

MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
2ª Lista de Exercícios - 1º Semestre de 2022

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a) $\int_{\gamma} x \, ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.

(b) $\int_{\gamma} xy^4 \, ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \geq 0$. Resp. $1638, 4$.

(c) $\int_{\gamma} (x - 2y^2) \, dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. Resp. 48 .

(d) $\int_{\gamma} xy \, dx + (x - y) \, dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. Resp. $\frac{17}{3}$.

(e) $\int_{\gamma} xyz \, ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = 3 \sin t$, $z = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

(f) $\int_{\gamma} xy^2z \, ds$, γ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$. Resp. $3\sqrt{35}$.

2. Calcule o comprimento das curvas

(a) $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$ e $a > 0$. Resp. $8a$.

(b) $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, onde $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Resp. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

(c) $\gamma(t) = (t, \frac{3t^2}{2}, \frac{3t^2}{2})$, onde $0 \leq t \leq 2$. Resp. $\sqrt{73} + \frac{\ln(\sqrt{73}+6\sqrt{2})}{6\sqrt{2}}$

3. (a) Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$. Resp. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

(b) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade é $\delta(x, y) = x^2$, determine a massa e o centro de massa do cabo. Resp. $4\pi, (\frac{16}{3\pi}, 0)$.

(c) Determine a massa e o centro de massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade é uma constante k . Resp. $2\sqrt{13}k\pi, (0, 0, 3\pi)$.

4. Se um cabo com densidade linear $\delta(x, y, z)$ tem o formato de uma curva γ em $\mathbb{R}^3$, seus *momentos de inércia* I_x , I_y e I_z , em relação aos eixos x , y e z , respectivamente, são definidos por

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, ds; \quad I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, ds; \quad I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) \, ds.$$

Determine os momentos de inércia do cabo do Exercício anterior.

5. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Resp. $-\frac{11}{15}$.

(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$. Resp. 1 .

6. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π .

(b) $\vec{F}(x, y, z) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário. Resp. $-\pi ab$.

(c) $\int_{\gamma} x^3 y^2 z \, dz$, γ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$. Resp. $\frac{16}{11}$.

(d) $\int_{\gamma} z^2 \, dx - z \, dy + 2y \, dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(0, 1, 1)$, de $(0, 1, 1)$ a $(1, 2, 3)$ e de $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$. Resp. $\frac{77}{6}$.

7. Calcule

(a) $\int_{\gamma} x \, dx + (y + x) \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\pi$.

(b) $\int_{\gamma} (2y + 1) \, dx + z \, dy + x \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geq 0$, $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$. Resp. -2 .

(c) $\int_{\gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-2\pi\sqrt{2}$.

(d) $\int_{\gamma} x \, dx + (y + x) \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. 0 .

(e) $\int_{\gamma} x^2 \, dx + x \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 6π .

(f) $\int_{\gamma} y^2 \, dx + 3z \, dy$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 4y$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 10π .

(g) $\int_{\gamma} z \, dy - x \, dz$, sendo γ a intersecção do elipsóide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$ com o plano $x + z = 2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. $-2\pi\sqrt{3}$.

8. Calcule

(a) $\int_{\gamma} 2x \, dx + (z^2 - \frac{y^2}{2}) \, dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 2)$, no sentido anti-horário. Resp. 0 .

(b) $\int_{\gamma} \frac{(x + y) \, dx - (x - y) \, dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. $2\pi a^2$.

(c) $\int_{\gamma} \sqrt{y} \, dx + \sqrt{x} \, dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\frac{3}{10}$.

9. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $2\pi^2$.

10. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

- (a) $\oint_{\gamma} x^2 y dx + xy^3 dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, orientado positivamente. Resp. $-1/12$.
- (b) $\oint_{\gamma} (x + 2y) dx + (x - 2y) dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$, orientada positivamente. Resp. $-1/6$.
- (c) $\oint_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. Resp. $1/3$.
- (d) $\oint_{\gamma} x^2 dx + y^2 dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. 0 .
- (e) $\oint_{\gamma} xy dx + 2x^2 dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2, 0)$ a $(2, 0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada positivamente. Resp. 0 .
- (f) $\oint_{\gamma} 2xy dx + x^2 dy$, γ é a cardióide $\rho = 1 + \cos \theta$ orientada positivamente. Resp. 0 .
- (g) $\oint_{\gamma} (xy + e^{x^2}) dx + (x^2 - \ln(1 + y)) dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e do arco da curva $y = \sin x$, orientada positivamente. Resp. π .
- (h) $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 0)$. Resp. $\pi + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$.

11. (a) Seja D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D é

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} -y dx.$$

(b) Usando (a) calcule a área de

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$; (ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$.
 Resp. (i) $ab\pi$; (ii) $\frac{3}{8}a^2\pi$.

(c) Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \sin^3 t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $\frac{3\pi}{8}$.

12. *Área de um polígono irregular.*

(a) Se γ é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_{\gamma} x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(b) No sentido anti-horário, os vértices de um polígono são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_N, y_N) . Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$. Resp. $\frac{9}{2}$.

13. Calcule

- (a) $\int_{\gamma} x^2(5ydx + 7xdy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0, -2)$ a $(0, 2)$ com $x \geq 0$.
 Resp. $e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{125}{2}\pi$.
- (b) $\int_{\gamma} (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^2e^y + \sin y) dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ com $y \geq 0$.
 Resp. $4 - \frac{3\pi}{4}$.
- (c) $\int_{\gamma} \vec{v} dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1, 2] \times [-1, 1]$ e $\vec{v}(x, y) = 2 \arctg(\frac{y}{x}) \vec{i} + (\ln(x^2 + y^2) + 2x) \vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.
 Resp. 4.

14. (a) Calcule $\nabla \arctg(\frac{y}{x})$ e $\nabla \arctg(\frac{x}{y})$.

(b) Mostre que se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F} = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

15. Calcule

(a) $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x + 2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário;
 Resp. -2π .

(b) $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 2$, percorrida do ponto $(-1, 2)$ a $(2, 5)$.
 Resp. $\frac{1}{2} \ln \frac{29}{5}$.

(c) $\int_{\gamma} \frac{y dx - (x - 1) dy}{(x - 1)^2 + y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido horário.
 Resp. 2π .

(d) $\int_{\gamma} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, onde γ é a fronteira da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, orientada no sentido horário.
 Resp. π .

16. Verifique que a integral $\int_{\gamma} 2x \sin y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1, 0)$ a $(5, 1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor.
 Resp. $25 \sin 1 - 1$.

17. Sejam as curvas γ_1 a circunferência $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ percorrida no sentido anti-horário, γ_2 a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário e γ_3 a curva formada pela união das três seguintes circunferências: $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, $(x + 1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, ambas percorridas no sentido horário e $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ percorrida no sentido anti-horário. Se $I_k = \int_{\gamma_k} P dx + Q dy$ onde

$$P(x, y) = -y \left[\frac{1}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x + 1)^2 + y^2} \right]$$

$$Q(x, y) = \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + y^2}$$

então calcule I_1 , I_2 e I_3 .
 Resp. $I_1 = 2\pi$; $I_2 = 6\pi$; $I_3 = -2\pi$.

18. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no sentido horário. Dê todos os valores possíveis para

$$(a) \int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}. \quad (b) \int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}.$$

Resp. (a) 0 ou -2π ; (b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$.

19. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

20. Considere o campo $\vec{F}(x, y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, $c > 0$, atuando sobre uma partícula que se move do ponto $(0, 0)$ até a reta $x = 1$ sobre a curva γ , gráfico da função $y = ax^b$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine um valor de c em termos de a e de b para que o trabalho realizado por $\vec{F}$ seja nulo. Resp. $c = -a^2b/3$.

21. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + 3x \right)$ se

(a) γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -8π .

(b) γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -14π .

22. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x, y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponha que g é de classe C^1 . Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

23. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D . Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

Resp. Não.

(b) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

Resp. $\phi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} - (4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

Resp. Não.

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

Resp. $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz$.

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\vec{i} + (2y \sin x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. $\phi(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z$.

(f) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

Resp. Não.

(g) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \leq 0\}$;

Resp. $\phi(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$.

(h) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

Resp. $\phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

24. Prove que o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + xy\vec{j}$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abscissas. Pode-se concluir que $\vec{F}$ é conservativo?

25. Calcule

(a) $\int_{\gamma} (-2xy + x^2)dx + \sqrt{8 - y^7} dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente. Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\int_{\gamma} \left(\frac{2xy^2}{x^2 + 1} \right) dx + (2y \ln(x^2 + 1))dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.

(c) $\int_{\gamma} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + xy \right) dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x - 1$ e $y^2 \leq x + 1$, orientada no sentido anti horário. Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\int_{\gamma} (2xy + \sin(y))dx + x \cos(y)dy + x^2 dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = x$, no 1º octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário.

Resp. $\frac{1}{12} (6 \sin(\frac{1}{2}) - 1)$.

(e) $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + 2y^2} dx + \frac{x}{x^2 + 2y^2} dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário.

O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

Resp. $-\pi\sqrt{2}$.

26. Seja o campo $\vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$ para $0 \leq t \leq \pi$. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$.

Resp. π .

27. Calcule as integrais

(a) $\int_{\gamma} 7x^6 y dx + x^7 dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0, 1]$.

Resp. 1.

(b) $\int_{\gamma} [\ln(x + y^2) - y] dx + [2y \ln(x + y^2) - x] dy$ sendo γ a curva $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ com $y \geq 0$ orientada no sentido horário.

Resp. $3 \ln 3 - 2$.

(c) $\int_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \sin^3 t$ com $y \geq 0$ ligando os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, nessa ordem.

Resp. $-\frac{\pi}{2}$.

28. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$.

Resp. $a^2b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$.

(b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y dx + x \cos y dy$.

Resp. $a \sin b$.

29. Para cada campo $\vec{F}$ encontre uma curva fechada simples α , tal que $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} \neq 0$. Podemos concluir que os campos não são conservativos?

(a) $\vec{F} = (y^2 + xy, 3y^2)$.

(b) $\vec{F} = (e^{xy}, e^{-xy})$.

30. Calcule

(a) $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz dx + xz dy + xy dz$.

Resp. -2.

(b) $\int_{\gamma} \sin(yz) dx + xz \cos(yz) dy + xy \cos(yz) dz$, sendo γ a hélice $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$.

31. Sejam um ponto A pertencente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e um ponto B pertencente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Calcule $\int_A^B \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Resp. $\ln 2$.

32. Se $\vec{n}(x, y)$ é vetor unitário normal ao traço da curva γ em (x, y) , calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ sendo

(a) $\vec{F}(x, y) = x^{10}\vec{i} + (3x - 10x^9y)\vec{j}$ e γ a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ contida no primeiro quadrante, $\vec{n}$ normal exterior à circunferência.

Resp. $-\frac{1}{11}$.

(b) $\vec{F}(x, y) = x^3y^3\vec{i} - \frac{3x^2y^4 + 2}{4}\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t^3, \sin(4 \arctan t^2))$, $t \in [0, 1]$, $\vec{n} \cdot \vec{j} \leq 0$.

Resp. $\frac{1}{2}$.

33. Sendo $\vec{F} = ((x^2 + y^2 + 2x)e^x - \cos x, 2ye^x)$ um campo de força conservativo, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao mover uma partícula ao longo do caminho $\gamma(t) = (t, \cos t)$, $t \in [0, \pi/4]$ é:

- (a) $W = e^{\pi/4}(1 + \frac{\pi^2}{16}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$
- (b) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$
- (c) $W = e^{\pi/4}\frac{\pi^2}{16} + \frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
- (d) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
- (e) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

34. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C . Os momentos de inércia em relação aos eixos são:

- (a) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 dx, \quad I_y = -\frac{\rho}{3} \oint_C x^2 dy$
- (b) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 x dx, \quad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dy$
- (c) $I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx, \quad I_y = -\frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dy$
- (d) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 x dy, \quad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dx$
- (e) $I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx, \quad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy$

35. Sejam $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ uma função escalar definida em $\mathbb{R}^3$ e C uma curva parametrizada dada por $x = \frac{4}{\pi} \arctan t^2$, $y = \sqrt[4]{(t+1)(7t+1)}$, $z = e^{\sqrt{t-t^2}}$, onde $0 \leq t \leq 1$. Então o valor da integral de linha $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$ é:

- (a) 4
- (b) 0
- (c) $\int_0^1 \frac{8}{\pi} \arctan t^2 + 2\sqrt[4]{(t+1)(7t+1)} + 2e^{\sqrt{t-t^2}} dt$
- (d) $\frac{64}{\pi^2} + 14\sqrt{2} + \frac{e}{2}(3\sqrt{3} - 1)$
- (e) 1