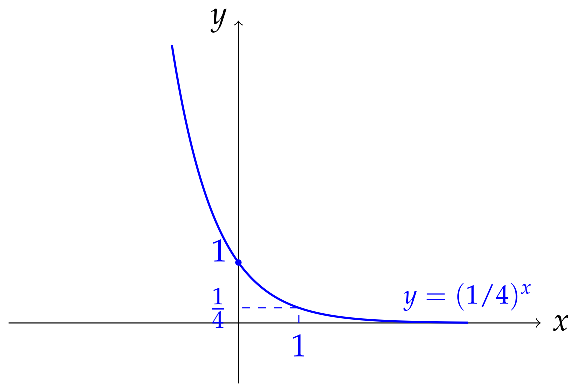
Solução:



(b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

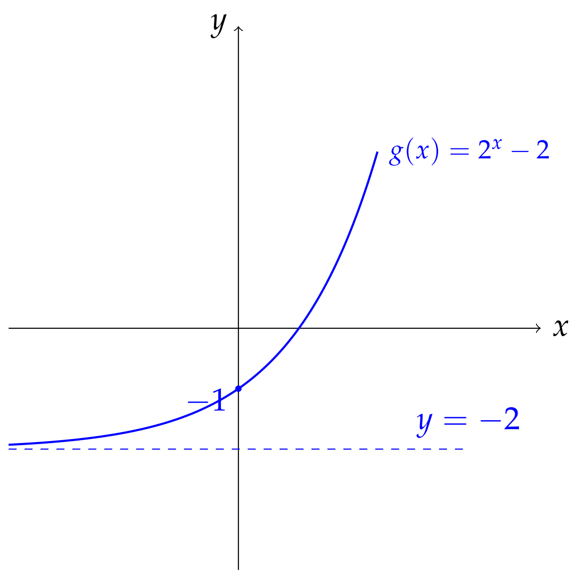
Solução:

*jeancb@ime.usp.br



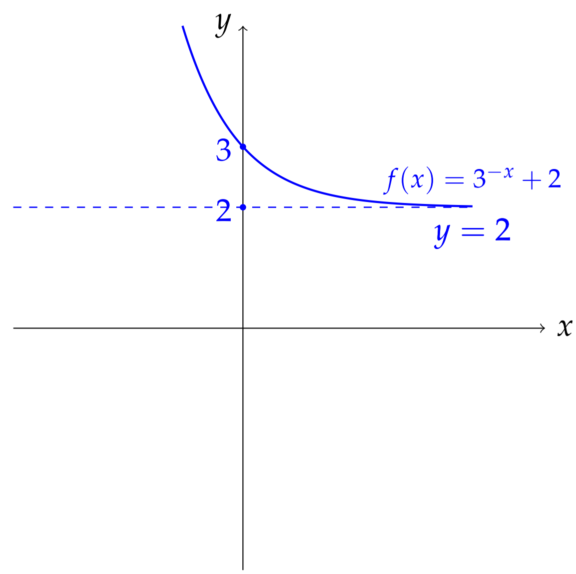
(c) $g(x) = 2^x - 2$

Solução:

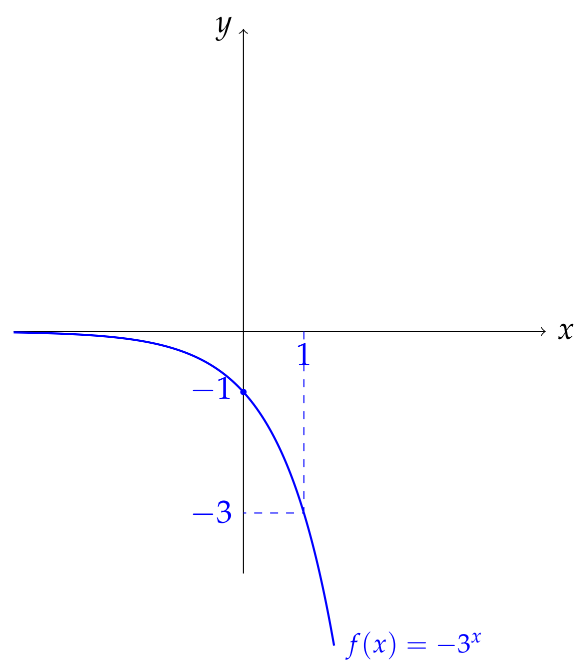


(d) $f(x) = 3^{-x} + 2$

Solução:



(e) $h(x) = -3^x$



(2) Argumente a validade das afirmações dos itens (b),(c) e (d) seguindo o modelo dado no item (a):

(a) Se $a > 0$ e $b > 1$, então a função $f(x) = a \cdot b^x$ é estritamente crescente;

Solução: Para $b > 1$, sabe-se que a função $g(x) = b^x$ é estritamente crescente, de modo que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_1} = g(x_1) < g(x_2) = b^{x_2}$$

Como $a > 0$, multiplicando os dois membros da desigualdade:

$$b^{x_1} < b^{x_2}$$

por a, obtemos a desigualdade:

$$a \cdot b^{x_1} < a \cdot b^{x_2}$$

Assim,

$$f(x_1) = a \cdot b^{x_1} < a \cdot b^{x_2} = f(x_2).$$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, segue que f é estritamente crescente.

(b) Se $a > 0$ e $0 < b < 1$, então a função $f(x) = a \cdot b^x$ é estritamente decrescente;

Solução: Para $0 < b < 1$, sabe-se que a função $g(x) = b^x$ é estritamente decrescente, de modo que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_2} = g(x_2) < g(x_1) = b^{x_1}$$

Como $a > 0$, multiplicando os dois membros da desigualdade:

$$b^{x_2} < b^{x_1}$$

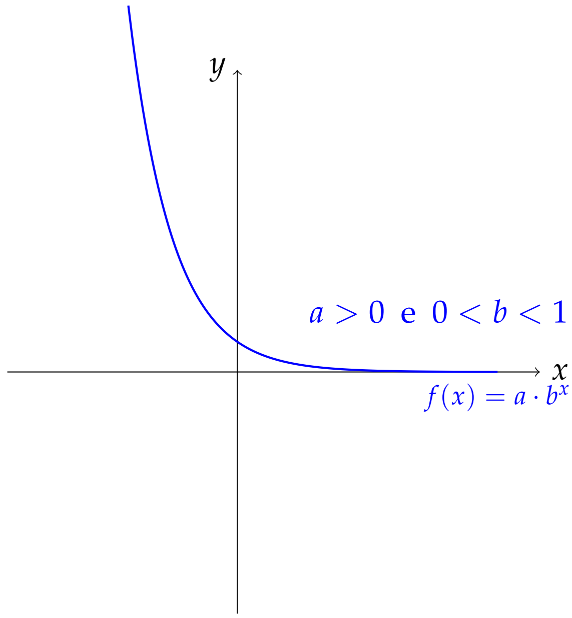
por a, obtemos a desigualdade:

$$a \cdot b^{x_2} < a \cdot b^{x_1}$$

Assim,

$$f(x_2) = a \cdot b^{x_2} < a \cdot b^{x_1} = f(x_1).$$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, segue que f é estritamente decrescente.



(c) Se $a < 0$ e $b > 1$, então a função $f(x) = a \cdot b^x$ é estritamente decrescente;

Solução: Para $b > 1$, sabe-se que a função $g(x) = b^x$ é estritamente crescente, de modo que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_1} = g(x_1) < g(x_2) = b^{x_2}$$

Como $a < 0$, multiplicando os dois membros da desigualdade:

$$b^{x_1} < b^{x_2}$$

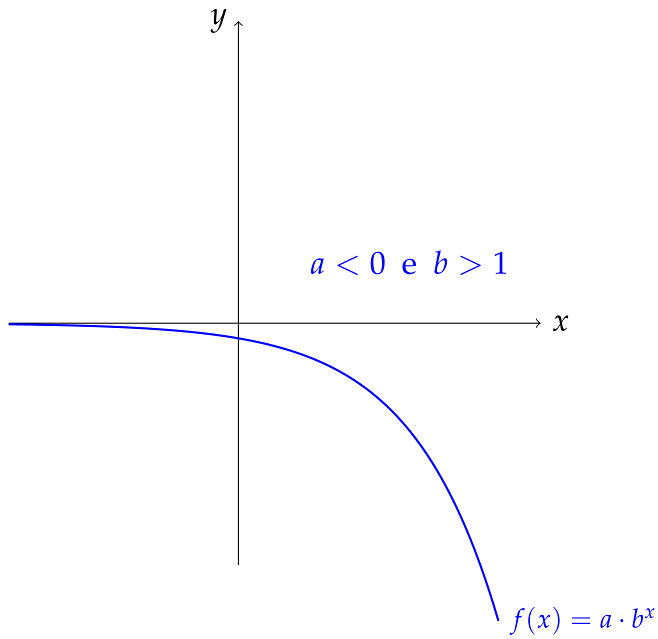
por a, obtemos a desigualdade:

$$a \cdot b^{x_1} > a \cdot b^{x_2}$$

Assim,

$$f(x_2) = a \cdot b^{x_2} < a \cdot b^{x_1} = f(x_1).$$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, segue que f é estritamente decrescente.



(d) Se $a < 0$ e $0 < b < 1$, então a função $f(x) = a \cdot b^x$ é estritamente crescente;

Solução: Para $0 < b < 1$, sabe-se que a função $g(x) = b^x$ é estritamente decrescente, de modo que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_2} = g(x_2) < g(x_1) = b^{x_1}$$

Como $a < 0$, multiplicando os dois membros da desigualdade:

$$b^{x_2} < b^{x_1}$$

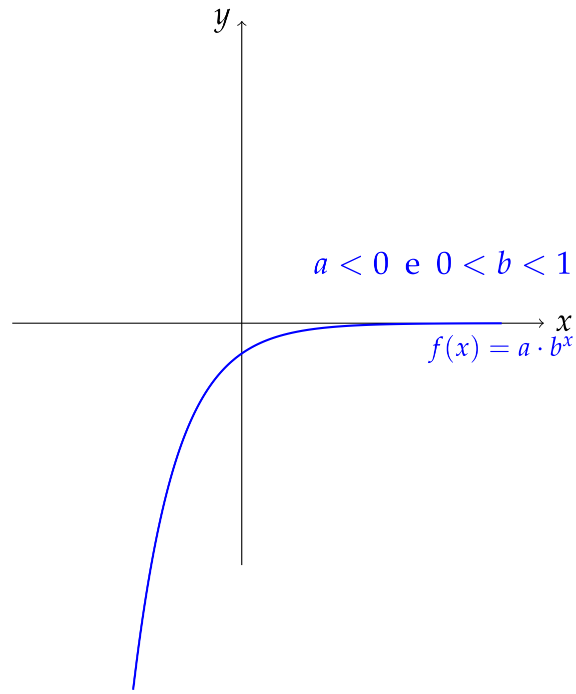
por a, obtemos a desigualdade:

$$a \cdot b^{x_1} < a \cdot b^{x_2}$$

Assim,

$$f(x_1) = a \cdot b^{x_1} < a \cdot b^{x_2} = f(x_2).$$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, segue que f é estritamente crescente.



(3) O número de bactérias numa cultura em placa de Petri após t horas é:

$$B(t) = 100 \cdot e^{0.693 \cdot t}$$

(a) Qual o número inicial de bactérias presentes?

Solução: Basta avaliarmos a função em $t = 0$. Neste caso, temos inicialmente $B(0) = 100 \cdot e^{0.693 \cdot 0} = 100 \cdot e^0 = 100$ bactérias.

(b) Quantas bactérias estarão presentes em 6h?

Solução: Basta avaliarmos a função em $t = 6$. Neste caso, temos inicialmente $B(0) = 100 \cdot e^{0.693 \cdot 6} = 100 \cdot e^{4.158} = 100 \cdot 63.94 \approx 6394$ bactérias.

(c) Quando o número de bactérias será 200? Estime o tempo de duplicação das bactérias.

Solução: Neste caso, basta resolvermos:

$$200 = 100 \cdot e^{0.693 \cdot t}$$

$$2^1 = e^{0.693 \cdot t}$$

$$\ln(2^1) = \ln(e^{0.693\cdot t})$$

$$0.693 = 0.693 \cdot t$$

$$t = 1\text{h}.$$

(4) A meia-vida do fósforo 32 é de cerca de 14 dias. Inicialmente, em uma amostra, há 6.6g.

(a) Expresse a quantidade de fósforo 32 remanescente em função do instante t, em dias;

Solução: Escrevemos:

$$P(t) = 6.6 \cdot 2^{-b\cdot t}$$

Para determinar a constante b, avaliamos a função em $t = 14$, instante no qual teremos 3.3g de fósforo 32 na amostra:

$$3.3 = 6.6 \cdot 2^{-b\cdot 14}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = 2^{-14\cdot b}$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2^{-1}) = \log_2(2^{-14\cdot b})$$

$$-1 = -14 \cdot b$$

$$b = \frac{1}{14} = 0.07142857$$

Assim, a função que descreve a quantidade de fósforo na amostra é:

$$P(t) = 6.6 \cdot 2^{-0.07142857\cdot t}$$

(b) Determine em quantos dias haverá apenas 1g de fósforo 32 na amostra.

Solução: Basta resolvermos a equação:

$$1 = 6.6 \cdot 2^{-0.07142857 \cdot t}$$

$$0.1515 = 2^{-0.07142857 \cdot t}$$

$$\log_2(0.1515) = \log_2(2^{-0.07142857 \cdot t})$$

$$-2.72246746717 = -0.07142857 \cdot t$$

$$t = 38.16 \text{ dias}$$

(5) Uma certa cidade tem uma população de 375 000 habitantes, e está crescendo a uma taxa anual de 2.25%. Quando esta população atingirá 1 000 000 habitantes?

Solução: Seja $P(t)$ a população da cidade em um instante t, medido em anos. Os dados no enunciado nos permitem escrever:

$$P(t) = 375000 \cdot (1 + 0.0225)^t = 375000 \cdot (1.0225)^t$$

$$1000000 = 375000 \cdot (1.0225)^t$$

$$2.667 = (1.0225)^t$$

Calculando o logaritmo natural nos dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$\ln(2.667) = \ln((1.0225)^t) = t \cdot \ln(1.0225)$$

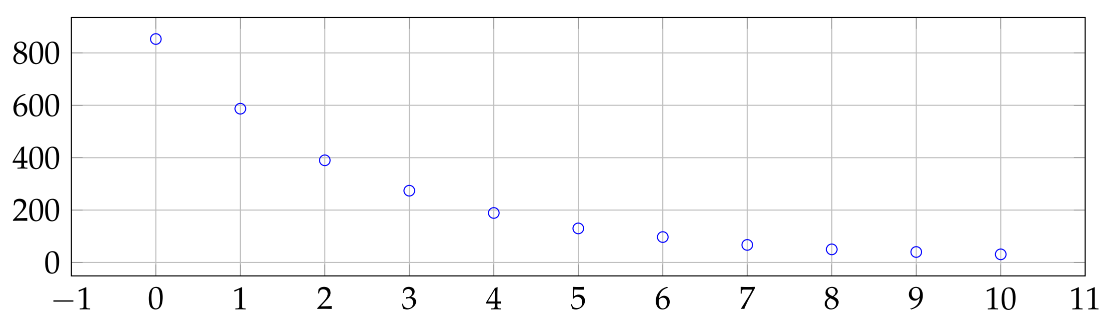
$$0.9809542452 = t \cdot 0.02225060893$$

$$t = \frac{0.9809542452}{0.02225060893}$$

$$t = 44.08 \text{ anos}$$

(6) Com o passar do tempo, a concentração sanguínea de um medicamento ministrado a anumais de laboratório decresce. A concentração, em partes por milhão (p.p.m.) aparece na tabela abaixo:

Concentração (em p.p.m.)	853	587	390	274	189	130	97	67	50	40	31
Tempo (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



(a) Construir um modelo matemático relacionando o nível de concentração com o tempo decorrido;

Solução: O diagrama de dispersão acima sugere que a função adequada para modelar este fenômeno é da forma:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-b \cdot t},$$

onde $C(t)$ é a concentração do medicamento no $t-$ésimo dia, $C_0 = 853$ p.p.m. e b é uma constante positiva, a determinar. A função será da forma:

$$C(t) = 853 \cdot e^{-b \cdot t}$$

Fazendo $t = 1$, temos:

$$587 = C(1) = 853 \cdot e^{-b \cdot 1}$$

$$\frac{587}{853} = e^{-b}$$

Aplicando ln aos dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$0.373735 = \ln(0.688159437) = \ln\left(\frac{587}{853}\right) = \ln(e^{-b}) = -b$$

$$C(t) = 853 \cdot e^{-0.373735 \cdot t} = 853 \cdot (0.688)^t$$

(b) Compare as observações com as previsões;

Solução: Abaixo apresentamos uma tabela com as comparações:

Tempo (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prevista:	853	587	404	278	191	132	91	62	43	30	20
Observada (em p.p.m.)	853	587	390	274	189	130	97	67	50	40	31

(c) Use seu modelo para prever quando o nível da concentração estará abaixo de 10p.p.m.

Solução: Como sabemos, a função exponencial $C(t) = 853 \cdot (0.688)^t$ é estritamente decrescente, pois sua base é menor do que 1. Vamos, então, buscar o instante (previsto) em que a concentração será exatamente igual a 10p.p.m. Após este instante, a concentração permanecerá abaixo deste nível. Devemos, portanto, resolver:

$$10 = 853 \cdot (0.688)^t$$

Aplicando ln a ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\ln(10) = \ln(853 \cdot (0.688)^t) = \ln(853) + \ln((0.688)^t) = \ln(853) + t \cdot \ln(0.688)$$

$$2.30258509299 = 6.74875954749 + t \cdot (-0.37396644104)$$

$$t = -\frac{2.30258509299 - 6.74875954749}{0.37396644104} \approx 11.89$$

Desta forma, de acordo com este modelo, a concentração estará abaixo de 10p.p.m. depois de, aproximadamente, 12 horas (arrendondando para cima).

(7)