

Parte A: Equações Diferenciais de 1ª Ordem

- Os gráficos de duas soluções de $y' = x + y^2$ podem se cruzar num ponto (x_0, y_0) ?
- Dê as soluções das equações diferenciais de 1ª ordem abaixo, com seus domínios (máximos):

(a) $y' = y^2$

(b) $xy' = y$

(c) $yy' = x$

(d) $y' = (1 - y)(2 - y)$

(e) $(x + 3y) - x \frac{dy}{dx} = 0$

(f) $y' = 2y + e^x$
- Determine a solução de cada um dos problemas de Cauchy (ou do valor inicial):

(a) $y' = x + y, y(0) = 1$

(b) $(\cos t)x' - (\sin t)x = 1, x(2\pi) = \pi$

(c) $y' = x(1 + y), y(0) = -1$
- Dê duas soluções para cada uma das equações com a condição inicial dada:

(a) $y' = 5y^{\frac{4}{5}}, y(0) = 0$

(b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2 + 1), y(0) = 0.$
- Resolva as equações:

(a) $y' = e^{x-2y}$

(b) $x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + x^2$

(c) $y' \sin x + y \cos x = 1$

(d) $y' = x^3 - 2xy$

(e) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) \frac{dy}{dx} = 0$

(f) $(1 - xy) + (xy - x^2) \frac{dy}{dx} = 0$

(g) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

(h) $(1 + t^2)y' + ty + (1 + t^2)^{5/2} = 0$

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

(j) $(1 - xy)y' = y^2$

(k) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}, x > 0$

6. Resolva as equações:

- (a) $(x + y)dx + xdy = 0$

(b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
- (c) $\cos x dy = (1 - y - \sin x)dx$

(d) $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
- (e) $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = y \sin(xy)dx + x \sin(xy)dy$

Determine as soluções dos exercícios (a), (b) e (d) que passam pelo ponto (1,1).

7. As equações diferenciais podem sugerir mudanças de coordenadas. Por exemplo, para resolver a equação

$$(x + 2y - 1)dx + 3(x + 2y)dy = 0,$$

podemos fazer $x + 2y = v$.

Neste caso, $dx + 2dy = dv$, ou seja, $dx = dv - 2dy$. Substituindo, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} (v - 1)(dv - 2dy) + 3vdy &= 0 \\ (v - 1)dv + (v + 2)dy &= 0 \\ \frac{v - 1}{v + 2}dv + dy &= 0. \end{aligned}$$

A solução desta última é:

$$v - 3 \ln |v + 2| + y + c = 0.$$

Lembrando que $v = x + 2y$, obtemos:

$$x + 3y + C = 3 \ln |x + 2y + 2|.$$

Resolver as equações abaixo, usando uma conveniente mudança de coordenadas:

(a) $(1 + 3x \sin y)dx - x^2 \cos y dy = 0$ (sugestão $\sin y = w$)

(b) $(3x - 2y + 1)dx - (3x - 2y + 3)dy = 0$

(c) $\cos(x + y)dx = x \sin(x + y)dx + x \sin(x + y)dy$

8. Mostre que a substituição $z = ax + by + c$ transforma a equação $y' = f(ax + by + c)$ numa equação de variáveis separáveis. Aplique esse método para resolver as equações

(a) $y' = (x + y)^2$ (b) $y' = \sin^2(x - y + 1)$ (c) $(x + 2y - 1)dx + 3(x + 2y)dy = 0$.

9. **Equação diferencial de Bernoulli.** É uma equação diferencial não linear de 1ª ordem da forma

(B) $y' + p(x)y = q(x)y^n,$

onde n é uma constante real diferente de 0 e 1. Se $n = 1$, (B) é uma equação linear homogênea. Observe que $y = 0$ é sempre uma solução de (B). Para achar outras soluções, mostre que a mudança $z = y^{-n+1}$ transforma (B) na equação linear

$$z' + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x).$$

Use esse método para resolver as seguintes equações:

(a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$

(b) $y' = y + e^{-3x}y^4$

(c) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ (que também é homogênea!)

(d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$

10. **Equações de Riccati.** É uma equação diferencial de primeira ordem que é quadrática na função desconhecida, isto é

$$y' = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

onde $q_1(x) \neq 0$ e $q_3(x) \neq 0$. Se $q_1(x) = 0$, a equação se reduz a uma equação de Bernoulli e se $q_3(x) = 0$ a equação se torna linear de primeira ordem. Suponha que alguma solução particular y_1 dessa equação é conhecida. Uma solução mais geral contendo uma constante arbitrária pode ser obtida através da substituição

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação linear de primeira ordem

$$v' = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

11. Usando o método do problema anterior e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Riccati a seguir:

(a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$ e $y_1(t) = t$

(b) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$ e $y_1(t) = \frac{1}{t}$

(c) $y' = \frac{2\cos^2(t) - \sin^2(t) + y^2}{2\cos(t)}$ e $y_1(t) = \sin(t)$

12. Exercícios sobre equações diferenciais exatas e fatores integrantes.

- (a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $y^2 \sin x dx + y f(x) dy = 0$.
 - (b) A equação $g(x) dy + (y + x) dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g .
 - (c) A equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x, y) = e^{ax} \cos y$. Determine a e resolva a equação.
 - (d) Ache um fator integrante da forma $h(x, y) = x^n y^m$ para a equação $y(y^2 + 1) dx + x(y^2 - 1) \ln x dy = 0$ e resolva-a.
 - (e) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x + y^2)$ para a equação $(3x + 2y + y^2) dx + (x + 4xy + 5y^2) dy = 0$.
 - (f) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ para a equação $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$.
13. Determine uma função $y = f(x)$ definida num intervalo I cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que, para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de $y = f(x)$, $0 \leq x \leq t$, seja igual à área da região do plano determinada por todos os pontos (x, y) que satisfazem $0 \leq x \leq t$ e $0 \leq y \leq f(x)$.
14. Determine uma função $y = f(x)$ cujo gráfico passe pelo ponto $(1, 1)$ e tal que, para todo p em seu domínio, a área do triângulo com vértices $(p, 0)$, $(p, f(p))$ e M seja 1, onde M é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico em $(p, f(p))$ com o eixo x .
15. Considere um tanque usado em determinados experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta a uma concentração de 1 g/l. Para preparar o próximo experimento, o tanque tem que ser lavado com água fresca entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo à mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1% de seu valor original.
16. Na ausência de outros fatores, a população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho e dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc) comem 20.000 mosquitos/dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t .
17. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto muda a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de 200°F (cerca de 93°C) ao ser colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou para 190°F em uma sala a 70°F, determine quando o café atinge a temperatura de 150°F.

RESPOSTAS - Parte A

2. (a) $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{1}{a-x}$, $x < a$ ou $x > a$, onde $a \in \mathbb{R}$. (b) $y = ax$, $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$.
 (c) $y = \sqrt{x^2 + k}$ e $y = -\sqrt{x^2 + k}$, $x^2 > -k$ se $k < 0$, $x \in \mathbb{R}$ se $k > 0$ e $x < 0$ ou $x > 0$ se $k = 0$.
 (d) $y \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, $y \equiv 2$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{ke^x - 2}{ke^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ se $k \leq 0$ e $x < -\ln k$ ou $x > -\ln k$ se $k > 0$.
 (e) $y = ax^3 - \frac{x}{2}$, se $x \geq 0$, e $y = bx^3 - \frac{x}{2}$, se $x < 0$. (f) $y = ae^{2x} - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. (a) $y = 2e^x - x - 1$, (b) $x = \frac{t-\pi}{\cos t}$, (c) $y \equiv -1$.
4. (a) $y \equiv 0$ e $y = x^5$ (b) $y \equiv 0$ e $y = (x^3 + x)^3$.

- (a) $y = \frac{1}{2} \ln(2e^x + C), C \in \mathbb{R}$ (b) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}, C \in \mathbb{R}$
 (c) $y = \frac{x+C}{\sin x}, C \in \mathbb{R}$ (d) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}, C \in \mathbb{R}$
 (e) $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C, C \in \mathbb{R}$ (f) $y^2 - 2xy + \ln x^2 = C, C \in \mathbb{R}$
 5. (g) $\begin{cases} y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 (C \neq 0) \text{ para } x > 0 \\ y - \sqrt{x^2 + y^2} = C_1, (C_1 \neq 0) \text{ para } x < 0 \end{cases}$ (h) $y = \frac{C-15t-10t^3-3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}, C \in \mathbb{R}$
 (i) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ (j) $xy - \ln|y| = C, C \in \mathbb{R}, \text{ ou } y = 0$
 (k) $\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + \ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right| = C, C \in \mathbb{R}$
 6. (a) $x^2 + 2xy = C, C \in \mathbb{R}$ (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C, C \in \mathbb{R}$ (c) $y = \frac{x+C}{\sec x + \operatorname{tg} x}, C \in \mathbb{R}$
 (d) $y^3(x^2 - y^2) = Cx, C \in \mathbb{R}$ (e) $e^x \sin y + \cos(xy) = C, C \in \mathbb{R}$
 7. (a) $\frac{1}{x^3} \sin y + \frac{1}{4x^4} = C$ (b) $x - y - \ln|3x - 2y + 7| = C$ (c) $x \cos(x + y) = C$
 8. (a) $y = \operatorname{tg}(x + C) - x, C \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{tg}(x - y + 1) = x + C, C \in \mathbb{R}$ (c) $y - \ln|x + 2y + 2| + \frac{x}{3} = C, C \in \mathbb{R}$
 9. (a) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{1}{6x + Cxe^{-x}}, C \in \mathbb{R}$ (b) $y \equiv 0$ e $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}, C \in \mathbb{R}$ (c) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{x^3}{C-x}, C \in \mathbb{R}$
 (d) $y \equiv 0$ e $y = \frac{27x^6}{(C - \ln x^2)^3}, C \in \mathbb{R}$
 11. (a) $y = t + \frac{1}{C-t}, t \in \mathbb{R}$ (b) $y = \frac{1}{t} + \frac{2t}{C-t^2}, t \in \mathbb{R}$ (c) $y = \sin t + \frac{2}{2C \cos t - \sin t}, t \in \mathbb{R}$
 12. (a) $f(x) = C - 2 \cos x, C \in \mathbb{R}$ (b) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$ (c) $a = -1; x + e^{-x} \sin y = C, C \in \mathbb{R}$
 (d) $n = -1; m = -2; (y^2 + 1) \ln x = Cy, C \in \mathbb{R}$ e $y \equiv 0$ (e) $\mu(x + y^2) = x + y^2$ (f) $\mu = (x^2 + y^2)^{-3/2}$
 13. $y = \frac{e^{-x} + 4e^x}{4}$. 14. $y = \frac{2}{x+1}$ ou $y = \frac{2}{3-x}$
 15. $t = 100 \ln 100$ minutos.
 16. $P(t) = 201977,31 - 1977,31e^{(\ln 2)t}$ para $0 \leq t \leq 6.674$ e $P(t) = 0$ para $t \geq 6.674$ onde t é medido em semanas.
 17. $\frac{\ln(\frac{8}{13})}{\ln(\frac{12}{13})} \cong 6,065$ minutos.

Parte B: Equações Diferenciais de Ordem Superior

1. **Redução de ordem: (Variável Dependente Ausente).** Alguns tipos especiais de equações de segunda ordem podem, após uma mudança de variável, ser reduzidas a uma de primeira ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos. Se na equação diferencial y não estiver presente, fazemos a mudança $z = y'$ e assim obtemos uma equação de primeira ordem. Por exemplo, a substituição $z = y'$ reduz a equação $xy'' - y' = 3x^2$ à equação linear de primeira ordem $xz' - z = 3x^2$.

Resolva por esse método as seguintes equações:

(a) $xy'' - y' = 3x^2$ (b) $xy'' = y' + (y')^3$ (c) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ (d) $x^2y'' + xy' = 1$.

2. **Redução de ordem: (Variável Independente Ausente).** Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u , fazendo $u = y' = \frac{dy}{dx}$, e temos então que $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$ e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1a. ordem.

Exemplo: Para a equação $y'' + y = 0$ obtemos $u \frac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \frac{dy}{dx}$.

Resolva por esse método as seguintes equações:

(a) $y'' + 4y = 0$ (b) $y'' - 9y = 0$ (c) $yy'' + (y')^2 = 0$ (d) $yy'' = y^2y' + (y')^2$.

3. Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$; $y'(1) = 0$; $y(1) = 1$.

O que acontece com a solução com condições iniciais $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$?

(b) $yy'' = y^2y' + (y')^2$; $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = 1$.

4. Em cada um dos itens abaixo, verifique que a função y_1 dada é uma solução da equação dada e encontre, a partir de y_1 , outra solução y_2 da mesma equação, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente. Mostre que o conjunto obtido é linearmente independente:

(a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$;

(b) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$;

(c) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, $y_1 = x$;

(d) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$;

(e) $xy'' + 3y' = 0$, $y_1 = 1$;

(f) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, $y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \sin x$;

(g) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$, $y_1 = e^x$.

5. Determine a solução geral das equações:

(a) $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$ (b) $y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$.

6. Determine todas as soluções das equações:

(a) $y'' + 2y' + y = 0$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(c) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(d) $2y'' - 4y' + 8y = 0$

(e) $y'' - 9y' + 20y = 0$

(f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$

(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(h) $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$

(i) $\frac{d^5y}{dx^5} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0$

7. Uma equação linear da forma $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, onde α e β são constantes reais, é chamada **equação de Euler** de segunda ordem. Mostre que a mudança de variável $x = e^z$ se $x > 0$ (e $x = -e^z$ se $x < 0$) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes. Aplique esta técnica para determinar a solução geral das equações:

(a) $x^2y'' + xy' + y = 0$

(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$

(d) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$

(e) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

8. **Princípio de Superposição.** Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$ e de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$ respectivamente, mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$. Use este fato para resolver as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$ (b) $y'' + y' - 6y = \sin x + xe^{2x}$ (c) $y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$

(d) $y'' + y' - 2y = 6e^{-x} + 4$ (e) $y'' + y = \cos x + 8x^2$

9. Resolva. (a) $xy'' - y' = 3x^2$, (b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$, (c) $y''' + y' = \sec x$.

10. Determine a solução geral das seguintes equações:

- | | |
|---|--|
| (a) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ | (b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$ |
| (c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$ | (d) $y'' - 2y' = 12x - 10$ |
| (e) $y'' + y = 2 \cos x$ | (f) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$ |
| (g) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$ | (h) $y'' + 4y = 3 \sin x$ |
| (i) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ | (j) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$ |
| (k) $y'' + y' - 2y = 8 \sin x$ | (l) $y'' - 3y' = x + \cos x$ |
| (m) $\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = x^3$ | (n) $y''' - y = x^3 - 1$ |
| (o) $y'' - 2y = 2e^x (\cos x - \sin x)$ | |

11. Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretação física:

(a) Equação homogênea de mola:

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0).$$

(b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito

$$x'' + \alpha^2 x = \beta \sin(\omega t).$$

(c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta \sin(\omega t), \quad (\mu \geq 0).$$

12. Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.

(a) $y'' - xy' - y = 0$ (b) $y'' - x^2 y = 0$ (c) $y'' + 2xy' + 4y = 0$

13. Uma equação diferencial da forma $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, onde p é um número real fixado, é chamada **equação de Bessel** de ordem p .

(a) Se $p = 0$, mostre que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ e $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$ são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se $p = 1$ mostre que $y = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2! 3!} - \frac{x^6}{2^6 2! 3! 4!} + \dots\right)$ é solução.

RESPOSTAS - Parte B

- (a) $y(x) = x^3 + C_1 x^2 + C_2$ (b) $y(x) = -\frac{1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2$, ou $y = \text{cte}$

(c) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1 x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$, ou $y = \text{cte}$ (d) $y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2$
- (a) $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ (b) $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

(c) $y^2 = C_1 x + C_2$ (d) $y = C_2(C_1 + y)e^{C_1 x}$, ou $y = \text{cte}$
- (a) $y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ (c) $y_2 = C_1 x + C_2 e^x$ (e) $y_2 = C_1 + C_2 x^{-2}$ (g) $y^2 = C_1 e^x + C_2 e^x x^2$.
- (a) $y(x) = C_1 x + C_2 x \int x^{-2} e^{\int x f(x) dx} dx$ (b) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \int e^{-2x + \int f(x) dx} dx$.

(a) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ (b) $y(x) = C_2 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$
- (c) $y(x) = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$ (d) $y(x) = e^x (C_1 \sin \sqrt{3}x + C_2 \cos \sqrt{3}x)$

(e) $y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x}$ (f) $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x)$

(g) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$ (i) $y(x) = C_1 + (C_2 + C_4 x) \cos x + (C_3 + C_5 x) \sin x$

(h) $y(x) = (C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x) e^{x\sqrt{2}/2} + (C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x) e^{-x\sqrt{2}/2}$

- (a) $y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$ (b) $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$
7. (c) $y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \sin(\ln x^3)]$ (d) $y(x) = C_1 x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2 x^{-2-\frac{\sqrt{10}}{2}}$
- (e) $y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$
- (a) $y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ (b) $y(x) = -\frac{1}{50} \cos x - \frac{7}{50} \sin x + (\frac{1}{10} x^2 - \frac{1}{25} x + C_1) e^{2x} + C_2 e^{-3x}$
8. (c) $y(x) = \frac{3}{4} x + \frac{x^3}{6} + (C_2 - \frac{1}{2} x) e^{-2x} - \frac{1}{4} x^2 + C_1$ (d) $y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
- (e) $y(x) = (\frac{1}{2} x + C_1) \sin x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16$
9. (a) $A + Bx^2 + x^3$ (b) $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$
- (c) $y = A + B \sin x + C \cos x + \ln |\sec x + \tan x| + \sin x \ln |\cos x| - x \cos x.$
10. (a) $y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4} x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$
- (b) $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$
- (c) $y(x) = \frac{1}{2} x e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \ln |\cos 2x| + C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$
- (d) $y(x) = -3x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^{2x}$
- (e) $y(x) = x \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$
- (f) $y(x) = C_1 x + C_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$
- (g) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x^{-1} - 1 - x - \frac{x^2}{3}$
- (h) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$
- (i) $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1 x + C_2)$
- (j) $y(x) = e^{2x}(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} + C_1) + C_2 e^{-2x}$
- (k) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{4}{5}(3 \sin x + \cos x)$
- (l) $y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3 \sin x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$
- (m) $y(x) = C_1 + C_2 x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{20} x^5 + (C_3 + C_4 x) e^x$
- (n) $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) - x^3 - 5$
- (o) $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^x \sin x$
12. (a) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- (b) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)...4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)...5.4};$
- (c) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$