

MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III**1a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2022**

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\iint_R (2y^2 - 3xy^3) dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$. Resp. (a) $-\frac{585}{8}$.

(b) $\iint_R x \sin y dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$. Resp. (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$.

(c) $\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy$, onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$. Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$.

3. (a) Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.

(b) Uma piscina tem formato circular de raio 3m e profundidade variando linearmente de sul a norte, sendo que no extremo sul é de 1m e no extremo norte é de 2m. Calcule o volume da piscina. Resp. $\frac{27\pi}{2}$

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy. \quad \text{Resp. } \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2}.$$

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\iint_D xy dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Resp. (a) $\frac{1}{12}$.

(b) $\iint_D (x^2 - 2xy) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$. Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c) $\iint_D e^{x/y} dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$. Resp. (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.

(d) $\iint_D x \cos y dx dy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$. Resp. (d) $(1 - \cos 1)/2$.

(e) $\iint_D 4y^3 dx dy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f) $\iint_D xy dx dy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

(g) $\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Resp. (g) 8π .

(h) Calcule $\iint_D e^{y-x} dx dy$ sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$. Resp. (h) $\frac{e^2}{2}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

- (a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.
- (b) S é limitado superiormente por $z = xy$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.
- (c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano $x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \arcsen(\frac{2}{3})$.
- (d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.
- (e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.
- (f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$. Resp. (f) $\frac{16}{3}a^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x, y) dx dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

- (a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ (b) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$ (c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$
- (d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$ (e) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sen(x^2) dx dy$.

Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4} \sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e - 1)$, (e) $\frac{1}{2}(1 - \sin(1))$.

9. Calcule as integrais:

- (a) $\iint_R x dx dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.
- (b) $\iint_R xy dx dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.
- (c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin \theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.
- (d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (e) $\iint_D (e^{-x^2 - y^2}) dx dy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y .
- (f) $\iint_D \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} dx dy$ sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Esboce a curva e calcule a área da região indicada:

- (a) a região limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$ Resp. $\frac{\pi}{12}$.
- (b) a região limitada pela lemniscata $r^2 = 4 \cos 2\theta$ Resp. 4.

11. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$. Resp. $\frac{16a^3}{3}(\pi + \frac{4}{3})$

12. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade δ , nos seguintes casos:

(a) $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $\delta(x, y) = x^2$.

(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\delta(x, y) = x + y$.

(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\delta(x, y) = xy$.

(d) D é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\delta(x, y) = 3$.

(e) $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ e $\delta(x, y) = y$.

Resp. (a) $\frac{2}{3}$, $(0, \frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$ (e) $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$.

13. Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 das lâminas descritas nos itens (c) e (d) do exercício anterior.

Resp. (c) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{13}{80}$, (d) $\frac{189}{20}$, $\frac{1269}{28}$, $\frac{1917}{35}$.

14. (a) Calcule a massa de $D = \{(x, y) : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$, com função densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$.

Resp. 150π .

(b) Calcule a massa de $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1\}$ com função densidade $\delta(x, y) = e^{y^4} + \sqrt[3]{x^2}$.
Resp. $\frac{1}{4}(e - \frac{3}{5})$.

(c) Calcule o momento de inércia I_0 com relação a origem de $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, onde $a > 1$, $b > 1$ e função densidade $\delta(x, y) = 1$.

Resp. $ab(a^2 + b^2)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$.

15. Calcule usando mudança de coordenadas:

(a) $\iint_D (x^2 - y^2) \sin((x + y)^2) dx dy$, onde D é o paralelogramo de vértice $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Resp. $\frac{\pi^2}{32} (1 - \cos(\frac{\pi^2}{4}))$.

(b) $\iint_R \cos\left(\frac{\pi(y - x)}{4(y + x)}\right) dy dx$, onde R é a região do 1º quadrante limitada pelas retas $x + y = 1$ e $x + y = 2$.

Resp. $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$.

16. Calcule as integrais iteradas:

(a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz dx dy dz$ (b) $\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y dx dz dy$. Resp. (a) $\frac{1}{48}$, (b) $\frac{16}{3}$.

17. Calcule as integrais triplas:

(a) $\iiint_D yz dx dy dz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.

(b) $\iiint_D y dx dy dz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c) $\iiint_D xy dx dy dz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

(d) $\iiint_D z dx dy dz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e) $\iiint_D x dx dy dz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

18. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
Resp. a^5 , $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$.

19. Determine os momentos de inércia de um cubo de densidade constante k e aresta L se um dos seus vértices é a origem e três de suas arestas estão sobre os eixos coordenados. Resp. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$.

20. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

(b) $\iiint_E y dx dy dz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

(c) $\iiint_E x^2 dx dy dz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $z \geq 0$.
Resp. (a) 24π , (b) 0 , (c) $2\pi/5$.

21. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
Resp. 162π .

22. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ o pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K .
Resp. $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$.

23. Calcule as integrais:

(a) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) $\iiint_E y^2 dx dy dz$, onde E é a parte da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ contida no primeiro octante.

(c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, onde E é a região interior ao cone $\phi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $\pi/30$, (c) $4\pi(2 - \sqrt{3})$.

24. Determine a massa de um hemisfério sólido H de raio a se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base. Resp. $K\pi a^4/2$, onde K é a constante de proporcionalidade.

25. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Resp. $\frac{4}{3}\pi abc$.

26. Calcule a integral $\iiint_E x dx dy dz$, onde $E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Resp. 3π .

27. Calcule a massa do sólido $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq a > 0\}$, com $a < b$ e $\delta(x, y, z) = z$.
Resp. $\frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)^2$.

28. (a) Calcule o volume da região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
Resp. $\frac{a^3\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

(b) Calcule a massa da região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $a > 0$ com $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$
Resp. $\frac{11}{30}\pi a^5$.

(c) Calcule $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, onde V é o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ Resp. $\frac{(9\sqrt{3}-4\sqrt{2})\pi}{20}$.

29. Calcule a massa da região R limitada por:

(a) $z(x^2 + y^2) = 2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ e $\delta(x, y, z) = 1$ Resp. $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(b) $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$, para $x \geq 0$ com $\delta(x, y, z) = 1$ Resp. $\frac{32}{9}$.

(c) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = 4$ com $\delta(x, y, z) = |z|$; Resp. $\frac{9\pi}{2}$.

(d) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x, y, z) = |z|$; Resp. πa^2 .

(e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + z^2$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z^2$ com $\delta(x, y, z) = 1$; Resp. 8π .

(f) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = 2 + 2z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x, y, z) = z^2$. Resp. $2\pi(\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3})$.

30. (a) Calcule $\iiint_R (x + y + z)(x + y - z) \, dx \, dy \, dz$ para R limitada por: $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $x + y - z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y - z = 1$ e $x - y - z = 2$; Resp. $\frac{3}{4}$.

(b) Calcule a massa do sólido

$R = \{(x, y, z) \mid (x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y - z)^2 \leq 25, \quad x + y + z \geq 0, \quad x + y - z \geq 0\}$,
onde a densidade é $\delta(x, y, z) = (x + y + z)(x + y - z)$. Resp. $\frac{625}{6}$.

31. Calcule $\iiint_R z \, dx \, dy \, dz$, onde R é limitada por:

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 + z^2$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 + \frac{z^2}{2}$, para $z \geq 0$. Resp. 27π .

(b) $z = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$; $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 4$. Resp. 2π .

32. Calcule a integral

$$\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx.$$

Resp. $\frac{\pi}{2}(5 - \arctan(5))$.

33. Use a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados Resp. $\frac{1}{90}$.

34. Calcule a massa da região limitada por: $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$; $x^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{2} + z^2$, com $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$. Resp. $\pi r^5/4$.

35. Calcule a massa do sólido limitado por $u^2 + v^2 + w^2 = 4v$, $u^2 + v^2 + w^2 = 2v$, com $v \geq \sqrt{u^2 + w^2}$, sendo a densidade $\delta(u, v, w) = u^2 + w^2$. Resp. $\frac{341}{30}\pi$.

36. Calcule a massa do sólido dado por $S = \{(u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 \geq 1, \quad u^2 + v^2 + w^2 \leq 2u\}$ sendo a densidade $\delta(u, v, w) = u$. Resp. $\frac{9}{8}\pi$.

37. Se D é a região limitada pelas curvas $x = y^2 - 4y - 1$ e $y - x - 5 = 0$ e se

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy$$

então podemos afirmar que

- a) $a = 1, b = 4, c = y^2 - 4y - 1, d = y - 5$
- b) $a = y^2 - 4y - 1, b = y - 5, c = 1, d = 4$
- c) $a = y - 5, b = y^2 - 4y - 1, c = 1, d = 4$
- d) $a = 1, b = 4, c = y - 5, d = y^2 - 4y - 1$

38. O volume do sólido limitado pelo cilindro $2(x-1)^2 + 4y^2 = 8$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ é dado pelo valor da integral dupla:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Para o cálculo dessa integral, uma mudança de coordenadas conveniente e o respectivo Jacobiano (J) são

- a) $x = 2r \cos(\theta) + 1, y = \sqrt{2} r \sin(\theta), J = 2\sqrt{2}r$
- b) $x = 2r \cos(\theta) + 1, y = \frac{r \sin(\theta)}{\sqrt{2}}, J = r$
- c) $x = \frac{r \cos(\theta)}{2} + 1, y = \frac{r \sin(\theta)}{\sqrt{2}}, J = \frac{r}{2\sqrt{2}}$
- d) $x = \frac{r \cos(\theta)}{\sqrt{2}} + 1, y = \sqrt{2} r \sin(\theta), J = r$

39. O volume da região limitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com $z \geq 0, x \geq 0$ pode ser calculado usando coordenadas cilíndricas por

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^r r dz dr d\theta$$

Então a e b são, respectivamente,

- a) $\frac{\pi}{2}, 2 \sin \theta$
- b) $\pi, 2 \sin \theta$
- c) $\pi, 2 \cos \theta$
- d) $\frac{\pi}{2}, 2 \cos \theta$

40. O volume do sólido limitado por $z = 3 + x^2 + y^2$ e $z = 6$ é

- a) $\frac{9\pi}{2}$
- b) 9π
- c) $4\pi\sqrt{3}$
- d) $\pi\sqrt{3}$