Lista 13 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Estudar as funções abaixo com relação a máximos e mínimos locais e globais:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;
(b) $f(x) = e^x - e^{-3x}$
(c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$.
(e) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$
(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(g) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ em $[0, \pi]$
(h) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

(2) Determinar os valores máximo e mínimo globais (caso existam) da função dada, no intervalo indicado:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$
(b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$
(c) $h(x) = \sin(x) - \cos(x)$ em $[0, \pi]$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2}$ em $]0, 2[$

(3) Mostre que a função:
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$
é uma função crescente de x.

(4) Qual ponto da curva dada por $y = \frac{2}{x}$, para $x > 0$, está mais próximo da origem?

(5) Seus metalúrgicos foram contratados por uma fábrica de papel para projetar um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa, e com 500m^3 de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Como engenheiro de produção, sua tarefa é determinar as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível. Que dimensões serão passadas para a oficina?

*jeancb@ime.usp.br

(6) Suponha que a qualquer momento t (em segundos) a corrente alternada i (em ampères) que percorre um circuito seja dada por $i(t) = 2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t)$. Qual é o pico de corrente que pode ocorrer nesse circuito?

(7) A resposta do corpo a uma dose de um medicamento é representada por uma equação da forma:

$$R = M^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

onde C é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento absorvida no sangue. Por exemplo, se a resposta R esperada for uma variação na pressão sanguínea, então R deve ser medido em milímetros de mercúrio; se a resposta esperada for uma variação na temperatura, R será medido em graus centígrados e assim por diante.

(a) Determine dR/dM. Esta quantidade é denominada **sensibilidade** do corpo ao medicamento.

(b) Calcule a quantidade de medicamento à qual o organismo é mais sensível determinando o valor de M que maximiza dR/dM.

(8) Quando tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre o quanto deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos.

Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo às paredes é reduzida pelo atrito, a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação:

$$v = c \cdot (r_0 - r) \cdot r^2 \text{cm/s}, \ \ \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

onde r_0 é o raio, em centímetros, da traqueia em repouso e c é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traqueia. Demonstre que v é máximo quando $r = (2/3) \cdot r_0$, ou seja, quando a traqueia está 33% contraída.[1]

(9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e seja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 seja ponto de máximo local de g. Mostrar que $x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = 0$.

(10) Um caminhoneiro percorreu 159km em duas horas, em uma estrada cujo limite de velocidade era de 65km/h e foi multado por excesso de velocidade. Por quê?

[1] O impressionante é que imagens obtidas com raios X confirmam que a traqueia se contrai exatamente assim durante a tosse!

(12) Um navio está ancorado a 9 km do ponto mais próximo da costa, que está a uma distância de 15km do acampamento, conforme ilustra a figura a seguir. Um mensageiro anda a 5 km/h e rema a 4 km/h. Em que ponto da costa o mensageiro deve desembarcar para chegar ao acampamento o mais rápido possível?