

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2º Semestre de 2022 - 2ª Lista de exercícios

1. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$	h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$	i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n$
j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$	k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n}$	l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$
m) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$	n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$	

2. Obtenha o raio de convergência para as séries seguintes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$.

3. Determine o intervalo de convergência de:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2 + (-1)^n)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7} \right)^n x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2} \right) x^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n + b^n}$, com $b > a > 0$.

4. Usando derivação e integração termo a termo, se necessário, determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

a) $\frac{1}{x^2 + 25}$ b) $\arctg(2x)$ c) $\frac{1}{(1+x)^2}$ d) $\frac{1}{(1+x)^3}$ e) $\frac{2x}{1+x^4}$
 f) $\ln(1+x)$ g) $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$ h) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ i) $\int_0^x \frac{t}{1+t^5} dt$

5. Verifique que

a) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$ b) $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

6. Obter uma expressão das somas das séries abaixo e os respectivos raios de convergência, usando derivação e integração termo a termo, se necessário.

- a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$
- c) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$
- e) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ f) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$
- g) $x + 2x^3 + 3x^5 + \dots + nx^{2n-1} + \dots$ h) $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots$
- i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$ j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \dots$
- k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \dots$ l) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$

7. Utilizando as somas das séries obtidas no exercício anterior, calcule:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)n}$.

8. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$.

9. Utilizando o desenvolvimento em série, obtenha um valor aproximado de

- (a) e , com erro inferior a 10^{-5} (b) $\sin 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}
 (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\arctg(1/2)$ e $\arctg(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}
 (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}

10. Utilizando série de Taylor calcule $\frac{d^{320} \arctg}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321} \arctg}{dx^{321}}(0)$.

11. Dê a série de Taylor de $f(x)$ centrada no 0, indicando os intervalos de convergência

- a) $f(x) = x^2 e^x$ b) $f(x) = \ln(1 - x^3)$ c) $f(x) = \sin(x^2)$
 d) $f(x) = \cos^2 x$ e) $f(x) = x \cos(2x)$ f) $f(x) = x \arctg x$

12. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6} , sendo que as funções dos itens (a) e (c) são definidas em $t = 0$ como valendo 1:

a) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ c) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ d) $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$

13. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

14. Ache a série de Fourier de $f(x)$, determine soma da série e faça os gráficos de f e da função soma da série encontrada:

- a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \leq 0 \\ b, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
 c) $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$ d) $f(x) = e^{ax}, -\pi < x \leq \pi, a \neq 0$
 e) $f(x) = \sin(ax), -\pi < x \leq \pi, a \notin \mathbb{Z}$ f) $f(x) = ax + b, -\pi < x \leq \pi$
 g) $f(x) = |\cos x|, -\pi < x \leq \pi$

23. Usando a fórmula de Parseval prove que

$$(a) \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (b) \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

24. Calcule

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

25. (a) Dê fórmulas para as constantes a_n , $n \geq 0$, b_n , $n \geq 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = x^2 e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

(b) Determine a soma da série para $x = \frac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

26. Encontre constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$ que minimizem a expressão

$$\int_0^\pi \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right]^2 dx.$$

Respostas

1. a) $] -4, 4[$; b) $\{0\}$; c) $[-1, 1]$; d) $\{0\}$; e) $]2, 8]$; f) $[-2, 0]$; g) $\mathbb{R}$; h) $]0, 2e[$; i) $] -3 - e, -3 + e[$; j) $[2, 4]$; k) $]2, 6[$; l) $[-1, 1]$; m) $] -1, 1[$; n) $[-4/3, 4/3[$.

2. a) $R = 1/4$; b) $R = 1/2$; c) $R = 1$; d) $R = e$; e) $R = \sqrt[3]{e}$; f) $R = 1$.

3. a) $] -1, 1[$; b) $] -5/3, 5/3[$; c) $] -3/2, 3/2[$; d) $[-1, 1[$; e) $] -b - 1, b - 1[$.

4. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{2n+2}}, \quad -5 < x < 5$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n, \quad -1 < x < 1$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, \quad -1 < x < 1$
(e) $2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \right), \quad -1 < x < 1$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}, \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n 2^n}{3} \right) x^n, \quad \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$
(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} x^{5n+2}, \quad -1 < x \leq 1$

6. (a) $-\ln(1-x)$; (b) $\ln(1+x)$; (c) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; (d) $\arctg x$; (e) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (f) $\frac{x}{(1-x)^2}$; (g) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$;
(h) $(1+x) \ln(1+x) - x$; (i) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; (j) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; (k) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$; (l) $\frac{-1}{4} \ln(1-x^4)$.

7. $\ln 2$; 26 ; $\frac{6}{5} \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{5}$.

9.

(a) $e \approx \sum_{n=0}^8 \frac{1}{n!} \approx 2.71827$ (e) $\pi/4 \approx \sum_{n=0}^{49999} \frac{(-1)^n}{2n+1} \approx 0.78539$
(b) $\sin(1) \approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \approx 0.841468$ e $\sin(1) \approx \sum_{n=0}^4 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \approx 0.841471$
(c) $\ln(2) \approx \sum_{n=0}^{10^5-1} \frac{(-1)^n}{n+1} \approx 0.69314$ e $\ln(3) \approx 2 \sum_{n=0}^6 \frac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1} \approx 1.098607$
(d) $\arctan(1/2) \approx \sum_{n=0}^5 \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+1}}{2n+1} \approx 0.463639$ e $\arctan(1/3) \approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (1/3)^{2n+1}}{2n+1} \approx 0.321745$

10. 0 e (320)!.

11 .

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \quad -1 \leq x < 1 \\
 & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} & \text{(d)} 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

12 .

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, \quad -1 \leq x \leq 1 & \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

13. (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6!}$, se $\alpha = 6$; 0, se $\alpha < 6$; $-\infty$, se $\alpha > 6$
 (e) $-\frac{1}{7!}$, se $\alpha = 7$; 0, se $\alpha < 7$; $-\infty$, se $\alpha > 7$

14. (a) $\frac{a+b}{2} + \frac{2}{\pi}(b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$.

soma: a , se $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$; b , se $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; $\frac{a+b}{2}$, se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(b) $\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2}{\pi}(a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} - (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}(nx)}{n}$.

soma: ax , se $(2k-1)\pi < x \leq 2k\pi$; bx , se $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$; $\frac{b-a}{2}\pi$, se $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

soma: $|x|$, se $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} (a \cos(nx) - n \text{sen}(nx))$.

soma: e^{ax} , se $-\pi < x < \pi$; $\cosh(a\pi)$ se $x = \pm\pi$, e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{2\text{sen}(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 - a^2} \text{sen}(nx)$

soma: $\text{sen}(ax)$, para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$ e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

(f) $b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(nx)}{n}$.

soma: $ax + b$, para $-\pi < x < \pi$; b , para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica, para $x \in \mathbb{R}$.

(g) $\frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right)$

soma: $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

15. (a) $2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(nx)}{n}$

soma: ax , para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$\frac{a}{2}\pi - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$,

soma: $a|x|$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$(b) \ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}.$$

soma : x^2 para $0 \leq x < \pi$; $-x^2$, para $-\pi \leq x \leq 0$; 0 para $x = \pm\pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

soma : x^2 , para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (b - (a\pi + b)(-1)^n) \sin(nx).$$

soma : $ax - b$, para $-\pi < x \leq 0$; $ax + b$, para $0 < x < \pi$, 0, para $x = \pm\pi$, 0 e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a\pi}{2} + b - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

soma : $a|x| + b$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica de $a|x| + b$ para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\sin x$,

soma : $\sin x$, para $x \in \mathbb{R}$;

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\sin x|$ para $x \in \mathbb{R}$

$$(e) \ \frac{2}{\pi} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1+(-1)^n}{\pi n(n-1)} \sin((2n-1)x),$$

soma : $-|\cos x|$ para $x \leq 0$ e $|\cos x|$ para $x \geq 0$, $x \neq k\pi$ e 0 para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

16 .

(a) usar 14a) em $x = \pi/2$

(b) usar 14c) em $x = \pi$

(c) usar 14e) em $x = \pi/2$

(d) usar 14e) em $x_0 = \pi/4$

(e) usar 14b) em $x = \pi/4$

18. (a) $\frac{\pi^2}{8}$

b) $\frac{\pi^2}{12}$

19 .

(a) $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = \frac{2}{3}$

(b) $c_1 = \frac{\pi^2}{3}$

(c) $c_1 = \frac{2}{\pi}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

20. $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(2n\pi x) - \frac{1}{\pi n} \sin(2n\pi x) \right) \quad S(999) = 1/2 \text{ e } S(999/2) = 1/4.$

21 .

(a) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$

(b) $b_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)^2}$ para $n \geq 1$.

(c) $c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8}{(2n-1)^2 \pi^2}$, para $n \geq 1$. (d) $S(200) = S(0) = 0$; $S(201) = S(1) = 0$

22. $a = -\pi^2$, $b = 12$

23. (a) Use $f(x) = x^2$

(b) Use exercício 22.

24. (a) $\frac{\pi^4}{96}$

(b) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$

$$25. \text{ (b) } \frac{\pi^2}{4} e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ e } \frac{\pi^2}{2} (e^{-\pi} + e^{\pi}).$$

$$26. \ a_0 = \pi \text{ e } a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$