

MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III

3a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2022

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área:

- (a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$;
- (c) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$;
- (d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;
- (e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$;
- (f) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $a > 0$;
- (g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$ em torno do eixo z ;
- (h) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}$.
- (i). S é a parte do parabolóide $z = 1 - 2x^2 - y^2$ limitada pela superfície $16x^2 + 4y^2 = 1$.

Resp. (a) $4\pi(2 - \sqrt{2})$, (b) 8π , (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi - 2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) $4\pi(2 - \frac{2}{\sqrt{10}})$, (i) $\frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} - 1)$.

2. Sejam $0 < a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do (a) eixo- x , (b) eixo- y . Calcule a área da superfície em cada caso.

Resp. (a) $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, (b) $2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

- (a) $\iint_S y \, d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;
- (b) $\iint_S x^2 \, d\sigma$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (c) $\iint_S yz \, d\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$;
- (d) $\iint_S xy \, d\sigma$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$;
- (e) $\iint_S z(x^2 + y^2) \, d\sigma$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;
- (f) $\iint_S xyz \, d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (g) $\iint_S \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 2}{2x^2 + 2y^2 - 1}} \, d\sigma$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq z \leq 3$;
- (h) $\iint_S (x + 1) \, d\sigma$, onde S é a parte de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$.

Resp: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $-\frac{\pi}{4}(8 + \sqrt{2})$, (e) 16π , (f) 0 , (g) $8\pi\sqrt{2}$, (h) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x, y, z)$ a densidade pontual de massa para:

- (a) S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ contida no primeiro octante e $\delta(x, y, z) = y$.
 (b) S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 2)$ e $\delta(x, y, z) = xz$.
 (c) S é a parte do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ contida no semi espaço $x \geq 0$ e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.
 (d) S é a parte de $z = x^2 + y^2 + 2xy$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$ e $\delta(x, y, z) = \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{1 + 8z}}$.
 (e) S é a parte de $z = \ln(x^2 + y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = e^2$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Resp: (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17} - 2347)$ (d) 5π (e) $\frac{e}{3}(e^2 + 4)^{3/2} - \frac{5^{3/2}}{3} - \int_1^e (r^2 + 4)^{3/2} dr$.

5. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S . Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} - 3xy^2 \vec{j} + 4y^3 \vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é $\vec{k}$;
 (b) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + xy \vec{j} + xz \vec{k}$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$;
 (c) $\vec{F}(x, y, z) = -x \vec{i} - y \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$;
 (d) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
 (e) $\vec{F}(x, y, z) = -y \vec{i} + x \vec{j} + 3z \vec{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é $\vec{k}$;
 (f) $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} - z \vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$;
 (g) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + 2y \vec{j} + 3z \vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;
 (h) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y) \vec{i} - (2y + 1) \vec{j} + z \vec{k}$ e S é o retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;
 (i) $\vec{F}(x, y, z) = -yz \vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é $\vec{i}$;
 (j) $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4 - x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$;
 (k) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} - 2z \vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

Resp. (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π , (e) 128π , (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1 , (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

6. Calcule

- (a) $\iint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $z \geq 0$, orientada segundo a normal exterior; Resp. $3\pi a^4/4$.
 (b) $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, onde S é a parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$; Resp. 4.

(c) $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$. Resp. 28π .

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha a terceira componente não-negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S , mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy.$$

8. Calcule $\iint_S y^2 z^2 dy \wedge dz + x dz \wedge dx + y dx \wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y + 3$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$. Resp. 54π .

9. Calcule $\iint_S e^{z^2} \ln(z+y) dy \wedge dz + (x^2 + z^2) dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado pelo plano $z = y + 4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$. Resp. $-\frac{35\pi}{16}$.

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. $\frac{7}{2}$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1 + y^2))\vec{j} + (xy + \sin z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. $\frac{4}{3}$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (2z + \sin e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -4π .

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x^3))\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2 + z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -1 .

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)^{20})\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. π .

(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Resp. $-a^2\pi\sqrt{3}$.

11. Calcule $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$, sendo:

(a) $\vec{v} = (yz, xz + \ln(1 + y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2x + 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -24π .

(b) $\vec{v} = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{z^3}{1 + z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário; Resp. -2π .

(c) $\vec{v} = (2xz^3 + y, x^2y^2, 3x^2z^2)$ e γ é a intersecção das superfícies $z = \sin y + 10$ e $x^2 + y^2 = 16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -16π .

(d) $\vec{v} = (x - y^2, x - z + \frac{y^2}{2 + \sin y}, y)$ e γ é a intersecção do parabolóide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4π .

(e) $\vec{v} = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em torno do eixo Oz do gráfico de $z = \frac{1}{y^2}$, $e \leq y \leq e^2$. Escolha uma orientação para γ . Resp. 0.

(f) $\vec{v} = (\cos(1+x^2), \frac{-z}{y^2+z^2} + e^{y^4}, \frac{y}{y^2+z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x = y + z$, orientada de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. 2π .

12.

(a) Calcule $\int_{\gamma} (z + y^2)dx + (y^2 + 1)dy + [\ln(z^2 + 1) + y]dz$, sendo $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 10 - 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Resp. 4π .

(b) Seja γ a curva de intersecção do prisma (superfície) de faces $x = 2$, $x = -2$, $y = 3$, $y = -3$, com o plano $z = -x + 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Calcule $\int_{\gamma} \left[\frac{-(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \right] dx + \left[\frac{x}{x^2 + (y-1)^2} + z \right] dy + \sin z dz$. Resp. $-24 + 2\pi$.

(c) Calcule $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{v}(x, y, z) = (xy + y)\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com a superfície $z = \cos(y^2) + 5$ orientada de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário. Resp. -4π .

13. Seja γ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a, b, c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém γ . Mostre que a área da região plana limitada por γ é dada por

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz,$$

com γ orientada pela orientação induzida de $\vec{N}$.

14.

(a). Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + \sin(x^3), y^2, xy + e^{z^3})$ e γ dada pela intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $2x - z = 0$ percorrida de $(0, 3, 0)$ a $(0, -3, 0)$, $z \geq 0$.

(b). Seja o campo vetorial $\vec{v}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}, 0 \right) + (e^{x^4}, \sin(\sin y^5), \ln(1 + z^4))$ e a curva γ dada pela intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 5 + \ln(1 + y^2)$ cuja projeção no plano xy é percorrida uma vez no sentido horário. Calcule $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$.

(c). Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F} = (-2x + y)\vec{i} + ((z^2 \cos y) - y)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$ e γ a intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ e $z = y + 1$ com projeção no plano xy percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. (a) $-\frac{54}{5}$, (b) $-\frac{\pi}{2}$, (c) 2π .

15. Calcule $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{v} = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x + 2$, orientada pela normal exterior. Resp. $\frac{19\pi}{4}$.

16. Calcule $\iint_S dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, onde S está orientada pela normal exterior nos seguintes casos:

(a) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

(b) S é a fronteira da região limitada por $z = 4$ e $z = x^2 + y^2$.

Resp. (a) $\frac{4\pi}{5}r^5$, (b) $\frac{176\pi}{3}$.

17. Seja $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{N}$ é a normal unitária exterior a S nos seguintes casos:

- (a) S é a esfera de raio $a > 0$ com centro na origem; Resp. 4π .
 (b) S é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a S nem à região interior a S ; Resp. 0.
 (c) S é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior. Resp. 4π .

18. Calcule $\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} dS$ sendo:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima; Resp. -4π .
 (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, x - y, x^2y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy , do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro; Resp. 6.
 (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, z, yz)$ e S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z . Resp. 0.

19. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S ($\vec{N}$ = normal unitária exterior), para:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = -xz\vec{i} + (y^3 - yz)\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Resp. $\frac{4}{5}\pi ab^3c$.
 (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin(z), y^3 + z \sin(x), 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. Resp. $\frac{194\pi}{5}$.
 (c) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + z\vec{k}$ e $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = (z - 2)^2, 0 \leq z \leq 2\}$, sendo $\vec{N}$ o campo de vetores unitários normais a S tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$ Resp. $\frac{14}{3}\pi$.
 (d) $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} + (x - y)\vec{j} + 4x\vec{k}$, S , onde S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 8$ abaixo do plano $z = 2x + 4y + 3$ e $\vec{n}$ é a normal exterior ao parabolóide com $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ Resp. -128π .

20. Seja S uma superfície fechada lisa por partes e orientada pela normal exterior $\vec{N}$ e seja R a região limitada por S . Verifique as seguintes igualdades:

- (a) volume de $R = \frac{1}{3} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$.
 (b) $\iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma = 0$, para qualquer campo $\vec{v}$ de classe C^1 numa região contendo S .

21. Calcule as seguintes integrais

- (a) $\iint_S x dy \wedge dz + y z e^{z^2} dz \wedge dx - \frac{e^{z^2}}{2} dx \wedge dy$, onde S é a parte de $z = x^2 + y^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$; Resp. $-\frac{\pi}{2}(e + 1)$.
 (b) $\iint_S (x^2 + z^3) dy \wedge dz + z^5 dz \wedge dx + (e^{x^2 + y^2} + z^2) dx \wedge dy$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ interior a $z^2 = x^2 + y^2$, orientada com a normal exterior; Resp. $\pi(e + \frac{1}{6})$.
 (c) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{F}(x, y, z) = e^{z^2} \cos(zy^2)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ e $z = y + 3$, orientada com a normal unitária exterior; Resp. 0.

- (d) $\iint_S z^2 dz \wedge dx + x^2 \ln(x^2 + y^2) dx \wedge dy$, onde S é a parte de $9 + z^2 = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 4$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$; R. $(\frac{625}{2} \ln 5 - \frac{81}{2} \ln 3 - 68)\pi$
- (e) $\iint_S \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, onde S é a parte de $(z - 3)^2 = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 3$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$; Resp. 2π
- (f) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + z\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \leq 0$; Resp. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{3} - 1)$
- (g) $\iint_S \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, onde S é o elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, orientada com a normal unitária exterior. Resp. 4π

- 22.
- (a). Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, sendo que $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(4x^2 + 9y^2 + 25z^2)^{3/2}}$ e S é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ orientada com a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$. Resp. $\frac{\pi}{15}$.
- (b). Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = \ln(2 + \cos(y + z))\vec{i} - yz\vec{j} + \frac{z^2}{2}\vec{k}$ e S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do plano $z = y + 7$. Considere S orientada com a normal que aponta para fora do cilindro. Resp. -104π
- (c). Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dv$ sendo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ e S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ entre os planos $z = -\sqrt{2}$ e $z = \sqrt{2}$ com normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N}(\sqrt{2}, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Resp. $-2\sqrt{2}\pi$

23. A integral de superfície $\iint_S \cos(\sin(z^2)) dy \wedge dz + y dz \wedge dx + x dx \wedge dy$ onde S é $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z \geq 0$ e orientada com a normal exterior é

- a) 0 b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{6} - 2\pi$ e) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi$

Resp. (c)

24. Considere o campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$. O trabalho realizado para deslocar uma partícula ao longo

de uma curva lisa e simples contida na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com ponto inicial $(2, 0, 0)$ e ponto final $(1, 1, \sqrt{2})$ é

- a) 0 b) 1 c) $\pi/4$ d) $\pi/3$ e) $\pi/2$

Resp. (a)

25. A integral de linha do campo $\vec{F}(x, y, z) = (\cos(x^4), x + \sin(y^2), \tan(z))$ sobre a curva dada pela intersecção do plano $z = 2x + 7$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy é percorrida no sentido anti-horário é

- a) 0 b) 2π c) $2\sqrt{2}\pi$ d) 4π e) 8π

Resp. (e)

26. Analise as seguintes afirmações sobre o campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$:

(I) $\text{Div}\vec{F} = 1$.

(II) $\vec{F}$ é conservativo em seu domínio.

(III) A integral de superfície de $\vec{F}$ sobre qualquer a esfera de raio a é 0.

Podemos afirmar que

a) todas as afirmações são verdadeiras.

b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

d) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Resp. (e)

27. Seja S a parte do plano $z = 2x + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Uma parametrização da superfície S é

a) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2u \cos v + 3$ com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 1]$.

b) $x = \cos v, y = \sin v, z = 2u + 3$, com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 1]$.

c) $x = u, y = v, z = 2u + 3$ com $v \in [-1, 1]$ e $u \in [-1, 1]$.

d) $x = \cos v, y = \sin v, z = u$ com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 2 \cos v + 3]$.

Resp. (a)