Lista Preparatória pra a P2 referente à Agenda 05

Prof. Jean Cerqueira Berni[*]

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

1 Integral de Funções Complexas

1. Calcule $\int_{\alpha} f$, onde:

1. $f(z) = z + 1$, onde
   a) α é o segmento que liga $z = 0$ a $z = 2$.
   b) o arco que liga os pontos $z = 0$ a $z = 2$ em $\text{Im}(z) \geq 0$.
2. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, onde $\alpha(t) = 2e^{it}$, $0t\pi$.
3. $f(z) = \dfrac{3}{z}$, $\alpha(t) = 3i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
4. $f(x + yi) = x^2 + iy^3$, onde α é o segmento de reta que $z = 1$ a $z = i$.
5. $f(z) = Im(z - i)$, onde α é o percurso poligonal que consiste no arco circular ao longo de $|z| = 1$ de $z = 1$ a $z = i$; e no segmento de reta que liga $z = i$ a $z = -1$.
6. $f(z) = e^z$ onde α é o percurso poligonal que consiste nos segmentos de reta de $z = 0$ a $z = 1$ e de $z = 2$ a $z = 1 + i\pi$.
7. Se γ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos 0, 1, $1 + i$, i mostre que

$$\int_{\gamma} (3z + 1)\, dz = 0.$$

2. Calcule:

*jeancb@ime.usp.br

(a) $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$, onde α é o segmento de reta entre $z_0 = i$ e $z_1 = 9$

(b) $\displaystyle\int_0^{3+i} z^2\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{i/2}^{\pi+2i} e^{\pi z}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z\,dz$

(e) $\displaystyle\int_i^{1+\pi/2i} \sinh 3z\,dz$

(f) $\displaystyle\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) dz$

3. Enuncie e prove um resultado de integração por partes para funções de variável complexa.

4. Calcular:

(a) $\displaystyle\int_\pi^i e^z \cos z\,dz$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi i} e^z z^2\,dz$

2 Fórmula Integral de Cauchy

1. Calcule, usando a fórmula integral de Cauchy:

(a) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z \cos z}{(z-i)}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z \cos z}{z^2 e^z (z-i)}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}\,dz$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2+1)}$

2. Se $C : z_0/a + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, verifique se

$$\int_C \frac{1}{az - z_0}\, dz = \frac{1}{a} 2\pi i.$$

3 Fórmula de Cauchy para Derivadas

1. Usando a expressão de $f'(z)$ dada na prova da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas, mostre que a fórmula é válida para $n = 2$, isto é,

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi.$$

2. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz, \ n \in \mathbb{Z}$

(b) $\displaystyle\int_{|z-i|=1/2} \frac{e^z \operatorname{senh}(2z + i)}{z(z-i)^2}\, dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{(z^2 + z + i)\operatorname{Log}(z+8)}{(4z - i)^3}\, dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + 1}\, dz$

(e) $\displaystyle\int_{|z-i|=3/2} \frac{1}{z^2(z^2+1)}\, dz$

(f) $\displaystyle\int_{|z|=6} \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3} \right) dz$

(g) $\displaystyle\int_{|z|=3/2} \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz$

3. Seja f uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω e seja C a circunferência $|z - z_0| = r$ contida em Ω e orientada positivamente. Se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \operatorname{tr}(C)$, mostre que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M}{r^n}.$$

4. Os resultados provados nesta seção garantem que se f for uma função diferenciável em algum domínio, então todas as derivadas, f', f'', ...existem no domínio. Mostre que na análise real este fato não é verdadeiro.

5. Determine o módulo máximo de $f(z) = 2z + 5i$ na região circular fechada definida por $|z| \leq 2$.

4 Séries de Laurent

1. Mostre que $z = 0$ é um zero de ordem 3 da função $f(z) = z\text{sen}\,(z^2)$.

2. Determine os zeros e suas ordens para a função:

(a) $f(z) = (z + 2 - i)^2$

(b) $f(z) = z^4 + z^2$

(c) $f(z) = e^{2z} - e^z$

3. Encontre a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ nos seguintes casos:

(a) $1 < |z| < 3$;

(b) $|z| > 3$;

(c) $0 < |z + 1| < 2$;

(d) $|z| < 1$.

4. Encontre a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ nos seguintes casos:

(a) $0 < |z - 1| < 2$;

(b) $0 < |z - 3| < 2$.

6. Encontre a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{z - \text{sen}\, z}{z^5}$, para $0 < |z|$.

7. Encontre a série de Laurent para $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$, para $0 < |z|$.

5 Singularidades

1. Determine a ordem dos polos das funções abaixo:

a) $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$

b) $f(z) = \tan z$

c) $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^4}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$

2. Classifique as singularidades e forneça a parte principal no ponto $z_0 = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z^2}$ b) $f(z) = z^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3}$

3. Uma função f é **meromorfa** se for holomorfa em todo um domínio Ω, exceto possivelmente por polos em Ω e o infinito é uma singularidade essencial. Mostre que a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ é meromorfa.

4. Prove que as únicas singularidades isoladas de uma função racional f são polos ou singularidades removíveis.

6 Resíduos

1. Calcule o resíduo de f em cada ponto singular:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$

(c) $f(z) = \dfrac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$

2. Usando o Teorema de Rouché, prove que: Todo polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes complexos, possui exatamente n zeros em $\mathbb{C}$.

3. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_C \tan z\, dz$, onde o caminho C é a circunferência $|z| = 2$.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}\, dz$, onde o caminho C é a circunferência $|z| = 2$.

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh} z}{z^6}\, dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z-2i|=4} \frac{z+1}{z^2(z-2i)}\, dz$.

(e) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^{z-11}}{(z-1)^3}\, dz$

(f) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\tan z}{z}\, dz$

(g) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{1/z}\, dz$