

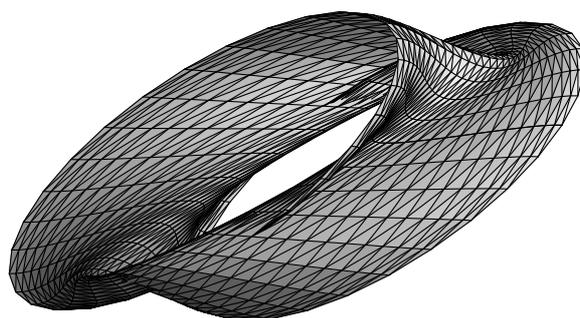
---

---

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA – BICMAT

---

---



VOLUME VIII  
OUTUBRO DE 2011  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
IGCE – RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA – BICMAT

*Comissão editorial*

Elíris Cristina Rizzioli  
Nativi Viana Pereira Bertolo  
Renata Zotin Gomes de Oliveira  
Thiago de Melo

*Editoração gráfica*

Thiago de Melo

*Realização*

Conselho de Curso de Graduação em Matemática  
Departamento de Matemática  
IGCE – Unesp – Rio Claro

## EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço [www.rc.unesp.br/igce/matematica](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica)



# SUMÁRIO

<i>O Grupo Fundamental do Círculo</i>	
Aline Cristina de Souza .....	7
<i>O Teorema do Mergulho de Whitney</i>	
Jean Cerqueira Berni .....	13
<i>A Distribuição Exponencial, Teoria da Confiabilidade e Aplicações</i>	
Lucas Carato Mazzi .....	23
<i>O Modelo de Lotka-Volterra</i>	
Mariana Marques .....	29
<i>Sobre Estabilidade de Equações Discretas</i>	
Noemi Correr Stenico .....	37
<i>O Teorema de Euler-Poincaré na Classificação dos Poliedros Regulares</i>	
Renan Eduardo Fornaziero .....	43
$\mathbb{R}$ , <i>Axiomaticamente</i>	
Valterlan Atanasio de Souza .....	51



# O Grupo Fundamental do Círculo

Aline Cristina de Souza<sup>1</sup>

Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

**Resumo:** Dado um espaço topológico  $X$  e  $x_0 \in X$ , associamos através de caminhos fechados (ou laços) em  $X$  um grupo denotado por  $\pi_1(X, x_0)$  ou  $\pi_1(X)$  (quando o espaço for conexo por caminhos) denominado **grupo fundamental de  $X$** . Neste trabalho mostraremos que o grupo fundamental do círculo,  $\pi_1(S^1)$ , é isomorfo ao grupo dos inteiros  $\mathbb{Z}$ .

**Palavras-chave:** grupo fundamental; homotopia

## 1 Definições e Resultados

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados necessários para a demonstração do teorema 12.

Em todo o texto,  $I$  denota o intervalo compacto  $[0, 1]$  e se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função e  $U$  é um subconjunto de  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  denota a imagem inversa de  $U$  por  $f$ .

Necessitaremos do

**Lema 1 (Lema da Colagem).** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados de  $X$  tais que  $A \cup B = X$ . Sejam  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  aplicações contínuas satisfazendo a condição:  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ . Então a aplicação  $h : X \rightarrow Y$  definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

*é contínua.*

**Prova:** Vamos provar que se  $F$  é um subconjunto fechado de  $Y$  então  $h^{-1}(F)$  é um subconjunto fechado de  $X$ .

Seja  $F$  um subconjunto fechado de  $Y$ . Como  $f$  e  $g$  são contínuas, então  $f^{-1}(F)$  é um fechado de  $A$  e  $g^{-1}(F)$  é um fechado de  $B$ . Daí, uma vez que por hipótese  $A$  e  $B$  são fechados de  $X$ , segue que  $f^{-1}(F)$  e  $g^{-1}(F)$  são fechados de  $X$ . Agora é fácil ver que  $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$  e portanto  $h^{-1}(F)$  é fechado de  $X$ , pois é reunião de dois fechados de  $X$ . ■

**Definição 2.** Sejam  $x_0, x_1 \in X$ . Um caminho em  $X$  com ponto inicial em  $x_0$  e ponto final em  $x_1$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ . Se  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ , dizemos que o caminho é um laço ou caminho fechado em  $X$  baseado em  $x_0$ .

Denotaremos por  $\Omega(X; x_0, x_1)$  o conjunto formado pelos caminhos em  $X$  com ponto inicial em  $x_0$  e ponto final em  $x_1$  e, por  $\Omega(X; x_0)$  o conjunto dos caminhos fechados ou laços em  $X$  baseados em  $x_0$ .

Através do conceito de caminhos, podemos definir o produto de caminhos, conforme a

---

<sup>1</sup>FAPESP

**Definição 3.** Sejam  $\alpha \in \Omega(X; x_0, x_1)$  e  $\beta \in \Omega(X; x_1, x_2)$ . O caminho produto de  $\alpha$  por  $\beta$ , denotado por  $\alpha * \beta$ , é dado por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Desde que  $\alpha$  e  $\beta$  são contínuas e para  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha(2t) = \alpha(1) = x_1 = \beta(0) = \beta(2t - 1)$ , pelo Lema da Colagem,  $\alpha * \beta$  é contínua. Além disso,  $\alpha * \beta(0) = \alpha(0) = x_0$  e  $\alpha * \beta(1) = \beta(1) = x_2$ . Portanto  $\alpha * \beta$  é um caminho ligando  $x_0$  a  $x_2$ .

## 2 Homotopia e o Grupo Fundamental

Introduziremos agora o conceito de homotopia.

**Definição 4.** Dados  $\alpha, \beta \in \Omega(X; x_0, x_1)$ , dizemos que o caminho  $\alpha$  é homotópico ao caminho  $\beta$  e denotamos  $\alpha \sim \beta$ , se existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que:  $H(t, 0) = \alpha(t)$ ;  $H(t, 1) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in I$  e  $H(0, s) = x_0$ ;  $H(1, s) = x_1$ ,  $\forall s \in I$ . A aplicação  $H$  é chamada uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\Omega(X; x_0)$ . Assim, para todo laço  $\alpha \in \Omega(X; x_0)$  podemos considerar  $[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X; x_0); \alpha \sim \beta\}$ , a classe de equivalência de  $\alpha$ . Desta forma, denotaremos por  $\pi_1(X; x_0)$  o conjunto quociente  $\frac{\Omega(X; x_0)}{\sim}$ , que nada mais é que o conjunto das classes de equivalência dos laços em  $X$  baseados em  $x_0$ , ou seja,  $\pi_1(X; x_0) = \{[\alpha], \alpha \in \Omega(X; x_0)\}$ .

Agora, neste conjunto, definiremos a operação

$$\diamond : \pi_1(X; x_0) \times \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_0)$$

induzida de  $*$  da seguinte forma: para quaisquer  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$ ,  $\diamond([\alpha], [\beta]) = [\alpha] \diamond [\beta] := [\alpha * \beta]$ . Então,  $(\pi_1(X; x_0), \diamond)$  é um grupo, denominado Grupo Fundamental de  $X$  com ponto base  $x_0$ .

Daqui para frente, omitiremos o símbolo  $\diamond$  quando tratarmos da operação em  $\pi_1(X; x_0)$  e escreveremos  $[\alpha] \diamond [\beta] := [\alpha][\beta]$ .

Através de outros conceitos, como por exemplo conexão por caminhos, podemos estabelecer uma relação interessante entre os Grupos Fundamentais de um determinado espaço topológico quando consideramos diferentes pontos base, conforme a

**Proposição 5.** Sejam  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos e  $x_0, x_1 \in X$  quaisquer. Então  $\pi_1(X; x_0)$  é isomorfo a  $\pi_1(X; x_1)$ .

**Prova:** Sendo  $X$ , por hipótese, conexo por caminhos e  $x_0, x_1 \in X$ , temos que existe um caminho  $\gamma : I \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ .

Definimos  $\gamma_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_1)$  por  $\gamma_{\#}([\beta]) = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$ .

Mostremos que a aplicação  $\gamma_{\#}$  está bem definida. Para isto, devemos mostrar que se  $[\alpha] = [\beta]$  então  $\gamma_{\#}([\alpha]) = \gamma_{\#}([\beta])$ , isto é, que  $[\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$ , ou equivalentemente, que  $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim \gamma^{-1} * \beta * \gamma$ .

Com efeito, se  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$ , são tais que  $[\alpha] = [\beta]$ , então,  $\alpha \sim \beta$ , o que implica que existe  $F : I \times I \rightarrow X$  homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é,  $F$  contínua tal que  $F(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $F(t, 1) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in I$  e  $F(0, s) = x_0 = F(1, s)$ ,  $\forall s \in I$ .

Definimos  $G : I \times I \rightarrow X$  por:  $G(t, s) = (\gamma^{-1} * F_s * \gamma)(t)$ , onde  $F_s : I \rightarrow X$ , é dado por  $F_s(t) = F(t, s)$ . Assim, para todo  $s \in I$ ,  $F_s$  é contínua,  $F_s(0) = F(0, s) = x_0$  e  $F_s(1) = F(1, s) = x_0$ . Logo  $F_s$  é um laço em  $x_0$ .

Também, a aplicação  $G$  é contínua pelo Lema da Colagem, e

$G(t, 0) = (\gamma^{-1} * F_0 * \gamma)(t) = (\gamma^{-1} * \alpha * \gamma)(t)$ , desde que  $F_0(t) = F(t, 0) = \alpha(t), \forall t \in I$  e, portanto,  $F_0 = \alpha$ ;

$G(t, 1) = (\gamma^{-1} * F_1 * \gamma)(t) = (\gamma^{-1} * \beta * \gamma)(t)$ , desde que  $F_1(t) = F(t, 1) = \beta(t), \forall t \in I$  e, portanto,  $F_1 = \beta$ ;

$G(0, s) = (\gamma^{-1} * F_s * \gamma)(0) = \gamma^{-1}(0) = x_1$  e  $G(1, s) = (\gamma^{-1} * F_s * \gamma)(1) = \gamma(1) = x_1, \forall s \in I$

Assim,  $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim \gamma^{-1} * \beta * \gamma$ , o que implica que  $\gamma_{\#}([\alpha]) = \gamma_{\#}([\beta])$  e portanto,  $\gamma_{\#}$  está bem definida.

Mostremos agora, que  $\gamma_{\#}$  é um homomorfismo.

Sejam  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$ . Devemos mostrar que:

$$\gamma_{\#}([\alpha][\beta]) = \gamma_{\#}([\alpha])\gamma_{\#}([\beta]).$$

Observemos que, se  $\gamma \in \Omega(X; x_0, x_1)$ , então  $\gamma * \gamma^{-1} \sim c_{x_0}$ , onde  $c_{x_0} : I \rightarrow X$  é dado por  $c_{x_0}(t) = x_0, \forall t \in I$ . Definamos  $H : I \times I \rightarrow X$  por

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1-s}{2}], \\ \gamma^{-1}(s), & \text{se } t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}], \\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Então,  $H$  é uma homotopia entre  $\gamma * \gamma^{-1}$  e  $c_{x_0}$ , pois desde que, para  $t = \frac{1-s}{2}$ ,  $\gamma(2t) = \gamma(1-s) = \gamma^{-1}(s)$  e, para  $t = \frac{1+s}{2}$ ,  $\gamma^{-1}(s) = \gamma^{-1}(2t-1)$ , pelo Lema da Colagem,  $H$  é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma^{-1}(0) = \gamma(1), & \text{se } t = \frac{1}{2}, \\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} & H(t, 1) &= \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t = 0, \\ \gamma^{-1}(1), & \text{se } t \in [0, 1], \\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } t = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} & &= \begin{cases} \gamma(0) = x_0, & \text{se } t = 0, \\ \gamma^{-1}(1) = x_0, & \text{se } t \in [0, 1], \\ \gamma^{-1}(1) = x_0, & \text{se } t = 1, \end{cases} \\ &= \gamma * \gamma^{-1}(t), \forall t \in I; & &= c_{x_0}(t), \forall t \in I; \end{aligned}$$

$H(0, s) = \gamma(0) = x_0$  e  $H(1, s) = \gamma^{-1}(1) = x_0, \forall s \in I$ . Assim,

$$\begin{aligned} \gamma * \gamma^{-1} \sim c_{x_0} &\implies \alpha * \gamma * \gamma^{-1} \sim \alpha * c_{x_0} \sim \alpha \implies \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta \sim \alpha * \beta \implies \\ &\alpha * \beta \sim \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta \implies \gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma \sim \gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma. \end{aligned}$$

Então,  $\gamma_{\#}([\alpha][\beta]) = \gamma_{\#}([\alpha * \beta]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma][\gamma^{-1} * \beta * \gamma] = \gamma_{\#}([\alpha])\gamma_{\#}([\beta])$ .

Finalmente, mostremos que  $\gamma_{\#}$  é bijetor.

Seja  $[\alpha] \in \pi_1(X; x_0)$  tal que  $\gamma_{\#}([\alpha]) = e_{x_1} = [c_{x_1}]$ , onde  $c_{x_1} : I \rightarrow X$  é dado por  $c_{x_1}(t) = x_1, \forall t \in I$ . Então:

$$\begin{aligned} [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] &= [c_{x_1}] \implies \gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim c_{x_1} \implies \\ \gamma * \gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} &\sim \gamma * c_{x_1} * \gamma^{-1} \implies c_{x_0} * \alpha * c_{x_0} \sim \gamma * c_{x_1} * \gamma^{-1} \implies \alpha \sim \gamma * c_{x_1} * \gamma^{-1} \implies \\ &\alpha \sim \gamma * \gamma^{-1} \implies \alpha \sim c_{x_0} \implies [\alpha] = e_{x_0} = [c_{x_0}], \end{aligned}$$

desde que  $\gamma * c_{x_1} \sim \gamma$ , pois  $K : I \times I \rightarrow X$  dada por

$$K(t, s) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{s+1}\right), & \text{se } t \in \left[0, \frac{s+1}{2}\right], \\ x_1, & \text{se } t \in \left[\frac{s+1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

é uma homotopia entre  $\gamma * c_{x_1}$  e  $\gamma$ , uma vez que  $K$  é contínua pelo Lema da Colagem e,

$$\begin{aligned} K(t, 0) &= \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ x_1, & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} & K(t, 1) &= \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [0, 1], \\ x_1, & \text{se } t = 1, \end{cases} \\ &= \gamma * c_{x_1}(t), \forall t \in I; & &= \gamma(t), \forall t \in I; \end{aligned}$$

$K(0, s) = \gamma(0) = x_0$  e  $K(1, s) = x_1, \forall s \in I$ . Portanto  $\gamma_{\#}$  é injetor.

Dado  $[\beta] \in \pi_1(X; x_1)$ , tome  $[\gamma * \beta * \gamma^{-1}] \in \pi_1(X; x_0)$ . Então  $\gamma_{\#}([\gamma * \beta * \gamma^{-1}]) = [\gamma^{-1} * \gamma * \beta * \gamma^{-1} * \gamma] = [c_{x_1} * \beta * c_{x_1}] = [\beta]$ . Assim,  $\gamma_{\#}$  é sobrejetor.

Logo  $\gamma_{\#}$  é um isomorfismo e portanto  $\pi_1(X; x_0)$  e  $\pi_1(X; x_1)$  são isomorfos. ■

### 3 O Grupo Fundamental do Círculo

Consideremos a aplicação  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por  $e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . Temos as seguintes propriedades:

- i)  $e$  é contínua, pois as funções  $\cos(2\pi t)$  e  $\sin(2\pi t)$  são contínuas.
- ii)  $e(t) = (1, 0)$  se, e somente se,  $t \in \mathbb{Z}$ .

De fato,  $e(t) = (1, 0) \iff \cos 2\pi t = 1, \sin 2\pi t = 0 \iff 2\pi t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff t = k \in \mathbb{Z}$ .

Olhemos  $\mathbb{R}$  como um grupo aditivo e  $S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = 1\}$  como um grupo multiplicativo com a operação  $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ . Então,

- iii) para quaisquer  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $e(t_1 + t_2) = e(t_1).e(t_2)$ .

De fato,

$$\begin{aligned} e(t_1 + t_2) &= (\cos 2\pi(t_1 + t_2), \sin 2\pi(t_1 + t_2)) = \\ &= (\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2 - \sin 2\pi t_1 \sin 2\pi t_2, \sin 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2 + \sin 2\pi t_2 \cos 2\pi t_1) = \\ &= (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1).( \cos 2\pi t_2, \sin 2\pi t_2) = e(t_1).e(t_2). \end{aligned}$$

**Definição 6.** Seja  $\gamma : I \rightarrow S^1$  um caminho qualquer. O caminho  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser um levantamento de  $\gamma$  à reta real  $\mathbb{R}$  se  $e \circ \bar{\gamma} = \gamma$ .

**Definição 7.** Seja  $H : I \times I \rightarrow S^1$  uma homotopia qualquer. Uma aplicação contínua  $\bar{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser um levantamento da homotopia  $H$  se  $e \circ \bar{H} = H$ .

Para a prova do Teorema 12 e da Proposição 11 necessitaremos, respectivamente, dos

**Teorema 8 (Teorema do Levantamento de Caminho).** *Seja  $\gamma : I \rightarrow S^1$  um caminho tal que  $\gamma(0) = (1, 0)$ . Então, existe um único levantamento  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\gamma$  tal que  $\bar{\gamma}(0) = 0$ .*

**Teorema 9 (Teorema do Levantamento de Homotopia).** *Seja  $F : I \times I \rightarrow S^1$  uma homotopia tal que  $F(0, 0) = (1, 0)$ . Então, existe um único levantamento  $\bar{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$  tal que  $\bar{F}(0, 0) = 0$ .*

Para uma demonstração destes teoremas veja as referências [1] ou [2].

**Definição 10.** Seja  $\gamma : I \rightarrow S^1$  um laço tal que  $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ . Definimos o grau de  $\gamma$  como sendo  $\overline{\gamma}(1)$ , onde  $\overline{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$ . Denotaremos este número,  $\overline{\gamma}(1)$ , por  $gr(\gamma)$ .

**Proposição 11.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois laços em  $S^1$  com ponto base  $(1, 0)$ . Então  $\alpha \sim \beta$  se, e somente se,  $gr(\alpha) = gr(\beta)$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $\alpha \sim \beta$ . Então existe  $F : I \times I \rightarrow S^1$  tal que  $F(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $F(t, 1) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in I$  e  $F(0, s) = F(1, s) = (1, 0)$ ,  $\forall s \in I$ .

Pelo teorema do levantamento de homotopia, temos que existe um único levantamento  $\overline{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$  tal que  $\overline{F}(0, 0) = 0$ .

Então  $e(\overline{F}(1, s)) = F(1, s) = (1, 0)$ , o que implica que  $\overline{F}(1, s) \in \mathbb{Z}$ . Mas  $\overline{F}(1, s)$  é uma aplicação contínua que tem como domínio  $I$ , um conjunto conexo e como contra-domínio  $\mathbb{Z}$ . Isto implica que  $\overline{F}(1, s)$  deve ser constante, caso contrário, teríamos que a imagem de  $I$  por  $\overline{F}(1, s)$  seria desconexo, o que é uma contradição. Logo  $\overline{F}(1, s) = k_0$ ,  $\forall s \in I$ .

Agora, temos que  $\overline{\alpha}(t) = \overline{F}(t, 0)$  e  $\overline{\beta}(t) = \overline{F}(t, 1)$  são levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, pois  $(e \circ \overline{\alpha})(t) = e(\overline{F}(t, 0)) = F(t, 0) = \alpha(t)$  e  $(e \circ \overline{\beta})(t) = e(\overline{F}(t, 1)) = F(t, 1) = \beta(t)$ .

Logo  $gr(\alpha) = \overline{\alpha}(1) = \overline{F}(1, 0) = k_0 = \overline{F}(1, 1) = \overline{\beta}(1) = gr(\beta)$ .

Reciprocamente, se  $gr(\alpha) = gr(\beta)$  então  $\overline{\alpha}(1) = \overline{\beta}(1)$ , onde  $\overline{\alpha}$  e  $\overline{\beta}$  são levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente.

Definimos  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $H(t, s) = (1-s)\overline{\alpha}(t) + s\overline{\beta}(t)$ . Então  $H$  é uma homotopia entre  $\overline{\alpha}$  e  $\overline{\beta}$  pois  $H$  é contínua e  $H(t, 0) = \overline{\alpha}(t)$ ,  $H(t, 1) = \overline{\beta}(t)$ ,  $\forall t \in I$ ,  $H(0, s) = (1-s)\overline{\alpha}(0) + s\overline{\beta}(0) = \overline{\alpha}(0) = \overline{\beta}(0) = 0$ ,  $H(1, s) = (1-s)\overline{\alpha}(1) + s\overline{\beta}(1) = \overline{\alpha}(1) = \overline{\beta}(1)$ ,  $\forall s \in I$ .

Agora, consideremos  $(e \circ H) : I \times I \rightarrow S^1$ . Esta aplicação é contínua, pois  $e$  e  $H$  são contínuas e,

$$e \circ H(t, 0) = e(\overline{\alpha}(t)) = \alpha(t), \quad e \circ H(t, 1) = e(\overline{\beta}(t)) = \beta(t), \quad \forall t \in I;$$

$$e \circ H(0, s) = e(0) = (1, 0), \quad e \circ H(1, s) = e(\overline{\alpha}(1)) = \alpha(1) = (1, 0), \quad \forall s \in I.$$

Portanto  $\alpha \sim \beta$ . ■

Como resultado principal apresentamos a prova do

**Teorema 12.** *O grupo fundamental do círculo,  $\pi_1(S^1)$ , é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .*

**Prova:** Como  $S^1$  é conexa por caminhos, sem perda de generalidade, podemos considerar  $\pi_1(S^1; (1, 0))$ .

Desta forma, definimos  $\delta : \pi_1(S^1; (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\delta([\alpha]) = gr(\alpha)$ . A proposição 11 nos garante que  $\delta$  é bem definida pois, se  $[\alpha] = [\beta]$ , então  $\alpha \sim \beta$  e portanto  $gr(\alpha) = gr(\beta)$ .

Mostremos que  $\delta$  é um homomorfismo de grupos.

De fato, sejam  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1; (1, 0))$  quaisquer e  $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$  seus respectivos levantamentos com ponto inicial 0. Temos que  $\delta([\alpha][\beta]) = \delta([\alpha * \beta])$ . Consideremos  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(t) = \begin{cases} \overline{\alpha}(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \overline{\alpha}(1) + \overline{\beta}(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Então  $g$  é contínua pois, para  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\alpha}(1) = \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(0)$ , desde que  $\bar{\beta}(0) = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} e \circ g(t) &= \begin{cases} e \circ \bar{\alpha}(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ e(\bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(2t - 1)), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} e \circ \bar{\alpha}(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ e(\bar{\alpha}(1)) \cdot e(\bar{\beta}(2t - 1)), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} e \circ \bar{\alpha}(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ e \circ \bar{\beta}(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \alpha * \beta(t), \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Portanto  $g$  é levantamento de  $\alpha * \beta$ . Assim, temos que:

$$\delta([\alpha][\beta]) = \delta([\alpha * \beta]) = gr(\alpha * \beta) = g(1) = \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(1) = \delta([\alpha]) + \delta([\beta]).$$

Logo  $\delta$  é homomorfismo.

Se  $\delta([\alpha]) = \delta([\beta])$ , então  $gr(\alpha) = gr(\beta)$ . Pela proposição 11,  $\alpha \sim \beta$ . Logo  $[\alpha] = [\beta]$  e  $\delta$  é injetora.

Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , consideremos  $\alpha : I \rightarrow S^1$  definida por:

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi nt, \text{sen } 2\pi nt).$$

Então,  $\bar{\alpha}(t) = nt$  é o levantamento de  $\alpha$ , com  $\bar{\alpha}(0) = 0$ , desde que  $e \circ \bar{\alpha}(t) = (\cos 2\pi nt, \text{sen } 2\pi nt) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in I$ .

Assim  $\delta([\alpha]) = \bar{\alpha}(1) = n$  e  $\delta$  é sobrejetora.

Portanto  $\delta$  é um isomorfismo entre  $\pi_1(S^1)$  e  $\mathbb{Z}$ . Logo  $\pi_1(S^1)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . ■

**Abstract:** Given a topological space  $X$  and  $x_0 \in X$ , we associate by means of closed paths (or loops) in  $X$  a group denoted by  $\pi_1(X, x_0)$  or  $\pi_1(X)$  (when the space is path connected) which is called **fundamental group of  $X$** . In this work we prove that the fundamental group of the circle,  $\pi_1(S^1)$ , is isomorphic to the integers group  $\mathbb{Z}$ .

**Keywords:** fundamental group; homotopy

## Referências Bibliográficas

- [1] Wall, C.T.C., *A Geometric Introduction to Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [2] Lima, E.L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. 11<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 1977.

# O Teorema do Mergulho de Whitney

Jean Cerqueira Berni<sup>1</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

**Resumo:** Neste trabalho apresentaremos e demonstraremos um dos mais famosos resultados da Teoria das Variedades Diferenciáveis, o Teorema do Mergulho de Whitney. Este teorema asserciona que uma variedade de dimensão  $k$  qualquer pode ser mergulhada em  $\mathbb{R}^{2k+1}$ . Introduziremos os conceitos necessários para isto, como o conceito de variedade, de aplicação própria e de mergulho. Além disso enunciaremos teoremas necessários para a sua prova, como o Teorema de Sard, necessário para construir as imersões injetoras e o Teorema da Partição da Unidade, imprescindível para construir aplicações próprias.

**Palavras-chave:** Variedades Diferenciáveis; Imersão Injetora; Mergulho; Teorema do Mergulho de Whitney; Fibrado Tangente; Aplicação Própria

## 1 Introdução

Uma das aplicações que podemos dar ao Teorema de Sard é uma prova do famoso **Teorema do Mergulho de Whitney**. Uma variedade  $k$ -dimensional,  $X^k$  é usualmente definida como sendo um subconjunto de algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$  que pode ser enorme ao ser comparado com  $X^k$ . Este ambiente euclidiano é bem arbitrário quando consideramos a variedade  $X^k$  como um objeto arbitrário. Por exemplo, se  $M > N$ , então  $\mathbb{R}^N$  está naturalmente mergulhado em  $\mathbb{R}^M$ , de modo que poderíamos ter construído a nossa  $k$ -variedade em  $\mathbb{R}^M$  ao invés de em  $\mathbb{R}^N$ . Hassler Whitney, ilustre matemático norte-americano, se perguntou o quão grande  $N$  precisa ser para que  $\mathbb{R}^N$  contenha uma cópia difeomorfa de toda variedade  $k$ -dimensional. Sua resposta preliminar foi que  $N = 2k + 1$  era suficiente para isto; este é o resultado que vamos provar.

## 2 Definições e Resultados Preliminares

**Definição 1.** Uma função  $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **diferenciável em  $X$**  quando existir um par  $(F, U)$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^m$  e  $F : U \supset X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^{(\infty)}$  que satisfaz:

$$F \Big|_{X \cap U} \equiv f.$$

**Definição 2.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto qualquer. Uma **parametrização para  $U$**  é um par  $(\phi, \tilde{U})$ , onde  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$  é um aberto e  $\phi : \tilde{U} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$  é tal que  $\phi : \tilde{U} \rightarrow \phi(\tilde{U}) = U$  é um difeomorfismo de classe  $C^{(\infty)}$ . Ao difeomorfismo inverso,  $\varphi = \phi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ , denominamos uma **carta para  $U$** , ou um **sistema de coordenadas para  $U$** .

**Definição 3.** Seja  $X$  um subconjunto de algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$ . Então  $X$  é uma **variedade  $k$ -dimensional** se para cada  $x \in X$  existir uma vizinhança  $V \ni x$  que admite uma parametrização,  $(\phi, \tilde{V})$ , com  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ . *Notação:*  $X^k$ .

---

<sup>1</sup>Fapesp - Processo 2010/20265-0

**Definição 4.** Definimos o **espaço tangente** de  $X^k$  em  $x$  como sendo a imagem da aplicação  $D\phi_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ , i.e.,

$$D\phi_0(\mathbb{R}^k) \doteq T_x X^k.$$

**Definição 5.** Sejam  $X^k$  e  $Y^\ell$  variedades, e  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  quando vista de  $\mathbb{R}^k$  em  $\mathbb{R}^\ell$ . Dado  $x \in X^k$ , definimos a derivada de  $f$  em  $x$ ,  $Df_x$ , da seguinte maneira.

Suponha que  $(\phi, \tilde{U})$  parametrize uma vizinhança  $U \subset X$  de  $x$ , e que  $(\psi, \tilde{V})$  parametrize uma vizinhança  $V \subset Y$  de  $y = f(x)$ , tal que  $f(U) \subset V$ , com  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$  e  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^\ell$  abertos,  $\phi(0) = x$  e  $\psi(0) = y = f(x)$ . Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^k & \xrightarrow{f} & Y^\ell \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \tilde{U} & \xrightarrow{h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi} & \tilde{V} \end{array}$$

Sabemos computar  $D\phi_0$ ,  $D\psi_0$  e  $Dh_0$ , a última pela **Regra da Cadeia para Espaços Euclidianos**, que conhecemos da Análise. Por meio desta, ao tomar derivadas, obtemos o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} T_x X^k & \xrightarrow{Df_x} & T_y Y^\ell \\ D\phi_0 \uparrow & & \uparrow D\psi_0 \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{Dh_0} & \mathbb{R}^\ell \end{array}$$

Como  $D\phi_0$  é um isomorfismo, este admite inverso, de modo que podemos definir  $Df_x$  do seguinte modo:

$$Df_x := D\psi_0 \circ Dh_0 \circ D\phi_0^{-1}.$$

**Teorema 6 (Regra da Cadeia Generalizada para Variedades).** Se  $X^k \xrightarrow{f} Y^\ell \xrightarrow{g} Z^m$  são aplicações suaves entre variedades, então vale:

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x.$$

**Definição 7.** Uma **imersão** em  $x \in X^k$  é uma aplicação entre variedades, diferenciável em  $x$ , cuja aplicação derivada neste ponto é injetora. Explicitamente,  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  é uma imersão em  $x$  se:

$$Df_x : T_x X^k \rightarrow T_{f(x)} Y^\ell$$

é uma aplicação injetora. Se  $f$  for uma imersão em todo ponto  $x \in X$ , dizemos simplesmente que  $f$  é uma **imersão**.

**Definição 8.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é **própria** se a pré-imagem de todo conjunto compacto em  $Y$  é um conjunto compacto em  $X$ . Assim,  $f : X \rightarrow Y$  é própria se, dado  $K \subset Y$  compacto, então  $f^{-1}(K)$  é compacto de  $X$ .

**Definição 9.** Um mergulho é uma imersão injetiva e própria.

**Definição 10.** Seja  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  uma aplicação suave entre variedades. Um ponto  $y \in Y^\ell$  é um **valor regular** de  $f$  se, para todo  $x \in f^{-1}(\{y\})$ ,  $Df_x$  é sobrejetora. Observe que caso  $y \notin \text{Im}(f)$ , este se caracteriza como valor regular por vacuidade.

**Teorema 11 (Teorema de Sard).** Se  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  é uma aplicação suave de variedades, então todos os pontos de  $Y^\ell$ , a menos de um conjunto de medida nula, são valores regulares de  $f$ .

Um objeto útil na prova do Teorema de Whitney é o **fibrado tangente** de uma variedade  $X^k$  em  $\mathbb{R}^N$ . Os espaços tangentes a  $X^k$  em vários pontos são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^N$  que geralmente se justapõem uns aos outros. O *fibrado tangente* é um artifício para desemaranhá-los.

**Definição 12.** Seja  $X^k$  uma variedade de  $\mathbb{R}^N$ . O fibrado tangente de  $X^k$ ,  $T(X^k)$ , é a reunião disjunta de todos os espaços tangentes a  $X^k$ , *i.e.*,

$$T(X^k) = \bigcup_{x \in X} T_x(X) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x(X) = \{(x, v) \in X^k \times \mathbb{R}^N; v \in T_x(X)\}.$$

$T(X^k)$  contém uma cópia natural de  $X^k$ , consistindo do conjunto dos pontos  $\{(x, 0); x \in X^k\}$ . Na direção perpendicular a  $(x, 0)$ , ele contém cópias de cada espaço tangente  $T_x X^k$ , mergulhados como conjuntos da forma:

$$\{(x, v); x \text{ está fixado}\}.$$

Qualquer aplicação suave  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  induz uma *aplicação derivada* global,

$$Df : \begin{array}{ccc} T(X^k) & \longrightarrow & T(Y^\ell) \\ (x, v) & \longmapsto & (f(x), Df_x(v)). \end{array}$$

Note que  $T(X^k)$  é um subconjunto do espaço euclidiano, *i.e.*,  $X^k \subset \mathbb{R}^N$  de modo que  $T(X^k) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ . Portanto, se  $Y^\ell \subset \mathbb{R}^M$ , então  $Df$  aplica um subconjunto de  $\mathbb{R}^{2N}$  em  $\mathbb{R}^{2M}$ . Mostraremos que  $Df$  é suave.

**Proposição 13.** Seja  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  uma aplicação suave. Então a aplicação derivada global definida por:

$$Df : \begin{array}{ccc} T(X^k) & \longrightarrow & T(Y^\ell) \\ (x, v) & \longmapsto & (f(x), Df_x(v)) \end{array}$$

é uma aplicação suave.

**Prova:** Como  $f : X^k \rightarrow \mathbb{R}^M$  é suave, dado um ponto  $x \in X^k$  qualquer, ela se estende em torno dele a uma aplicação suave  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ , segundo a **Definição 1**, com  $U \subset \mathbb{R}^N$  aberto. Então:

$$DF : T(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2M}$$

estende localmente  $Df$ . Mas  $T(U) = U \times \mathbb{R}^N$ , um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^{2N}$  e como  $DF$  é uma aplicação deste conjunto aberto, com certeza é suave pela **Definição 1**.

Isto mostra que:

$$Df : T(X^k) \rightarrow \mathbb{R}^{2M}$$

pode ser localmente estendida em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2N}$ , a saber  $U \times \mathbb{R}^N$ , o que quer dizer que existe um par  $(DF, U \times \mathbb{R}^N)$  que estende  $Df$  em cada vizinhança de  $x \in X^k$ . Pela **Definição 1**,  $Df$  é uma aplicação suave. ■

**Definição 14.** Duas variedades  $X^k$  e  $Y^\ell$  são difeomorfas quando existe um difeomorfismo entre elas.

**Teorema 15.** *Se  $X^k$  e  $Y^\ell$  forem variedades difeomorfas, então  $T(X^k)$  e  $T(Y^\ell)$  também são difeomorfos. Sucintamente: “variedades difeomorfas têm fibrados tangentes difeomorfos.”*

**Prova:** Se  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  é um difeomorfismo, então:

$$Df : T(X^k) \rightarrow T(Y^\ell) \quad Df \in C^{(\infty)}$$

também é. Com efeito, como  $f \in C^{(\infty)}$ , então  $Df \in C^{(\infty)}$ . Mostraremos que  $Df$  é bijetora e admite inversa suave.

Como:

$$f \circ f^{-1} = id_{Y^\ell} : Y^\ell \rightarrow Y^\ell \quad \text{e} \quad f^{-1} \circ f = id_{X^k} : X^k \rightarrow X^k$$

tomando a derivada em ambos os membros da primeira destas equações, temos que:

$$Df \circ Df^{-1} = Id_{T(Y^\ell)} : T(Y^\ell) \rightarrow T(Y^\ell)$$

ou seja,  $Df$  admite inversa à direita. Ademais, tomando a derivada em ambos os membros da segunda destas equações, temos que:

$$Df^{-1} \circ Df = Id_{T(X^k)} : T(X^k) \rightarrow T(X^k)$$

ou seja,  $Df$  admite inversa à esquerda.

Assim  $Df$  admite uma inversa, a saber,  $Df^{-1}$ . Como  $f^{-1}$  é suave devido ao fato de  $f$  ser difeomorfismo, segue que  $Df^{-1}$  é suave.

Logo, por definição,  $Df$  é um difeomorfismo entre  $T(X^k)$  e  $T(Y^\ell)$  pois é bijetora, suave e tem inversa suave. ■

Como um resultado,  $T(X^k)$  é um objeto intrinsecamente associado a  $X^k$ , ou seja, ele não depende do espaço euclidiano circundante, mas tão somente da variedade  $X^k$ .

**Proposição 16.** *O fibrado tangente de uma variedade é também uma variedade, e ainda:*

$$\dim T(X^k) = 2 \dim X^k.$$

**Prova:** Se  $W$  é um subconjunto aberto de  $X^k$ , e portanto também uma subvariedade, então  $T(W)$  é o subconjunto:

$$T(X^k) \cap (W \times \mathbb{R}^N) \subset T(X^k).$$

Como  $W \times \mathbb{R}^N$  é aberto em  $X^k \times \mathbb{R}^n$ ,  $T(W)$  é aberto na topologia de  $T(X^k)$  por ser interseção de um aberto de  $X^k$  com  $T(X^k)$ . Agora, como  $X^k$  é uma variedade, podemos tomar  $W$  parametrizável, ou seja é a imagem de uma parametrização. Isto quer dizer que existe uma  $(\phi, \tilde{W})$ , com  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^k$  aberto e:

$$\phi : \tilde{W} \rightarrow W = \phi(\tilde{W})$$

difeomorfismo. Então:

$$D\phi : T(\tilde{W}) \rightarrow T(W)$$

é um difeomorfismo pelo **Teorema 15**. Mas  $T(\tilde{W}) = \tilde{W} \times \mathbb{R}^k$  é subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2k}$ , então  $D\phi$  serve para parametrizar o conjunto aberto  $T(W) \subset T(X^k)$ .

Assim, dado um elemento qualquer  $(x, v) \in T(X^k)$ , como  $X^k$  é variedade,  $x$  admite uma vizinhança  $W \ni x$  parametrizável por  $(\phi, \tilde{W})$ , com  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^k$ . Tome para vizinhança de  $(x, v)$  em  $T(X^k)$  o conjunto  $T(W)$ . Temos que  $T(W)$  é aberto e que  $(x, v) \in T(W)$ . Podemos parametrizar  $T(W)$ , por sua vez, pelo par  $(D\phi, \tilde{W} \times \mathbb{R}^k)$ , onde  $\tilde{W} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{2k}$  é aberto. Segue-se que  $T(X^k)$  é variedade e tem dimensão igual ao dobro da dimensão de  $X^k$ , ou seja:

$$\dim T(X^k) = 2 \dim X^k.$$

■

**Definição 17.** Um conjunto que satisfaz uma propriedade a menos de um conjunto de medida nula é dito satisfazer aquela propriedade para quase todo ponto.

O teorema a seguir é imprescindível para a demonstração do **Teorema do Mergulho de Whitney**:

**Teorema 18.** Toda  $k$ -variedade admite uma imersão injetora em  $\mathbb{R}^{2k+1}$ .

**Prova:** Analisemos dois casos:

CASO 1: Se  $X^k \subset \mathbb{R}^N$  é  $k$ -dimensional e  $N > 2k + 1$ . Neste caso, mostraremos que  $X^k$  já está mergulhado em  $\mathbb{R}^{2k+1}$  por produzir uma *projeção linear*  $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  que se restringe a uma imersão injetora de  $X^k$ , i.e., uma projeção tal que:

$$\pi \Big|_{X^k} = \pi \circ \iota : X^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$$

é uma imersão injetora.

CASO 2: Se  $X^k \subset \mathbb{R}^N$  é  $k$ -dimensional e  $k \leq N \leq 2k + 1$ . Procedendo indutivamente, provaremos que se  $\pi : X^k \rightarrow \mathbb{R}^M$  é uma imersão injetora com  $M > 2k + 1$ , então existe um vetor unitário  $a \in \mathbb{R}^M$  tal que a composição de  $f$  com a projeção levando  $\mathbb{R}^M$  sobre o complemento ortogonal de  $a$  é ainda uma imersão injetiva. Agora, o complemento:

$$H = [\{a\}]^\perp = \{b \in \mathbb{R}^M : b \perp a\}$$

é um subespaço vetorial  $(M - 1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^M$ , portanto, isomorfo a  $\mathbb{R}^{M-1}$ ; logo, obteremos uma imersão injetora em  $\mathbb{R}^{M-1}$ .

Façamos isto.

Defina uma aplicação:

$$h : \begin{array}{ccc} X^k \times X^k \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ (x, y, t) & \longmapsto & t(f(x) - f(y)). \end{array}$$

Também defina a aplicação:

$$g : \begin{array}{ccc} T(X^k) & \longmapsto & \mathbb{R}^M \\ (x, v) & \longmapsto & Df_x(v). \end{array}$$

Como  $M > 2k + 1$ , o **Teorema de Sard** implica que existe um ponto  $a \in \mathbb{R}^M$  que é valor regular de  $h$  e valor regular de  $g$ . Tome um  $a$  que não seja imagem de nenhum ponto, ou seja,  $\exists a \in \mathbb{R}^M$  tal que

$a \notin \text{Im}(h) \cap \text{Im}(g)$ . Note que  $a \neq 0$ , já que 0 pertence às duas imagens. Basta tomar, por exemplo,  $(x, x, t) \in X^k \times X^k \times \mathbb{R}$  e teremos  $h(x, x, t) = 0$ , e para  $g$  basta tomar o par  $(x, 0)$ , e teremos  $g(x, 0) = 0$ .

Seja  $\pi$  a projeção de  $\mathbb{R}^M$  sobre o complemento ortogonal  $H$  de  $a$ , ou seja:

$$\pi : \mathbb{R}^M \longrightarrow [\{a\}]^\perp.$$

Considere agora  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$ . Mostraremos que, a menos de um isomorfismo, esta é a imersão injetora procurada.

(i)  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$  é uma aplicação injetora.

De fato, sejam  $x, y \in X^k$  tais que  $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$ . Então:

$$\pi(f(x) - f(y)) = 0$$

ou seja,  $f(x) - f(y)$  não tem componentes em  $H = [\{a\}]^\perp$ . Como  $f(x) - f(y) \in \mathbb{R}^M = [\{a\}] \oplus [\{a\}]^\perp$ . Então  $f(x) - f(y) \in [\{a\}]$ . Isto quer dizer que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) - f(y) = t \cdot a$ . Se por acaso tivéssemos  $x \neq y$ , então teríamos  $t \neq 0$ , pois  $f$  é injetora. Mas, então teríamos  $h(x, y, \frac{1}{t}) = a$ , contradizendo a escolha de  $a$ . Concluimos com isto que  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$  é uma aplicação injetora.

(ii)  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$  é uma imersão.

Mostraremos isto por absurdo. Suponha que exista  $v \in T_x X^k$ ,  $v \neq 0$  tal que  $D(\pi \circ f)_x \cdot v \equiv 0$ . Como  $\pi$  é linear, da **Regra da Cadeia** tiramos:

$$D(\pi \circ f)_x = \pi \circ Df_x.$$

Logo,  $\pi \circ Df_x(v) = 0$ , de modo que  $Df_x \cdot v$  não tem componentes em  $[\{a\}]^\perp$ . Logo, como  $Df_x \cdot v \in \mathbb{R}^M = [\{a\}] \oplus [\{a\}]^\perp$ , segue-se que  $Df_x \cdot v \in [\{a\}]$ . Assim, existe um escalar  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $Df_x \cdot v = t \cdot a$  com  $f$  imersão. Isto quer dizer que  $Df_x \cdot v \neq 0$ , ou seja,  $t \neq 0$ . Mas, então teríamos  $g(x, \frac{1}{t}) = a$ , de novo contrariando a escolha de  $a$ . Concluimos que  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$  é uma imersão.

Deste modo, por (i) e (ii),  $\pi \circ f : X^k \rightarrow H$  é uma imersão injetora de  $X^k$  em um espaço vetorial isomorfo a  $\mathbb{R}^{M-1}$ .

Se  $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}^{M-1}$  é o isomorfismo, temos que  $\phi \circ \pi \circ f : X^k \rightarrow \mathbb{R}^{M-1}$  é uma imersão injetora própria. ■

Para variedades compactas, imersões injetoras  $f : X^k \rightarrow Y^\ell$  são o mesmo que mergulhos. De fato, sendo  $f$  suave, a pré-imagem de qualquer compacto  $K \subset Y^\ell$  é fechada (pela continuidade de  $f$ ) e limitada (pela compacidade de  $X^k$ ), logo  $f$  é própria. Ademais  $f$  é imersão injetora, de modo que nós provamos o **Teorema do Mergulho** para o caso em que  $X^k$  é compacto.

**Teorema 19 (Partição da Unidade).** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto arbitrário. Para qualquer cobertura de  $X$  por abertos (relativos)  $\{U_\alpha\}_\alpha$  existe uma sequência de funções suaves,  $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $X$  chamada **partição da unidade** subordinada à cobertura  $\{U_\alpha\}_\alpha$  com as seguintes propriedades:*

- (a)  $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$  para todo  $x \in X$  e todo  $i \in \mathbb{N}$ ;
- (b) Cada  $x \in X$  admite uma vizinhança na qual um número finito de funções  $\theta_i$  não é identicamente nula, i.e., existe uma vizinhança de  $x$  em  $X$  onde a sequência  $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é identicamente nula a menos de um número finito de índices;

(c) Cada função  $\theta_i$  tem suporte compacto;

(d) Para cada  $x \in X$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x) = 1.$$

(observe que, de acordo com o item (b), esta soma é sempre finita.)

**Corolário 20.** Em qualquer variedade  $X^k$  podemos definir uma aplicação própria  $\rho : X^k \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Prova:** Seja  $\{U_\alpha\}$  a coleção de subconjuntos abertos de  $X^k$  que têm fechos compactos, e seja  $\theta_i$  a partição da unidade subordinada. Então:

$$\begin{aligned} \rho : X^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \rho(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i(x) \end{aligned}$$

é uma função suave bem definida. Se  $\rho(x) \leq j$ , então, obviamente pelo menos uma dentre as  $j$  funções  $\theta_1, \dots, \theta_j$  deve ser não nula em  $x$ . Portanto  $\rho^{-1}([-j, j])$  está contido em

$$\bigcup_{i=1}^j \{x | \theta_i(x) \neq 0\}$$

um conjunto com fecho compacto, devido ao item (c) do **Teorema da Partição da Unidade**, e assim é limitado. Mas todo conjunto compacto em  $\mathbb{R}$  está contido em algum intervalo  $[-j, j]$  para  $j$  suficientemente grande, posto que compacidade em  $\mathbb{R}$  é sinônimo de fechado e limitado. Logo, fazemos assim:

Seja  $K \subset \mathbb{R}$  um conjunto compacto. Então existe um natural  $j \in \mathbb{N}$  suficientemente grande para o qual  $K \subset [-j, j]$ . Pelo acima, provamos que  $\rho^{-1}([-j, j])$  é compacto, logo, limitado. Sendo  $\rho$  uma aplicação contínua,  $\rho^{-1}(K)$  é fechado. Ademais,  $\rho^{-1}(K) \subset \rho^{-1}([-j, j])$  é limitado. Portanto,  $\rho^{-1}(K)$  é compacto. Assim concluímos que  $\rho$  é uma aplicação própria. ■

### 3 O Teorema do Mergulho de Whitney e sua Demonstração

**Teorema 21 (Teorema de Whitney).** Toda  $k$ -variedade pode ser mergulhada em  $\mathbb{R}^{2k+1}$ .

**Prova:** Tome uma imersão injetora de  $X^k$  em  $\mathbb{R}^{2k+1}$ ,  $\varphi : X^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  garantida pelo **Teorema 18**. Composto com qualquer difeomorfismo de  $\mathbb{R}^{2k+1}$  em  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ , digamos:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^{2k+1} &\longmapsto B(0, 1) \\ z &\longmapsto \frac{z}{1 + \|z\|^2} \end{aligned}$$

obtemos uma imersão injetora  $f = \delta \circ \varphi : X^k \rightarrow B(0, 1)$ , ou seja, tal que  $|f(x)| = |\delta \circ \varphi(x)| < 1$  para todo  $x \in X^k$ .

Seja  $\rho : X^k \rightarrow \mathbb{R}$  uma função própria garantida pelo **Corolário 20**, e defina uma nova imersão injetora:

$$\begin{aligned} F : X^k &\longrightarrow \mathbb{R}^{2k+2} \\ x &\longmapsto F(x) = (f(x), \rho(x)). \end{aligned}$$

Agora cairemos no teorema para  $\mathbb{R}^{2k+1}$  se compusermos  $F$  com uma projeção ortogonal:

$$\pi : \mathbb{R}^{2k+2} \rightarrow H = [\{a\}]^\perp$$

onde  $H$  é o espaço vetorial perpendicular a um vetor unitário adequado  $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$ , que escolheremos posteriormente. Como no teorema anterior, podemos escolher quase que qualquer ponto do contradomínio para esta construção, pois pelo **Teorema de Sard**, quase todo ponto do contradomínio é valor regular de  $F$ .

Mostraremos que a aplicação  $\pi \circ F : X^k \rightarrow H$  é, a menos de um isomorfismo, o mergulho procurado.

A aplicação:

$$\pi \circ F : X^k \rightarrow H$$

é uma imersão injetora para quase todo  $a \in S^{2k+1}$  devido ao **Teorema de Sard**, pois  $F : X^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k+2}$  é uma imersão para quase todo  $a \in S^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2}$ .

Assim, podemos tomar um  $a$  que não pertence a nenhum dos polos desta esfera, ou seja  $a \neq (0, \dots, 0, \pm 1)$ .

Provaremos que  $\pi \circ F$  é uma aplicação própria por absurdo.

**Afirmção:** Dada qualquer cota  $c$ , afirmamos que existe outro número  $d$  tal que o conjunto de pontos em  $X^k$  tal que  $|\pi \circ F(x)| \leq c$  está contido no conjunto dos pontos onde  $|\rho(x)| \leq d$ .

Mostraremos que se esta afirmação for falsa,  $a$  será um dos polos da esfera, o que contrariará a sua escolha.

Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe uma sequência de pontos  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $X^k$  para a qual  $|\pi \circ F(x_i)| \leq c$  mas  $\rho(x_i) \rightarrow \infty$ .

Lembremos que, por definição, para todo  $z \in \mathbb{R}^{2k+2}$ , o vetor  $\pi(z)$  é aquele ponto em  $H$  tal que  $z - \pi(z)$  é múltiplo de  $a$ . Então  $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$  é um múltiplo de  $a$  para cada  $i$ , e logo o vetor:

$$w_i = \frac{1}{\rho(x_i)} [F(x_i) - \pi \circ F(x_i)]$$

também é.

Considere o que acontece conforme  $i \rightarrow \infty$ :

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left( \frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1 \right) \rightarrow (0, \dots, 0, 1)$$

porque  $|f(x_i)| < 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . O quociente:

$$\frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)}$$

tem norma menor ou igual a  $\frac{c}{\rho(x_i)}$ , então converge para zero. Portanto,  $w_i \rightarrow (0, \dots, 0, 1)$ . Mas cada  $w_i$  é um múltiplo de  $a$ ; logo, por continuidade,  $(0, \dots, 0, 1)$  também é múltiplo de  $a \in S^{2k+1}$ . Concluimos que  $a$  deve ser ou o polo norte ou o polo sul de  $S^{2k+1}$ , o que é um absurdo pois contraria a escolha de  $a$ .

A afirmação, portanto, é verdadeira.

Consequentemente, a pré-imagem sob  $\pi \circ F$  de toda bola fechada em  $H$  é subconjunto compacto de  $X^k$ , de modo que  $\pi \circ F$  é própria. Logo  $\pi \circ F$  é o mergulho procurado, a menos de um isomorfismo.

Logo, qualquer  $k$ -variedade pode ser imersa em  $\mathbb{R}^{2k+1}$ . ■

**Agradecimentos:** À minha orientadora, a Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli, pelo apoio e revisão científica deste artigo, e toda a sua ajuda durante a sua elaboração.

**Abstract:** In this paper we shall present and prove one of the most important results of the Differentiable Manifolds Theory, Whitney's Embedding Theorem. This theorem asserts that a  $k$ -dimensional manifold can be embedded into the space  $\mathbb{R}^{2k+1}$ . We also shall introduce the necessary concepts to do this, as, e.g., the differentiable manifold concept, the proper application concept and the notion of an embedding. Herewith we enunciate necessary theorems for its demonstration, as the Sard's Theorem on proving the existence of one-to-one immersions and the Partition of Unity Theorem needful for proving the existence of proper applications.

**Keywords:** Differentiable Manifolds; One-to-one Immersion; Embedding; Whitney's Embedding Theorem; Tangent Bundle; Proper Application

## Referências Bibliográficas

- [1] Guillemin V.; Pollack A., *Differential Topology*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc. 1974. 222p.



# A Distribuição Exponencial, Teoria da Confiabilidade e Aplicações

Lucas Carato Mazzi<sup>1</sup>

Orientador(a): Prof. Dr. José Silvio Govone

**Resumo:** A Distribuição Exponencial desempenha importante papel na estatística. Devido sua propriedade de falta de memória, é um modelo de distribuição de probabilidade muito usado na descrição de uma grande classe de fenômenos e nos assuntos da teoria da confiabilidade, assim como em problemas de tempo de espera.

**Palavras-chave:** Distribuição Exponencial; Teoria da Confiabilidade

## 1 Distribuição Exponencial

**Definição 1.** Uma variável aleatória contínua  $X$ , que tem todos os valores não-negativos, terá uma distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha > 0$ , se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

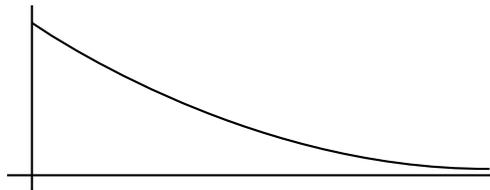


Figura 1.1: Dist. Exponencial

Note que  $f$  é uma fdp:

- $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \geq 0, \quad \forall x > 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{e^{\alpha x}} \Big|_0^{\infty} = 1$

### 1.1 Propriedades da Distribuição Exponencial

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro  $\alpha > 0$  (notação  $X \sim E(\alpha)$ ).

1. A função de distribuição acumulada crescente  $F$  de  $X$  é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

2. O valor esperado de  $X$  é:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}.$$

---

<sup>1</sup>Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - SESu/MEC

De fato, sabemos que  $E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx$ , então

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = (-xe^{-\alpha x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

3. A variância de  $X$  é:

$$V(X) = E(X^2) + [E(X)]^2$$

Calculemos  $E(X^2)$ .

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2}.$$

Logo, temos que:

$$V(X) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

4. Uma propriedade importante da distribuição exponencial é a falta de memória, ou seja,

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t).$$

De fato,

$$\begin{aligned} P(X > t + s | X > s) &= \frac{P(X > t + s; X > s)}{P(X > s)} = \\ &= \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{\int_{t+s}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx}{\int_s^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t} = P(X > t). \end{aligned}$$

## 2 Aplicações

1. *O intervalo de tempo, em minutos, entre as emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição exponencial,  $X \sim E(0, 2)$ . Qual a probabilidade de haver emissão em um intervalo inferior a 2 minutos?*

$$P(X < 2) = \int_0^2 \beta e^{-\beta x} dx, \quad \beta = 0, 2.$$

Portanto,

$$P(X < 2) = \int_0^2 0,2 e^{-0,2x} dx = 1 - e^{-0,4}.$$

*Qual a probabilidade de que o intervalo seja superior a 7 minutos, sabendo que ele é superior a 5 minutos?*

$$P(X > 7 | X > 5) = P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = e^{-0,4}.$$

2. *Suponhamos que a duração da vida  $T$ , em horas, de determinada válvula eletrônica seja uma variável aleatória com distribuição exponencial, com parâmetro  $\beta$ . Ou seja,*

$$f(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t}, & t > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

*Uma máquina que emprega esta válvula custa  $C_1$  dólares/hora de funcionamento. Enquanto a máquina está funcionando, um lucro de  $C_2$  dólares é obtido. Um operador deve ser contratado para um número de*

horas pré-fixado,  $H$ , e recebe um pagamento de  $C_3$  dólares/hora. Para qual valor de  $H$ , o lucro esperado será máximo?

Inicialmente, obteremos uma expressão para o lucro  $L$ ,

$$L(T) = \begin{cases} C_2H - C_1H - C_3H, & T > H \\ C_2T - C_1T - C_3H, & T \leq H \end{cases}$$

Note que  $L$  é uma variável aleatória, pois é função de  $T$ . Calculemos, então, o valor esperado do lucro  $L$ .

$$\begin{aligned} E(L) &= H(C_2 - C_1 - C_3)P(T > H) - C_3HP(T \leq H) + (C_2 - C_1) \int_0^H t\beta e^{-\beta t} dt = \\ &= H(C_2 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} - C_3H(1 - e^{-\beta H}) + (C_2 - C_1)[\beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)] = \\ &= (C_2 - C_1)[He^{-\beta H} + \beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)] - C_3H = \\ &= (C_2 - C_1)[\beta^{-1} - \beta^{-1}e^{-\beta H}] - C_3H. \end{aligned}$$

A fim de obtermos o valor máximo de  $E(L)$ , derivaremos em relação a  $H$  e igualaremos tal derivada a zero. Sendo assim, teremos:

$$\frac{dE(L)}{dH} = (C_2 - C_1)e^{-\beta H} - C_3$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(L)}{dH} = 0 &\Leftrightarrow (C_2 - C_1)e^{-\beta H} - C_3 = 0 \Leftrightarrow (C_2 - C_1)e^{-\beta H} = C_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-\beta H} = \frac{C_3}{C_2 - C_1} \Leftrightarrow \ln e^{-\beta H} = \ln \left( \frac{C_3}{C_2 - C_1} \right) \Leftrightarrow -\beta H = \ln \left( \frac{C_3}{C_2 - C_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$H = -\beta^{-1} \ln \left( \frac{C_3}{C_2 - C_1} \right).$$

A fim de que a solução acima tenha significado, devemos ter  $H > 0$ , o que ocorre se, e somente se,

$$0 < \frac{C_3}{C_2 - C_1} < 1.$$

O que implica

$$(C_2 - C_1) > 0 \quad \text{e} \quad (C_2 - C_1 - C_3) > 0.$$

No entanto, a última condição exige apenas que os dados de custo sejam de tal magnitude que um lucro possa ser auferido.

*Suponha, em particular, que  $\beta = 0,01$ ,  $C_1 = \text{R\$ } 3,00$ ,  $C_2 = \text{R\$ } 10,00$  e  $C_3 = \text{R\$ } 4,00$ .*

Neste caso,  $H = -100 \ln \left( \frac{4}{7} \right) = 55,9$  horas  $\cong 56$  horas. Portanto, o operador deve ser contratado para 56 horas, de modo a alcançar o máximo lucro.

### 3 Teoria da Confiabilidade

Suponha que estejamos considerando um componente, o qual é submetido a alguma espécie de “esforço”. Isto pode constituir uma viga sob uma carga, um dispositivo eletrônico posto em serviço. Suponha que, para cada um destes componentes, um estado que denotaremos como “falha” possa ser definido. Dessa forma, a viga de aço pode romper-se ou quebrar, ou o dispositivo eletrônico pode deixar de funcionar.

Se esse componente for posto sob condições de esforço, em algum instante especificado, digamos  $t = 0$ , e observado até que falhe, a *duração até falhar ou duração de vida*,  $T$ , pode ser considerada uma variável aleatória contínua com alguma f.d.p.  $f$ .

**Definição 2.** A *confiabilidade* de um componente (ou sistema) na época  $t$ ,  $R(t)$ , é definida como  $R(t) = P(T > t)$ , onde  $T$  é a duração da vida da componente.  $R$  é denominada *função de confiabilidade*.

Além da função de confiabilidade  $R$ , outra função desempenha importante papel na descrição das características de falhas de uma peça.

**Definição 3.** A *taxa de falhas* (instantânea)  $Z$  (algumas vezes denominada taxa de risco) associada à variável aleatória  $T$  é dada por

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)},$$

definida para  $F(t) < 1$ .

### 3.1 A Lei de Falhas Exponencial

Uma das leis de falhas mais importantes é aquela cuja duração até falhar é descrita pela distribuição exponencial. Um modo de caracterizá-la de forma simples é supor que  $Z(t) = \alpha$  (constante). Uma consequência imediata desta hipótese é que a f.d.p. associada à duração de falhar  $T$ , seja dada por

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

A recíproca disto é, também, imediata: Se  $f$  tiver a forma acima,  $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$  e, portanto,  $Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha$ . Deste modo, concluímos o seguinte resultado:

**Teorema 4.** *Seja  $T$ , a duração até falhar, uma variável aleatória contínua, que tome todos os valores não-negativos. Então,  $T$  terá uma distribuição exponencial se, e somente se, tiver uma taxa de falhas constante.*

**Exemplo 5.** Se for dado o parâmetro  $\alpha$  e  $R(t)$  for especificada, podemos achar  $t$ , o número de horas, por exemplo, de operação. Desde modo, se  $\alpha = 0,01$  e  $R(t) = 0,9$ , teremos

$$0,9 = e^{-0,01t}.$$

Daí,  $t = -100 \ln(0,9) = 10,54$  horas. Logo, se cada um de 100 desses componentes estiver operando durante 10,54 horas, aproximadamente 90 não falharão durante aquele período.

## 4 Conclusão

A distribuição exponencial, cuja função densidade de probabilidade é de grande facilidade para se trabalhar matematicamente, tem grandes aplicações em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, biologia, medicina. É muito utilizada em teoria da confiabilidade, análise de sobrevivência, teoria de filas, etc.

**Abstract:** The Exponential Distribution has an important function in Statistics. Because of the “memorylessness” property, this is a model very common to describe a huge class of phenomenon and to discuss about Reliability Theory.

**Keywords:** Exponential Distribution; Reliability Theory

## Referências Bibliográficas

- [1] Meyer, P.M., *Probabilidade - Aplicações a Estatística*, Livros Técnicos e Científicos Ltda., 1981.
- [2] James, B.J., *Probabilidade: um Curso em Nível Intermediário*, IMPA - CNPq, RJ, 1981.



# O Modelo de Lotka-Volterra

Mariana Marques<sup>1</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

**Resumo:** Esse trabalho tem como objetivo, estudar o modelo de Lotka-Volterra, que se refere ao comportamento de duas espécies de animais que se interagem na forma predador-presa. Veremos a partir deste modelo, a situação em que uma das espécies, no caso o predador, se alimenta de outra, a presa, enquanto esta se alimenta de outro tipo de alimento. Temos como exemplo leões e veados em uma floresta fechada: os leões caçam os veados, que se alimentam da vegetação da floresta.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais; Lotka-Volterra

## 1 Introdução

Vamos denotar por  $x$  e  $y$  as populações, respectivamente da presa e do predador, em um instante  $t$ . Ao construir a interação entre essas duas espécies, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual; assim,  $\frac{dx}{dt} = ax$ ,  $a > 0$ , quando  $y = 0$ .
2. Na ausência da presa, o predador é extinto; assim  $\frac{dy}{dt} = -cy$ ,  $c > 0$ , quando  $x = 0$ .
3. O número de encontros entre presa e predador é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população dos predadores e a inibir o crescimento da população das presas. Assim, a taxa de crescimento da população dos predadores é aumentada por um termo da forma  $\gamma xy$ , enquanto a taxa de crescimento da população das presas é diminuída por um termo da forma  $-\alpha xy$ , onde  $\gamma$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

Essas hipóteses nos levam às seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \quad \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \quad (1.1)$$

As constantes  $a$ ,  $c$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  são todas positivas;  $a$  e  $c$  são as taxas de crescimento da população de presas e a taxa de morte da população de predadores, respectivamente, e  $\alpha$  e  $\gamma$  são medidas do efeito da interação entre as duas espécies. As equações do sistema (1.1) são chamadas equações de Lotka-Volterra. Foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka em 1925 e por Volterra em 1926. Embora essas equações sejam simples, elas caracterizam uma grande classe de problemas. Temos como objetivo neste trabalho determinar o comportamento qualitativo das soluções do sistema (1.1) para valores iniciais positivos arbitrários de  $x$  e de  $y$ .

---

<sup>1</sup>Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - SESu/MEC

## 2 Preliminares

Para estudar o Modelo de Lotka-Volterra alguns resultados são necessários e serão apresentados a seguir:

### 2.1 Equação Diferencial Ordinária

Sejam  $t$  um número real,  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e denotemos  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Uma equação diferencial é uma relação da forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{ou simplesmente} \quad \dot{x} = f(t, x). \quad (1.2)$$

Dizemos que  $x$  é uma solução de (1.2) sobre um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , se  $x$  for uma função continuamente diferenciável no intervalo  $I$ ,  $(t, x(t)) \in D$  para todo  $t \in I$  e  $x$  satisfaz (1.2) em  $I$ .

Suponha que  $(t_0, x_0) \in D$ . Resolver um problema de valor inicial para a equação (1.2) consiste em encontrar um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $x$  de (1.2) satisfazendo  $x(t_0) = x_0$ . Escrevemos este problema como

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \quad (1.3)$$

Dizemos que uma função  $f(t, x)$  definida em  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é *localmente Lipschitziana em  $x$*  se para todo conjunto fechado e limitado  $U \subset D$ , existir  $K = K_U > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para  $(t, x), (t, y)$  em  $U$ .

Observemos que se  $f(t, x)$  for de classe  $C^1$  na segunda variável em  $D$ , então  $f(t, x)$  é localmente Lipschitziana relativamente a  $x$ .

Vamos enunciar os resultados que garantem a existência e unicidade de solução de (1.2) cujas demonstrações podem ser encontradas em Hale [4].

**Teorema 1.** *Se  $f$  for contínua em  $D$ , então para todo  $(t_0, x_0) \in D$ , existe pelo menos uma solução de (1.2) passando por  $(t_0, x_0)$ .*

**Teorema 2.** *Se  $f(t, x)$  for contínua em  $D$  e localmente Lipschitziana na variável  $x$ , então para todo  $(t_0, x_0) \in D$ , existe uma única solução  $x(t, t_0, x_0)$  de (1.2) passando por  $(t_0, x_0)$ .*

### 2.2 Estabilidade de Ponto de Equilíbrio

Nesta seção apresentamos conceitos da teoria de estabilidade que consiste em analisar o comportamento da solução de uma equação diferencial não linear  $\dot{x} = f(x)$  sem explicitá-la, isto é, a análise é feita apenas considerando as hipóteses impostas sobre a função  $f$ .

Neste estudo, as soluções constantes da equação desempenham um papel importante pois, estando garantida a condição de unicidade de solução para o problema com condição inicial dada, as demais soluções devem se aproximar ou se afastar das soluções constantes, ou até mesmo oscilar, mas sem pontos em comum com as soluções constantes.

Neste trabalho vamos considerar equações autônomas, ou seja, da forma

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.4)$$

em que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  depende somente de  $x$  e não depende explicitamente da variável independente  $t$ .

Uma propriedade importante desta equação é que, se  $x(t)$  for uma solução de (1.4) sobre um intervalo  $(a, b)$ , então para algum número real  $c$ , a solução  $y(t) = x(t - c)$  é uma solução de (1.4) sobre o intervalo  $(a + c, b + c)$ , isto é,

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t - c) = f(x(t - c)) = f(y(t)).$$

Conseqüentemente, supondo que temos existência e unicidade de solução para o problema

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

podemos afirmar que  $x(t)$  é solução de (1.5) se, e somente se,  $y(t) = x(t + t_0)$  for solução de

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Portanto, para equações autônomas, podemos considerar condições iniciais começando no tempo zero.

Uma caracterização das soluções constantes  $x(t) = \bar{x}$  é que  $f(\bar{x}) = 0$  e equivalentemente, se  $f(\bar{x}) = 0$  então  $x(t) = \bar{x}$  será uma solução da equação. Neste sentido, temos a seguinte definição:

**Definição 3.** Um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  é chamado ponto de equilíbrio da equação  $\dot{x} = f(x)$  se  $f(\bar{x}) = 0$ .

A partir dos pontos de equilíbrio da equação, vamos apresentar a definição de estabilidade.

**Definição 4.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação  $\dot{x} = f(x)$  é estável se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que, para todo  $x_0$  para o qual  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ , a solução  $\varphi(t, x_0)$  de  $\dot{x} = f(x)$  através de  $x_0$  em  $t = 0$  satisfaz a desigualdade  $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| < \epsilon$ , para todo  $t \geq 0$ .

Podemos dizer que um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é estável, se toda solução começando perto do ponto de equilíbrio permanece em uma vizinhança de  $\bar{x}$  no decorrer do tempo.

Dizemos que um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é instável se não for estável, ou seja:

**Definição 5.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação  $\dot{x} = f(x)$  é instável se existir  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$  existem  $x_0$  com  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$  e  $t_{x_0} > 0$  tal que  $\|\varphi(t_{x_0}, x_0) - \bar{x}\| \geq \epsilon$ .

A próxima definição diz que uma solução, começando próxima de  $\bar{x}$ , não apenas permanece próxima, mas acaba tendendo ao ponto de equilíbrio, à medida que o tempo passa.

**Definição 6.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação  $\dot{x} = f(x)$  é assintoticamente estável se for estável e, além disso, existir um  $r > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}$  para todo  $x_0$  satisfazendo a desigualdade  $\|x_0 - \bar{x}\| < r$ .

### 2.3 Fórmula da Variação das Constantes

O modelo a ser estudado é um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + g(t), \quad (1.6)$$

que é uma equação diferencial não autônoma sendo  $g$  uma função de classe  $C^1$  e  $A$  uma matriz real de ordem  $n$ . Sendo  $x(t)$  uma solução da equação (1.6), consideremos uma nova variável  $y(t)$  dada por

$$y(t) = e^{-At}x(t), \quad (1.7)$$

em que  $e^{At}$  é matriz fundamental da equação linear  $\dot{x} = Ax$ . Derivando a equação (1.7) em função de  $t$ , temos

$$\dot{y} = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x}. \quad (1.8)$$

Substituindo a equação (1.6) em (1.8), obtemos

$$\dot{y} = e^{-At}g(t). \quad (1.9)$$

Supondo a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  para a equação (1.6), temos:

$$y(t_0) = e^{-At_0}x_0.$$

Integrando a equação (1.9) em ambos os lados no intervalo  $[t_0, t]$ , temos

$$y(t) = e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds \quad (1.10)$$

e utilizando (1.7), obtemos

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds. \quad (1.11)$$

A expressão dada por (1.11) é chamada de Fórmula da Variação das Constantes.

### 2.4 Linearização de Sistemas de Equações Diferenciais

Vamos mostrar que, sob certas condições, o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial planar não linear é determinado pela aproximação linear do campo vetorial  $f$  em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equilíbrio. Encontraremos um sistema linear que, ao fazer um estudo dos autovalores da matriz desse sistema, diremos qual é o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio para a equação não linear.

Consideremos a equação  $\dot{x} = f(x)$ , com  $f = (f_1, f_2)$  de classe  $C^1$  e

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

a matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $x$ .

**Definição 7.** Se  $\bar{x}$  for um ponto de equilíbrio para a equação  $\dot{x} = f(x)$ , então a equação diferencial linear

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x$$

é chamada de equação linear variacional ou a linearização do campo vetorial  $f$  no ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ .

De acordo com Hale/Koçak [5], para que um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  seja assintoticamente estável para a equação não linear  $\dot{x} = f(x)$ , basta os autovalores da matriz Jacobina  $Df(\bar{x})$  da equação  $\dot{x} = Df(\bar{x})x$  terem parte real negativa. Antes de enunciar este resultado, vamos demonstrar o seguinte fato:

**Lema 8.** *Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $m$  tal que a parte real do autovalor  $\lambda_j$  de  $A$ , denotada por  $R(\lambda_j)$ , é negativa para todo autovalor  $\lambda_j$ . Seja  $\alpha$  um número real positivo tal que  $\alpha < -R(\lambda_j)$ , para todo  $\lambda_j$ . Então, existe  $K > 0$  tal que  $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ , para todo  $t \geq 0$ .*

**Prova:** Seja  $P$  uma matriz não singular tal que  $P^{-1}AP = J$ , onde  $J$  é a forma canônica de Jordan de  $A$ . Sabemos que

$$P^{-1}e^{At}P = e^{(P^{-1}AP)t} = e^{Jt}, \quad e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}, \quad \|e^{At}\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|e^{Jt}\|$$

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{j=1}^m \|e^{\lambda_j t}\| |p_j(t)| = \sum_{j=1}^m e^{R(\lambda_j)t} |p_j(t)|,$$

em que  $p_j(t)$  são polinômios. Seja  $\beta$  tal que  $0 < \alpha < \beta < -R(\lambda_j)$  para todo  $\lambda_j$ , logo  $R(\lambda_j) < -\beta < -\alpha$ . Assim,

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{j=1}^m e^{R(\lambda_j)t} |p_j(t)| \leq \sum_{j=1}^m e^{-\beta t} |p_j(t)| = e^{-\beta t} q(t) = e^{-\alpha t} e^{-(\beta-\alpha)t} q(t).$$

Como  $\beta - \alpha > 0$ , existe  $K > 0$  tal que  $e^{-(\beta-\alpha)t} q(t) \leq K$ , para todo  $t \geq 0$ . Portanto,  $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ .

Pelo lema concluímos que, se  $R(\lambda_j) < 0$  para todo autovalor  $\lambda_j$  de  $A$ , então toda solução de  $\dot{x} = Ax$  é limitada no futuro. ■

Observemos que se o ponto de equilíbrio não for a origem, faz-se uma mudança de variável e trabalha-se com um sistema linear em que a origem é ponto de equilíbrio. Através da análise dos autovalores da matriz  $Df(\bar{x})$ , temos o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio para a equação linear associada que, em geral, se mantém para a equação não linear. A origem do sistema linear pode ser classificado como atrator, ponto espiral, ponto de sela, ponto nodal e centro.

Não trataremos desta classificação neste texto, mas enunciamos os seguintes resultados:

- (i) Se a origem for um atrator para o sistema linear (SL) associado, então também o será para o sistema não linear (SNL).
- (ii) Se a origem for um ponto espiral para o SL, então também o será para o SNL.
- (iii) Se a origem for um ponto de sela para o SL, então também o será para o SNL.
- (iv) Se a origem for um ponto nodal dos tipos A e B (autovalores negativos) para o SL, então também a origem é ainda um ponto nodal para o SNL.
- (v) Se a origem for um centro para o SL, então a origem pode ser um centro ou um ponto espiral para o SNL.
- (vi) Se a origem for um ponto nodal do tipo D (único autovalor negativo com multiplicidade algébrica 2) para o SL, então a origem pode ser um nó ou um ponto espiral para o SNL.

Será provada apenas uma parte desse resultado a seguir, devido a extensão de sua demonstração, mas o restante da prova pode ser encontrado no livro de Coddington [3].

**Teorema 9.** *Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$ . Se todos os autovalores da matriz Jacobiana  $Df(\bar{x})$  tiverem parte real negativa, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$  será assintoticamente estável.*

**Prova:** Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , é conveniente introduzir uma nova variável:

$$y(t) = x(t) - \bar{x}$$

tal que o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de  $\dot{x} = f(x)$  corresponda ao ponto de equilíbrio  $y = 0$  da equação diferencial

$$\dot{y} = f(y + \bar{x}). \quad (1.12)$$

Usando a Fórmula de Taylor, podemos expandir a função  $f(y + \bar{x})$  na variável  $y$ , obtendo

$$f(y + \bar{x}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + g(y) \quad (1.13)$$

em que  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y)}{\|y\|} = 0$ , e como

$$g(y) = f(y + \bar{x}) - Df(\bar{x})y$$

segue que  $g(0) = 0$  e utilizando as equações (1.12) e (1.13) temos

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y + g(y). \quad (1.14)$$

Observamos que  $y(t) = 0$  é solução de (1.14) e, portanto,  $y = 0$  é um ponto de equilíbrio de (1.14), que equivale ao ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de  $\dot{x} = f(x)$ . Portanto, provaremos que o ponto de equilíbrio  $y = 0$  de (1.14) é assintoticamente estável.

Como  $g(0) = 0$  e utilizando o Teorema do Valor Médio para a função  $g$ , temos que, para algum  $m > 0$ , existe um  $\epsilon > 0$  tal que

$$\|g(y) - g(0)\| \leq m\|y\| \quad \text{se} \quad \|y\| < \epsilon. \quad (1.15)$$

Retornando à equação diferencial (1.14), seja  $y(t)$  solução de (1.14) satisfazendo a condição inicial  $y(0) = y_0$  que, pela Fórmula da Variação das Constantes é dada por

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t}y_0 + \int_0^t e^{Df(\bar{x})(t-s)}g(y(s))ds. \quad (1.16)$$

Considerando que as constantes  $K$  e  $\alpha$  dadas pelo lema 8, sejam  $m > 0$  tal que  $mK < \alpha$  e  $\epsilon > 0$  escolhido tal que (1.15) seja satisfeita. Como  $g(0) = 0$ , então

$$\|y(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|y_0\| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}m\|y(s)\|ds \quad (1.17)$$

com  $\|y(s)\| < \epsilon$  para  $0 \leq s \leq t$ . Multiplicando ambos os lados da desigualdade (1.17) por  $e^{\alpha t}$ , temos:

$$e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq K\|y_0\| + \int_0^t Kme^{\alpha s}\|y(s)\|ds. \quad (1.18)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (1.18), obtemos

$$e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq K\|y_0\|e^{Kmt}. \quad (1.19)$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados de (1.19) por  $e^{-\alpha t}$ , obtemos a estimativa procurada:

$$\|y(t)\| \leq K\|y_0\|e^{-(\alpha-Km)t} \quad \text{para } \|y(t)\| \leq \epsilon. \quad (1.20)$$

Para terminar a prova, escolha  $\delta > 0$  tal que  $K\delta < \epsilon$ . Se  $\|y_0\| < \delta$ , então a desigualdade (1.20) garante que  $\|y(t)\| < \epsilon$  desde que  $\alpha - Km > 0$ . Portanto, a solução  $y(t)$  existe para todo  $t \geq 0$  e a solução de equilíbrio  $y = 0$  de (1.14) é estável. Também pela desigualdade (1.20), temos que  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  se  $\|y_0\| < \delta$ . Consequentemente,  $y = 0$  é assintoticamente estável. ■

## 2.5 O Modelo de Lotka-Volterra

O sistema (1.1) pode ser analisado da seguinte maneira:

Os pontos críticos são as soluções de  $x(a - \alpha y) = 0$ ,  $y(-c + \gamma x) = 0$ , isto é, os pontos  $(0, 0)$  e  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

Vamos examinar primeiramente as soluções do sistema linear associado próximas de cada ponto crítico.

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear associado é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Os autovalores da matriz Jacobiana e os autovetores correspondentes são:

$$r_1 = a, \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r_2 = -c, \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

de modo que a solução geral de (1.21) é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}. \quad (1.23)$$

Como os autovalores apresentam sinais opostos, a origem é um ponto de sela e, portanto, instável para o sistema linear associado, em que as trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem. Pelo resultado citado anteriormente, a origem é instável para o sistema não linear (1.1).

Vamos considerar agora, o ponto crítico  $(c/\gamma, a/\alpha)$ . Se  $x = (c/\gamma) + u$  e  $y = (a/\alpha) + v$ , então o sistema linear associado é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Os autovalores do sistema (1.24) são  $r = \pm i\sqrt{ac}$ , ou seja, a parte real dos autovalores complexos é zero, de modo que o ponto crítico é estável para o sistema linear; na verdade ele é um centro. Consequentemente será um centro ou um ponto espiral para o sistema não linear. Mostraremos que se trata realmente de um centro.

Para encontrar as trajetórias do sistema (1.24), usaremos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}, \quad (1.25)$$

ou

$$\gamma^2 a u du + \alpha^2 c v dv = 0. \quad (1.26)$$

Em consequência,

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k, \quad (1.27)$$

onde  $k$  é uma constante não negativa. Logo, as trajetórias do sistema linear são elipses.

Notemos que o sistema (1.1) pode se reduzido a uma única equação,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)}. \quad (1.28)$$

A equação (1.28) é separável e tem solução

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C. \quad (1.29)$$

O gráfico da solução de (1.29) é uma curva fechada em torno do ponto crítico  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

Uma crítica das equações de Lotka-Volterra é que, na ausência de predadores, a população de presas aumenta sem limites. Isso pode ser corrigido permitindo-se o efeito natural inibidor que uma população crescente tem sobre a taxa de crescimento populacional; por exemplo, a primeira das equações de (1.1) pode ser modificada de modo que, quando  $y = 0$ , ela se reduza a uma equação logística para  $x$ .

Um fenômeno interessante que ocorre no modelo predador-presa é que uma retirada uniforme de elementos de ambas as populações, beneficia as presas. Por exemplo, o bicudo (praga de algodão) e a formiga (predadora) convivem em um sistema predador-presa. Se usarmos um inseticida que mata indiscriminadamente tanto os insetos predadores (formigas) como as presas (bicudo), o valor médio dos bicudos deve aumentar.

**Abstract:** In this work we study the Lotka-Volterra System, using the theory of stability of equilibrium points of the system.

**Keywords:** Differential Equations; Lotka-Volterra

## Referências Bibliográficas

- [1] Bassanezi, R.C.; Ferreira JR, W.C., *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [2] Boyce, W.E.; Diprima, R.C., *Equações Diferenciais de Valores de Contorno*, LTC, 2006.
- [3] Coddington, E.; Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [4] Hale, J.K., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley e Sons, 1969.
- [5] Hale, J.K.; Koçak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991.

# Sobre Estabilidade de Equações Discretas

Noemi Correr Stenico<sup>1</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos a teoria de estabilidade para equações discretas autônomas.

**Palavras-chave:** Equações discretas; estabilidade; pontos de equilíbrio

## 1 Introdução

Equação Discreta ou Sistema Dinâmico Discreto é uma relação que descreve a evolução de certos fenômenos ao longo do tempo. Por exemplo, considerando o crescimento de uma população, o tamanho  $x_{n+1}$  da geração  $n + 1$  depende do tamanho  $x_n$  da geração  $n$ , isto é:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Essas equações podem representar modelos matemáticos para os quais, inicialmente, identificamos a situação a ser estudada fazendo suposições sobre ela. Em seguida, criamos um problema matemático através dos dados obtidos de nossas observações, fazemos uma análise desse problema e, enfim, traduzimos esses dados obtidos de acordo com a realidade a fim de entendermos melhor o modelo original.

Após encontrarmos uma equação discreta para nosso problema, é natural que tentemos procurar suas soluções. No entanto, nem sempre é possível explicitar essas soluções e, portanto, o estudo da estabilidade de soluções se torna interessante, ou seja, analisa-se qualitativamente o comportamento das soluções, sem explicitá-las.

Também, para auxiliar nosso entendimento de estabilidade de equações discretas, apresentaremos a técnica das “**Teias de Aranha**” ou “**Cobwebs**”.

## 2 Definições e Resultados

As equações discretas são definidas da seguinte forma:

**Definição 1.** Dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma *Equação Discreta Autônoma* é uma relação do tipo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

em que  $f$  não depende explicitamente de  $n$ .

A Equação Discreta gera uma sequência de números  $(x_n)$  em que cada número depois do primeiro se relaciona com o número seguinte através da relação dada. A sequência  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  é chamada de *solução de (1.1)*.

A equação discreta (1.1) é dita de **primeira ordem** quando cada termo da sequência depende apenas do termo anterior. Fixando  $m \in \mathbb{Z}_+$ , dizemos que um equação discreta é de  **$m$ -ésima ordem** quando

---

<sup>1</sup>Bolsista PET: SESu/MEC

cada termo depende dos  $m$  termos anteriores. Por exemplo, a equação  $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$  é de segunda ordem pois todo termo depende dos dois anteriores, exceto os dois primeiros termos.

O estudo de estabilidade baseia-se em analisar se as soluções da equação discreta se aproximam ou se afastam de alguma solução constante, ou mesmo se oscila em torno dela. As soluções constantes são geradas pelo que chamamos de pontos de equilíbrio.

**Definição 2.** Um ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (1.1) se for um ponto fixo de  $f$ , isto é, se  $f(x^*) = x^*$ .

Observemos que um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.1), gera uma solução constante pois  $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$ ,  $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$ . Por indução finita, temos que  $x_n = x^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e a solução de (1.1), com valor inicial  $x_0 = x^*$ , é dada por  $(x^*, x^*, x^*, \dots)$ .

Por exemplo, para a equação discreta em  $\mathbb{R}$ ,

$$x_{n+1} = rx_n + b \quad (1.2)$$

com  $r, b \in \mathbb{R}$ , se  $r \neq 1$  o ponto de equilíbrio de (1.2) é  $x^* = \frac{b}{1-r}$  e se  $r = 1$  a equação não apresenta pontos de equilíbrio. De fato: seja  $x_k = x^*$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), em que  $x^*$  é ponto de equilíbrio de (1.2). Assim,  $x^* = f(x^*)$ . Sabemos que  $f(x) = rx + b$ , então

$$x^* = f(x^*) = rx^* + b \implies x^* - rx^* = b \implies x^*(1-r) = b.$$

Logo, se  $r \neq 1$ ,  $x^* = \frac{b}{1-r}$  é o único ponto de equilíbrio da equação.

Se  $r = 1$ ,  $f(x^*) = x^* + b$  e assim

$$f(x^*) = x^* \implies x^* + b = x^* \implies b = 0.$$

Contradição, pois  $b$  é genérico. Portanto, para  $r = 1$  a equação não admite ponto de equilíbrio.

Neste trabalho vamos explorar o caso em que  $f$  está definida em  $\mathbb{R}$ .

O nosso principal objetivo com o estudo das equações discretas é analisar o comportamento das soluções próximas das soluções constantes dadas pelos pontos de equilíbrio através da teoria de estabilidade no sentido de Liapunov, ou seja, conforme teoria desenvolvida pelo matemático russo Aleksandr Mijáilovich Liapunov.

**Definição 3.** (i) O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.1) é *estável* se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x_0 - x^*| < \delta \implies |x_n - x^*| < \varepsilon, \forall n > 0.$$

Se  $x^*$  não é estável então o chamamos de *instável*.

(ii) O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.1) é *atrator* se:

$$\exists \eta > 0 : |x_0 - x^*| < \eta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Se  $\eta = \infty$ ,  $x^*$  é chamado de *atrator global*.

(iii) O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.1) é *assintoticamente estável* se é *estável* e *atrator*.

Por exemplo, considerando a equação discreta  $x_{n+1} = rx_n + b$  e sabendo que, para  $r \neq 1$ , o ponto de equilíbrio é  $x^* = \frac{b}{1-r}$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.** *Se  $|r| < 1$ , o ponto de equilíbrio de (1.2) é estável e  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , para qualquer valor de  $x_0$ . Se  $|r| > 1$ ,  $x^*$  é instável. Quando  $r = -1$ , temos um 2-ciclo, ou seja, solução do tipo  $(x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$ .*

Para demonstrar este teorema, necessitamos de alguns resultados preliminares, a saber:

1.  $|x_n - x^*| = |r|^n |x_0 - x^*|, \forall n \in \mathbb{N}$  pois, pelo Princípio da Indução Finita:

(i) Para  $n = 1$ :  $|x_1 - x^*| = |rx_0 + b - x^*| = |rx_0 + b - \frac{b}{1-r}| = |rx_0 + \frac{b-br-b}{1-r}| = |rx_0 - \frac{br}{1-r}| = |r||x_0 - \frac{b}{1-r}| = |r|^1 |x_0 - x^*|.$

(ii) Supondo válido o resultado para  $n = k$ , isto é,  $|x_k - x^*| = |r|^k |x_0 - x^*|$ , provemos a validade para  $k + 1$ :

$$|x_{k+1} - x^*| = |rx_k + b - x^*| = |rx_k + b - \frac{b}{1-r}| = |rx_k + \frac{b-br-b}{1-r}| = |rx_k - \frac{br}{1-r}| = |r||x_k - \frac{b}{1-r}| = |r||x_k - x^*| = |r||r|^k |x_0 - x^*| = |r|^{k+1} |x_0 - x^*|.$$

Por (i) e (ii), temos o resultado.

2.  $|x_n - x^*| < |x_0 - x^*|, \forall n \in \mathbb{N}$  para  $|r| < 1$  pois, utilizando o resultado 1, temos:

$$|x_n - x^*| = |r|^n |x_0 - x^*| < |x_0 - x^*|.$$

Vejamos agora a demonstração do **Teorema 4**.

Se  $|r| < 1$ , o ponto de equilíbrio  $x^*$  é estável pois:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 / \forall x_0 \in \mathbb{R}, |x_0 - x^*| < \delta \xrightarrow{2} |x_n - x^*| < |x_0 - x^*| < \delta = \varepsilon \implies |x_n - x^*| < \varepsilon.$$

Se  $|r| > 1$ ,  $|r|^n$  tende a infinito e, assim,  $|x_n - x^*|$  tende a infinito, significando que os termos  $x_n$  estão se afastando de  $x^*$  e, portanto,  $x^*$  é instável.

Se  $r = -1$ , temos:  $x_{n+2} = -x_{n+1} + b = -(-x_n + b) + b = x_n$ . Então, quando  $n$  for *par* todos os valores de  $x_n$  serão iguais; ocorrerá o mesmo quando  $n$  for *ímpar*. Ou seja:  $x_0 = x_2 = x_4 = \dots$  e  $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$  e, portanto, temos um **2-ciclo**.

O teorema seguinte apresenta condições suficientes para que um ponto de equilíbrio seja estável ou não.

**Teorema 5.** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio da equação discreta  $x_{n+1} = f(x_n)$  em que  $f$  é continuamente diferenciável em  $x^*$ . Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é **assintoticamente estável**; se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é **instável**. Caso  $|f'(x^*)| = 1$ , nada se conclui.*

**Prova:** Primeiramente, provaremos a estabilidade assintótica.

Suponha que  $|f'(x)| < M < 1$ . Então, existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$  contendo  $x^*$  tal que  $|f'(x)| \leq M < 1$  para todo  $x \in J$ . Caso contrário, para cada intervalo aberto  $I_n = (x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n})$  existiria um ponto  $x_n \in I_n$  tal que  $|f'(x_n)| \geq M$ . Para  $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow x^*$ . Desde que  $f'$  é uma função contínua, segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x^*)$ . Consequentemente,  $M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| = |f'(x^*)| < M$ , o que é uma contradição.

Para  $x_0 \in J$ , temos que  $|x_1 - x^*| = |f(x_0) - x^*|$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\xi$  entre  $x_0$  e  $x^*$  tal que  $|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\xi)||x_0 - x^*|$ . Então,  $|f(x_0) - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$  e, por isso:

$$|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|.$$

Desde que  $M < 1$ , a desigualdade acima mostra que  $x_1$  está mais próximo de  $x^*$  do que  $x_0$ . Consequentemente,  $x_1 \in J$ . E, por indução, concluímos:

$$|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*| < |x_0 - x^*| \implies x_n \in J, n \in \mathbb{N}.$$

Para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  implica  $|x_n - x^*| < \varepsilon$ , para todo  $n > 0$ . Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0$  e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ . Logo,  $x^*$  é assintoticamente estável.

Para mostrar que  $x^*$  é instável, suponha que  $|f'(x^*)| > M > 1$ . Então, existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$  tal que  $|f'(x)| \geq M$  (I), para qualquer  $x \in J$ . Para  $x_0 \in J$ , pelo Teorema do Valor Médio, existe um  $\alpha \in (x_0, x^*)$  (ou  $(x^*, x_0)$ ) tal que:

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\alpha)||x_0 - x^*| \stackrel{(I)}{\geq} M|x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

Por indução:  $|x_k - x^*| \geq M^k|x_0 - x^*|$ .

É possível encontrar  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $M^{k_0}|x_0 - x^*| > \gamma$ . Logo,  $|x_{k_0} - x^*| > \gamma$ .

Como  $|x_k - x^*| \geq M^k|x_0 - x^*|$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k|x_0 - x^*| = +\infty$  então  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - x^*| = +\infty$  e, assim,  $|x_k| \rightarrow +\infty$ . Portanto,  $x^*$  é instável. ■

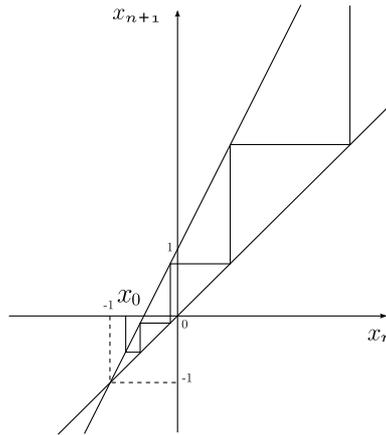
Para analisar a estabilidade de pontos de equilíbrio da equação  $x_{n+1} = f(x_n)$ , temos uma técnica gráfica chamada de **Teia de Aranha** ou **Cobweb**, que ajuda na visualização do comportamento das soluções próximas às soluções constantes dadas pelos pontos de equilíbrio.

Para construirmos a “Teia de Aranha”, primeiramente desenhamos os gráficos de  $f$  e da função identidade no plano  $(x_n, x_{n+1})$ . Dado um valor inicial  $x_0$ , queremos encontrar o valor de  $x_1$  e, para isso, desenhamos uma linha vertical partindo de  $x_0$  até intersectar o gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, x_1)$ ; depois, desenhamos uma linha horizontal partindo do ponto  $(x_0, x_1)$  até intersectar o gráfico da função identidade no ponto  $(x_1, x_1)$ ; uma linha vertical partindo do ponto  $(x_1, x_1)$  encontrará o gráfico de  $f$  no ponto  $(x_1, x_2)$ . Continuando esse processo, encontramos  $x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Considere a equação discreta  $x_{n+1} = rx_n + b$ . Calculando o ponto de interseção dos gráficos de  $f(x) = rx + b$  e da função identidade  $f(x) = x$ , encontramos o ponto de equilíbrio dessa equação. De fato, para  $r \neq 1$ :

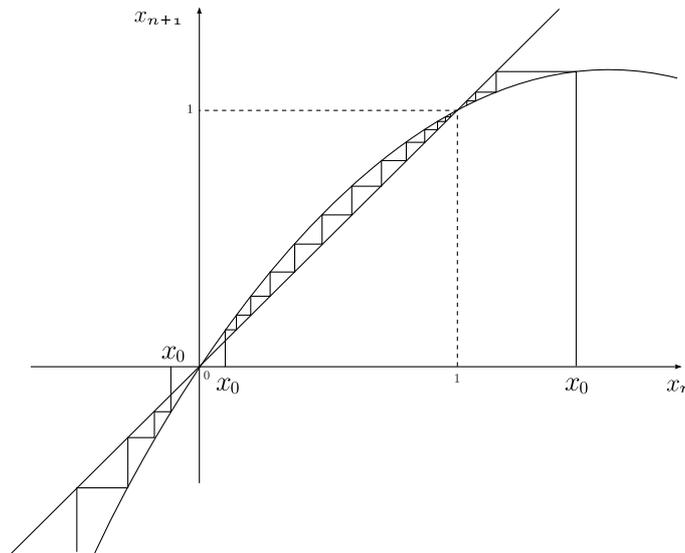
$$f(x_n) = x_n \implies x_n = rx_n + b \implies (1 - r)x_n = b \implies x_n = \frac{b}{1 - r}.$$

Aplicando a técnica da “Teia de Aranha”, para  $r = 2$  e  $b = 1$  temos o diagrama seguinte, no qual observamos que os pontos de uma solução genérica da equação discreta afastam-se do ponto de equilíbrio  $x^* = -1$  tendendo ao infinito:



Podemos concluir que o ponto de equilíbrio é instável, também pelo **Teorema 4**, pois  $|r| = 2 > 1$ .

Considerando a equação discreta  $x_{n+1} = 1.5x_n - 0.5x_n^2$  cujos pontos de equilíbrio são  $x_0^* = 0$  e  $x_1^* = 1$ , a função envolvida é  $f(x) = 1.5x - 0.5x^2$  e seu gráfico é uma parábola. Para aplicar a técnica gráfica, procedemos do mesmo modo que o caso anterior: desenhamos os gráficos da parábola e da função identidade e seguimos os passos da construção da “Teia de Aranha”:



Observamos que os pontos da solução se afastam do ponto de equilíbrio  $x_0^* = 0$  e se aproximam de  $x_1^* = 1$ . Como  $f$  é uma função quadrática, ela é continuamente diferenciável. Portanto, pelo **Teorema 5**, podemos concluir que  $x^* = 0$  é *instável* pois  $|f'(0)| > 1$  e que  $x^* = 1$  é *assintoticamente estável* pois  $|f'(1)| < 1$ .

### 3 Aplicação

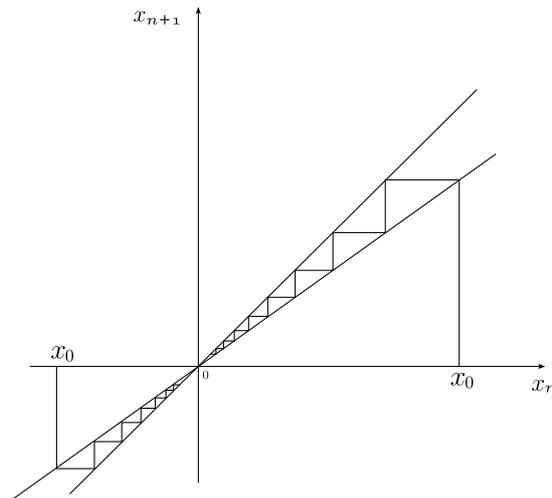
Para ilustrar a teoria apresentada, vamos assumir que uma pessoa tome uma pílula contendo 200mg de um remédio a cada 4 horas, que a droga vá para a corrente sanguínea imediatamente e que, a cada 4 horas, o corpo elimina 20% da droga que está em sua corrente sanguínea.

No instante inicial  $n = 0$ , a quantidade de droga no sangue é  $x_0 = 200$ . Após 4 horas ( $n = 1$ ), a pessoa terá  $x_1 = x_0 - 0.2x_0 = 0.8x_0$  no sangue. No instante  $n = 2$ , a quantidade de droga será

$x_2 = x_1 - 0.2x_1 = 0.8x_1$  e assim por diante. Logo, obtemos a seguinte equação discreta para nosso problema:

$$x_{n+1} = 0.8x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Facilmente encontramos que o único ponto de equilíbrio da equação é  $x^* = 0$ . Analisando a estabilidade de  $x^* = 0$  pelo **Teorema 4**, temos que o ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável* pois  $|r| = |0.8| < 1$ .



A “Teia de Aranha” acima ajuda-nos a visualizar que todas as soluções de nossa equação discreta aproximam-se da solução constante dada pelo ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  com o passar do tempo. Ou seja, a quantidade de droga na corrente sanguínea tende a zero com o passar do tempo.

**Abstract:** In this work we present stability theory for autonomous discrete equations.

**Keywords:** Discrete Equations; Stability; Equilibrium Points

## Referências Bibliográficas

- [1] Sandefur, J.T., *Discrete Dynamical Systems - Theory and Applications*, Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [2] Elaydi, R.L., *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer, 2005.

# O Teorema de Euler-Poincaré na Classificação dos Poliedros Regulares

Renan Eduardo Fornaziero<sup>1</sup>

Orientador(a): Prof. Dr. Thiago de Melo

**Resumo:** Neste trabalho mostraremos que existem apenas cinco poliedros regulares através da Topologia Algébrica. Para isso, faremos uso da Homologia Simplicial e do Teorema de Euler-Poincaré, que relaciona o número de  $p$ -simplexos de um complexo simplicial com os números de Betti deste complexo.

**Palavras-chave:** homologia simplicial; característica de Euler; poliedros regulares

## 1 Simplexos e complexos geométricos

**Definição 1.** Um conjunto  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  de pontos do  $\mathbb{R}^n$  é geometricamente independente se para quaisquer  $t_i$  reais,

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad e \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implicam  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$ .

**Definição 2.** Seja  $\{a_0, \dots, a_k\}$  um conjunto de pontos geometricamente independentes de  $\mathbb{R}^n$ . O simplexo geométrico de dimensão  $k$  ou  $k$ -simplexo,  $\sigma^k$ , gerado por  $\{a_0, \dots, a_k\}$  é o conjunto de todos os pontos  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  para os quais existem números reais não-negativos  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Os números  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  são as coordenadas baricêntricas do ponto  $x$ . Os pontos  $a_0, \dots, a_k$  são os vértices de  $\sigma^k$ . O conjunto de todos os pontos  $x$  em  $\sigma^k$  com todas as coordenadas baricêntricas positivas é chamado de  $k$ -simplexo geométrico aberto gerado por  $\{a_0, \dots, a_k\}$ .

**Definição 3.** Um simplexo  $\sigma^k$  é uma face de um simplexo  $\sigma^n$ ,  $k \leq n$ , se cada vértice de  $\sigma^k$  é um vértice de  $\sigma^n$ . As faces de  $\sigma^n$  diferentes do próprio  $\sigma^n$  são chamadas faces próprias.

Dois simplexos  $\sigma^m$  e  $\sigma^n$  estão propriamente unidos se não há interseção entre eles, ou se a interseção  $\sigma^m \cap \sigma^n$  é face de ambos.

**Definição 4.** Um complexo geométrico (ou complexo simplicial, ou complexo) é uma família finita  $K$  de simplexos geométricos que estão propriamente unidos e tem a propriedade de que cada face de um elemento de  $K$  é também um elemento de  $K$ . A dimensão de  $K$  é o maior inteiro positivo  $r$  tal que  $K$  possui um  $r$ -simplexo. A união dos elementos de  $K$ , com a topologia de subespaço Euclidiano, é denotada por  $|K|$  e chamada de realização de  $K$  ou poliedro associado a  $K$ .

---

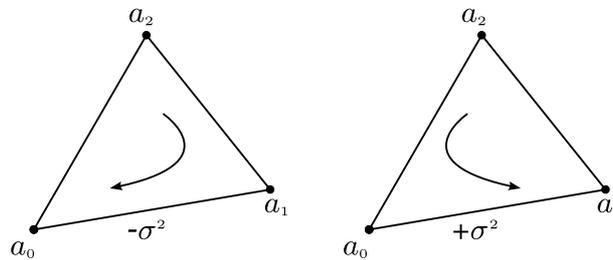
<sup>1</sup>FAPESP 2010/18926-9

**Definição 5.** Um  $n$ -simplexo orientado,  $n \geq 1$ , é obtido de um  $n$ -simplexo  $\sigma^n = \langle a_1 \dots a_n \rangle$  determinando-se uma ordem para seus vértices. A classe de equivalência das permutações pares da ordem escolhida determina o simplexo positivamente orientado  $+\sigma^n$ , enquanto que a classe de equivalência das permutações ímpares determina o simplexo negativamente orientado  $-\sigma^n$ . Um complexo geométrico orientado é obtido de um complexo geométrico assumindo uma orientação para cada um de seus simplexos.

Se os vértices  $a_0, a_1, \dots, a_p$  de um complexo  $K$  são os vértices de um  $p$ -simplexo  $\sigma^p$ , então  $+\langle a_0 \dots a_p \rangle$  denota a classe das permutações pares a partir da ordem  $a_0, \dots, a_p$ , e  $-\langle a_0 \dots a_p \rangle$  denota a classe das permutações ímpares.

Como a ordenação dos vértices requer dois ou mais vértices, não nos preocupamos em orientar 0-simplexos. Porém, é conveniente considerar um 0-simplexo  $\langle a_0 \rangle$  como orientado positivamente.

Por exemplo, consideremos 2-simplexo  $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$  com a ordem  $a_0 < a_1 < a_2$ . Então,  $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ ,  $\langle a_1 a_2 a_0 \rangle$  e  $\langle a_2 a_0 a_1 \rangle$  denotam  $+\sigma^2$ , enquanto que  $\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$ ,  $\langle a_2 a_1 a_0 \rangle$  e  $\langle a_1 a_0 a_2 \rangle$  denotam  $-\sigma^2$ .



**Definição 6.** Seja  $K$  um complexo geométrico orientado com simplexos  $\sigma^{p+1}$  e  $\sigma^p$ , cujas dimensões diferem de 1. Associamos a cada par  $(\sigma^{p+1}, \sigma^p)$  um número de incidência  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$  definido da seguinte forma: se  $\sigma^p$  não é uma face de  $\sigma^{p+1}$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$ . Suponha que  $\sigma^p$  seja uma face de  $\sigma^{p+1}$ . Nomeie os vértices  $a_0, a_1, \dots, a_p$  de  $\sigma^p$  de forma que  $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$ . Seja  $v$  o vértice de  $\sigma^{p+1}$  que não está em  $\sigma^p$ . Então,  $+\sigma^{p+1} = \pm \langle v a_0 \dots a_p \rangle$ . Se  $+\sigma^{p+1} = +\langle v a_0 \dots a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ . Se  $+\sigma^{p+1} = -\langle v a_0 \dots a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ .

**Definição 7.** Seja  $X$  um espaço topológico. Se existe um complexo geométrico  $K$  cuja realização  $|K|$  é homeomorfa a  $X$ , então  $X$  é um espaço triangularizável e o complexo  $K$  é chamado triangulação de  $X$ .

**Definição 8.** Em um complexo orientado  $K$ , sejam  $\{\sigma_i^p\}_{i=1}^{\alpha_p}$  e  $\{\sigma_i^{p+1}\}_{i=1}^{\alpha_{p+1}}$  os  $p$ -simplexos and  $(p+1)$ -simplexos de  $K$ , onde  $\alpha_p$  e  $\alpha_{p+1}$  denotam o número de simplexos de dimensão  $p$  e  $p+1$ , respectivamente. A matriz

$$\eta(p) = (\eta_{ij}(p)),$$

onde  $\eta_{ij}(p) = [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^p]$ , é chamada de  $p$ -ésima matriz de incidência de  $K$ .

## 2 Cadeias, ciclos e bordos

**Definição 9.** Seja  $K$  um complexo simplicial orientado. Se  $p$  é um inteiro positivo, uma cadeia de dimensão  $p$ , ou  $p$ -cadeia, é uma função  $c_p$  da família de  $p$ -simplexos orientados de  $K$  nos inteiros tal que, para cada  $p$ -simplexo  $\sigma^p$ ,  $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$ . Uma 0-cadeia é uma função dos 0-simplexos de  $K$  nos inteiros. Com

a operação de adição induzida dos inteiros, a família de  $p$ -cadeias forma um grupo, que é denotado por  $C_p(K)$ .

Uma  $p$ -cadeia elementar é uma  $p$ -cadeia  $c_p$  para a qual existe um  $p$ -simplexo  $\sigma^p$  tal que  $c_p(\tau^p) = 0$  para todo  $p$ -simplexo  $\tau^p$  distinto de  $\sigma^p$ . Tal  $p$ -cadeia elementar é denotada por  $g\sigma^p$ , onde  $g = c_p(+\sigma^p)$ . Com essa notação, uma  $p$ -cadeia arbitrária  $d_p$  pode ser expressa como a soma finita

$$d_p = \sum g_i \sigma_i^p$$

de  $p$ -cadeias elementares, onde o índice  $i$  percorre todos os  $p$ -simplexos de  $K$ .

**Definição 10.** Se  $g\sigma^p$  é uma  $p$ -cadeia elementar com  $p \geq 1$ , o bordo de  $g\sigma^p$ , denotado por  $\partial(g\sigma^p)$ , é definido por

$$\partial(g\sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \sigma_i^{p-1}, \quad \sigma_i^{p-1} \in K.$$

O operador bordo  $\partial$  é estendido por linearidade a um homomorfismo

$$\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K).$$

Em outras palavras, se  $c_p = \sum g_i \sigma_i^p$  é uma  $p$ -cadeia arbitrária, então definimos

$$\partial(c_p) = \sum \partial(g_i \sigma_i^p).$$

O bordo de uma 0-cadeia é definido como zero.

**Definição 11.** Seja  $K$  um complexo orientado. Se  $p$  é um inteiro positivo, um ciclo de dimensão  $p$  em  $K$ , ou  $p$ -ciclo, é uma  $p$ -cadeia  $z_p$  tal que  $\partial(z_p) = 0$ . A família de  $p$ -ciclos é o núcleo do homomorfismo  $\partial$  e é um subgrupo de  $C_p(K)$ , denotado por  $Z_p(K)$ . Como o bordo de toda 0-cadeia foi definido como zero, definimos um 0-ciclo de maneira análoga.

Se  $p \geq 0$ , uma  $p$ -cadeia  $b_p$  é um bordo de dimensão  $p$  em  $K$ , ou  $p$ -bordo, se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = b_p$ . A família de  $p$ -bordos é a imagem do homomorfismo  $\partial$  e é um subgrupo de  $C_p(K)$ , denotado por  $B_p(K)$ .

Se  $n$  é a dimensão de  $K$ , então não existem  $p$ -cadeias em  $K$  para  $p > n$ . Neste caso, dizemos que  $C_p(K)$  é o grupo trivial  $\{0\}$ . Em particular, não existem  $(n+1)$ -cadeias em  $K$ . Assim,  $C_{n+1}(K) = \{0\}$  e, portanto,  $B_n(K) = \{0\}$ .

### 3 Grupo de homologia

**Definição 12.** Dois  $p$ -ciclos  $w_p$  e  $z_p$  em um complexo  $K$  são homólogos, denotado por  $w_p \sim z_p$ , se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que

$$\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p.$$

Em outras palavras, se a diferença  $w_p - z_p \in B_p(K)$ .

Se um  $p$ -ciclo  $t_p$  é o bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia, dizemos que  $t_p$  é homólogo ao zero, e denotamos  $t_p \sim 0$ .

Essa relação de homologia para  $p$ -ciclos é uma relação de equivalência. De fato, sejam  $w_p$ ,  $t_p$  e  $z_p$   $p$ -ciclos. Então,

- $w_p \sim w_p$  se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - w_p = 0$ . Basta tomar  $c_{p+1} = 0$ .
- Se  $w_p \sim t_p$ , então existe uma cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - t_p$ . Logo, considerando a cadeia  $-c_{p+1}$ , temos que  $\partial(-c_{p+1}) = -\partial(c_{p+1}) = t_p - w_p$ . Portanto,  $t_p \sim w_p$ .
- Se  $w_p \sim t_p$  e  $t_p \sim z_p$ , existem cadeias  $c_{p+1}$  e  $c'_{p+1}$  tais que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - t_p$  e  $\partial(c'_{p+1}) = t_p - z_p$ . Considerando a cadeia  $c_{p+1} + c'_{p+1}$ , temos que  $\partial(c_{p+1} + c'_{p+1}) = \partial(c_{p+1}) + \partial(c'_{p+1}) = (w_p - t_p) + (t_p - z_p) = w_p - z_p$ . Portanto,  $w_p \sim z_p$ .

Essa relação particiona  $Z_p(K)$  em classes de homologia

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\}.$$

A classe de homologia  $[z_p]$  é a classe lateral

$$z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial(c_{p+1}) : \partial(c_{p+1}) \in B_p(K)\}.$$

Assim, as classes de homologia são membros do grupo quociente  $Z_p(K)/B_p(K)$ .

**Definição 13.** Se  $K$  é um complexo orientado e  $p$  um inteiro não negativo, o grupo de homologia de dimensão  $p$  de  $K$  é o grupo quociente

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K).$$

## 4 O teorema de Euler-Poincaré e os poliedros regulares

**Definição 14.** Seja  $K$  um complexo orientado. Uma família  $\{z_p^1, \dots, z_p^r\}$  de  $p$ -ciclos é linearmente independente com respeito a homologia, ou linearmente independente  $\text{mod } B_p(K)$ , se não existem inteiros  $g_1, \dots, g_r$  não todos nulos tais que a cadeia  $\sum g_i z_p^i$  é homóloga ao 0. O maior inteiro  $r$  para o qual existem  $r$   $p$ -ciclos linearmente independentes com respeito a homologia é denotado por  $R_p(K)$  e chamado de  $p$ -ésimo número de Betti do complexo  $K$ .

No teorema a seguir, assumiremos que o grupo de coeficientes foi escolhido como sendo os racionais e não mais os inteiros.

**Teorema 15 (Teorema de Euler-Poincaré).** *Seja  $K$  um complexo geométrico orientado de dimensão  $n$  e, para  $p = 0, 1, \dots, n$ ,  $\alpha_p$  denotando o número de  $p$ -simplexos de  $K$ . Então,*

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K),$$

onde  $R_p(K)$  denota o  $p$ -ésimo número de Betti de  $K$ .

**Prova:** Como  $K$  é o único complexo em questão, a notação será simplificada omitindo-se referência a ele nas notações de grupo. Note que  $C_p$ ,  $Z_p$  e  $B_p$  são espaços vetoriais sobre os racionais.

Seja  $\{d_p^i\}$  o conjunto maximal de  $p$ -cadeias tais que nenhuma combinação linear própria de  $d_p^i$  é um ciclo, e seja  $D_p$  o subespaço linear de  $C_p$  gerado por  $\{d_p^i\}$ . Então,  $D_p \cap Z_p = \{0\}$  e, daí,  $C_p = Z_p \oplus D_p$ . Então,

$$\alpha_p = \dim C_p = \dim D_p + \dim Z_p,$$

$$\dim Z_p = \alpha_p - \dim D_p, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Para  $p = 0, \dots, n-1$ , seja  $b_p^i = \partial(d_{p+1}^i)$ . O conjunto  $\{b_p^i\}$  forma uma base para  $B_p$ . Seja  $\{z_p^i\}$ ,  $i = 1, \dots, R_p$  o conjunto maximal de  $p$ -ciclos linearmente independentes mod  $B_p$ . Esses ciclos geram um subespaço  $G_p$  de  $Z_p$ , e

$$Z_p = G_p \oplus B_p \quad 0 \leq p \leq n-1.$$

Então,

$$\dim Z_p = \dim G_p + \dim B_p = R_p + \dim B_p,$$

uma vez que  $R_p = \dim G_p$ . Logo,

$$R_p = \dim Z_p - \dim B_p = \alpha_p - \dim D_p - \dim B_p, \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Observe que  $B_p$  é gerado pelos bordos de cadeias elementares

$$\partial(1\sigma_i^{p+1}) = \sum \eta_{ij}(p)\sigma_j^p,$$

onde  $(\eta_{ij}(p)) = \eta(p)$  é a  $p$ -ésima matriz de incidência. Então,  $\dim B_p = \text{rank } \eta(p)$ . Como o número de  $d_{p+1}^i$  é o mesmo que  $b_p^i$ , então

$$\dim D_{p+1} = \dim B_p = \text{rank } \eta(p), \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Logo,

$$R_p = \alpha_p - \dim D_p - \dim B_p = \alpha_p - \text{rank } \eta(p-1) - \text{rank } \eta(p), \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Note também que

$$R_0 = \dim Z_0 - \dim B_0 = \alpha_0 - \text{rank } \eta(0),$$

$$R_n = \dim Z_n = \alpha_n - \dim D_n = \alpha_n - \text{rank } \eta(n-1).$$

Na soma alternada  $\sum_{p=0}^n (-1)^p R_p$  todos os termos  $\text{rank } \eta(p)$  cancelam e temos

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p R_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p.$$

■

**Definição 16.** Se  $K$  é um complexo de dimensão  $n$ , o número

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p$$

é chamado de característica de Euler de  $K$ .

**Definição 17.** Um poliedro retilíneo em  $\mathbb{R}^3$  é um sólido limitado por polígonos convexos propriamente unidos. Os polígonos limitantes são chamados faces, as interseções das faces são chamadas arestas e as interseções das arestas são chamadas de vértices.

Um poliedro simples é um poliedro retilíneo cujo bordo é homeomorfo a 2-esfera  $S^2$ .

Um poliedro regular é um poliedro retilíneo cujas faces são polígonos planos regulares e cujos ângulos poliedrais são congruentes.

Para a demonstração do próximo teorema, utilizaremos os números de Betti da  $S^2$  que são

$$R_0(S^2) = 1, \quad R_1(S^2) = 0, \quad R_2(S^2) = 1,$$

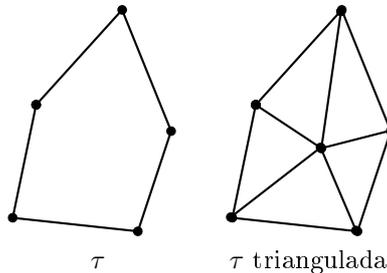
pois  $H_0(S^2) = H_2(S^2) = \mathbb{Z}$  e  $H_1(S^2) = 0$ .

Então, a característica de Euler da  $S^2$  é

$$\chi(S^2) = \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

**Teorema 18 (Teorema de Euler).** Se  $S$  é um poliedro simples com  $V$  vértices,  $E$  arestas e  $F$  faces, então  $V - E + F = 2$ .

**Prova:** Como as faces de  $S$  não são necessariamente triangulares, podemos corrigir isso da seguinte maneira: considere uma face  $\tau$  de  $S$  tendo  $n_0$  vértices e  $n_1$  arestas. Calculando *vértices* - *arestas* + *faces* temos  $n_0 - n_1 + 1$  para cada face  $\tau$ . Escolha um novo vértice  $v$  no interior de  $\tau$  e ligue o novo vértice a cada um dos vértices originais por um segmento de reta. Na triangulação de  $\tau$  1 novo vértice e  $n_0$  novas arestas são adicionados. Assim, uma face  $\tau$  é substituída por  $n_0$  novas faces.



Então,

$$\text{vértices} - \text{arestas} + \text{faces} = (n_0 + 1) - (n_1 + n_0) + n_0 = n_0 - n_1 + 1,$$

e a soma  $V - E + F$  não é alterada no processo de triangulação.

Seja  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , o número de  $i$ -simplexos na triangulação de  $S$  obtida dessa forma. Então,

$$V - E + F = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

Pelo teorema de Euler-Poincaré, temos

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_0(S^2) - R_1(S^2) + R_2(S^2) = 2$$

Logo,

$$V - E + F = 2,$$

para qualquer poliedro simples. ■

**Teorema 19.** *Existem somente cinco poliedros simples regulares.*

**Prova:** Suponha que  $S$  seja um poliedro com  $V$  vértices,  $E$  arestas e  $F$  faces. Seja  $m$  o número de arestas se encontrando em cada vértice e  $n$  o número de arestas de cada face. Note que  $n \geq 3$ . Então,

$$mV = 2E = nF,$$

$$V - E + F = 2.$$

Assim,

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2.$$

Logo,

$$F(2n - mn + 2m) = 4m,$$

e devemos ter

$$2n - mn + 2m > 0.$$

Como  $n \geq 3$ , temos

$$2m > n(m - 2) \geq 3(m - 2) = 3m - 6,$$

donde  $m < 6$ .

Assim, a relação

$$F(2n - mn + 2m) = 4m, \quad n \geq 3, m < 6$$

nos dá os seguintes valores para  $(m, n, F)$ :

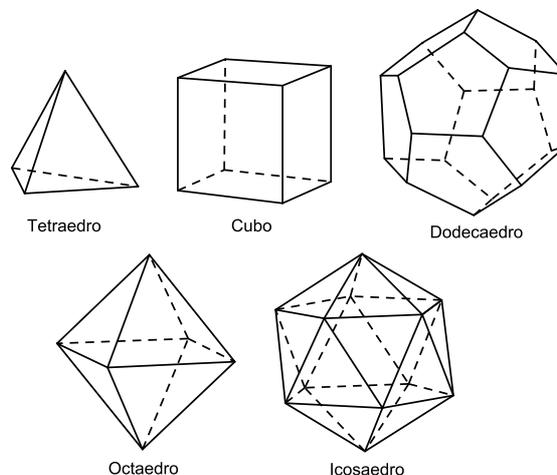
$$(a) (3, 3, 4), \quad (b) (3, 4, 6), \quad (c) (4, 3, 8), \quad (d) (3, 5, 12), \quad (e) (5, 3, 20).$$

Por exemplo,  $m = 4$  nos dá

$$F(8 - 2n) = 16,$$

donde  $F = 8$  e  $n = 3$ .

As cinco possibilidades para  $(m, n, F)$  são, por sua vez, o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. ■



**Abstract:** In this work we prove that there are only five regular polyhedra by means of Algebraic Topology. We use Simplicial Homology and the Euler-Poincaré Theorem that give us a relation between the number of  $p$ -simplexes in a simplicial complex and the Betti number of this complex.

**Keywords:** simplicial homology; Euler's characteristic; regular polyhedra

## Referências Bibliográficas

- [1] Croom, F.H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1978.
- [2] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] Munkres, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1984.

# $\mathbb{R}$ , Axiomaticamente

Valterlan Atanasio de Souza

Orientador(a): Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

**Resumo:** Do ponto de vista axiomático, várias são as possibilidades para se caracterizar aquilo que desejamos entender por corpo dos números reais. Neste trabalho são apresentadas dez possíveis escolhas de axioma.

**Palavras-chave:** Corpos ordenados; ordem arquimediana; sequências

## 1 Introdução

Em [4], nas considerações finais, está dito que são equivalentes nove entre as dez afirmações que apresentamos abaixo. Considerando que algumas consequências do axioma do supremo são bastante conhecidas, podemos dizer que algumas das equivalências que demonstraremos já foram demonstradas em [4] a partir de suas equivalências com o axioma do supremo. No entanto, o papel da propriedade arquimediana não está claro em [4]. Ficamos motivados a clarear mais essas idéias e preferimos buscar uma demonstração das equivalências numa forma cíclica.

## 2 Preliminares

### 2.1 Corpo Ordenado

Seja  $(K, +, \cdot)$  um corpo.

**Teorema 1.** *(I) Existe uma ordem total em  $K$ , escrita “ $<$ ”, tal que*

*i)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  para todo  $c \in K$ .*

*ii)  $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$  sempre que  $c \in K$  e  $0 < c$ .*

*(II) Existe um subconjunto  $P \subset K$  tal que*

*i)  $a + b \in P$  e  $a \cdot b \in P$  para todo  $a, b \in P$ .*

*ii) Dado  $a \in K$ , exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou  $a = 0$  ou  $a \in P$  ou  $a \in -P$ .*

Omitiremos os detalhes da demonstração; apenas observamos que para  $(I) \Rightarrow (II)$  toma-se  $P = \{x \in K; 0 < x\}$ , enquanto que para  $(II) \Rightarrow (I)$  toma-se  $a < b$  quando, e somente quando, existe  $r \in K$  tal que  $b = a + r$ .

**Definição 2.** Um corpo ordenado é um corpo  $(K, +, \cdot)$  em que  $(I)$  ou  $(II)$  acontece.

**Observação 3.** Em um corpo ordenado  $K$  considera-se as definições dos vários tipos de intervalo, em completa analogia com as definições usuais que leitor considera em seu suposto conhecido  $\mathbb{R}$ .

**Observação:** Como a unidade de todo corpo ordenado satisfaz  $0 < 1$ , temos  $1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$  e o subconjunto de  $K$  formados por esses elementos é, portanto infinito. Mais precisamente, vamos mostrar como se pode considerar o conjunto  $\mathbb{N}$ , dos números naturais, naturalmente em  $K$ .

Temporariamente, indiquemos por  $1'$  o elemento unidade do corpo  $K$ . Definimos uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow K$  pondo  $f(1) = 1'$ ,  $f(2) = 1' + 1'$ , etc. A maneira correta de definir  $f$  é por indução:  $f(1) = 1'$  e  $f(m+1) = f(m) + 1'$ . Por indução verifica-se que  $f(m+n) = f(m) + f(n)$  e que (como todos os valores  $f(n)$  são positivos)  $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$ . Assim, a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow K$  define uma bijeção do conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais sobre um conjunto  $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$ , formado pelos elementos  $1'$ ,  $1' + 1'$ ,  $1' + 1' + 1'$ , etc. Identifica-se  $\mathbb{N}'$  como  $\mathbb{N}$  e considera os números naturais contidos em  $K$ . Temos então  $\mathbb{N} \subset K$  e voltamos a escrever  $1$ , em vez de  $1'$ .

Alternativamente, poderíamos definir  $\mathbb{N} \subset K$  como sendo

$$\mathbb{N} = \bigcap_{S \subset K} S,$$

com  $1 \in S$  e  $S$  um subconjunto indutivo, onde  $S$  ser indutivo significa que  $x \in S$  então  $x+1 \in S$ .

**Proposição 4.** *Num corpo ordenado  $K$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\mathbb{N} \subset K$  é ilimitado superiormente.
- (ii) Sendo  $X = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ , zero é o ínfimo do conjunto  $X$ .
- (iii) Dados  $a, b \in K$ , com  $a > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \cdot a > b$ .

Omitiremos a demonstração, ver referência [2]. As afirmações acima caracterizam o que se chama um corpo ordenado *arquimediano*.

### 3 Os Axiomas

**Teorema 5.** *Dizendo respeito a um corpo ordenado  $K$ , são equivalentes as seguintes afirmações.*

1. Todo cobertura de um intervalo fechado em  $K$  por intervalos abertos tem subcobertura finita.
2. Seja  $F$  um conjunto fechado e limitado de  $K$ . Toda cobertura de  $F$  por abertos admite uma subcobertura finita. (Outra forma de se dizer: todo subconjunto fechado e limitado de  $K$  é compacto.).
3. Todo subconjunto limitado e infinito de  $K$  possui ponto de acumulação.
4. Toda sequência limitada de  $K$  possui subsequência convergente.
5. i)  $K$  é sequencialmente completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.  
ii)  $K$  é arquimediano
6. Toda sequência monótona e limitada é convergente.
7. i) Toda sequência de intervalos encaixantes em  $K$  tem interseção não vazia.  
ii)  $K$  é arquimediano.
8.  $K$  é Conexo.
9. Todo subconjunto fechado e limitado não vazio de  $K$  possui máximo e mínimo.

10. Todo subconjunto de  $K$  não vazio e limitado superiormente tem supremo.

**Prova** (1)  $\Rightarrow$  (2): Seja  $F$  um conjunto qualquer fechado e limitado de  $K$ . Sendo  $F$  fechado,  $A = K - F$  é aberto. E sendo  $F$  limitado, existe um intervalo limitado  $[a, b]$  que contém  $F$ . Dada  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família de abertos tais que

$$F \subset \left( \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right), \text{ tem-se } F \subset [a, b] \subset \left( \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup A.$$

Agora, pela definição de conjunto aberto, temos que cada  $A_\lambda$  bem como  $A$  são uniões de intervalos abertos, digamos

$$A_\lambda = \bigcup_{j \in A_\lambda} I_j^\lambda \text{ e } A = \bigcup_{j \in A} I_j.$$

Então,

$$F \subset [a, b] \subset \bigcup_{j \in A_\lambda} I_j^\lambda \bigcup_{j \in A} I_j, \lambda \in L$$

fornece um cobertura de  $[a, b]$  por intervalos abertos. Tendo (1) como hipótese, podemos tomar uma subcobertura finita de  $[a, b]$

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_{j_i}^{\lambda_i} \bigcup_{j=1}^m I_j.$$

Como

$$I_{j_i}^{\lambda_i} \subset A_{\lambda_i} \text{ e } I_j \subset A, \text{ temos}$$

$$F \subset [a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A.$$

E, como nenhum ponto de  $F$  está em  $A$ , temos  $F \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . ■

**Prova** (2)  $\Rightarrow$  (3): Seja  $X \subset K$  um subconjunto limitado e infinito sem ponto de acumulação em  $K$ . Como  $X$  é limitado existe um conjunto  $[a, b]$  tal que  $X \subset [a, b]$ . Se  $X$  não tem ponto de acumulação, então para cada  $x \in [a, b]$ , existe um aberto  $I_x$ , contendo  $x$ , que não contém ponto de  $X - \{x\}$ . Em outras palavras temos  $I_x \cap X = \{x\}$  se  $x \in X$  e  $I_x \cap X = \emptyset$  se  $x \notin X$ .

Isto nos fornece uma cobertura aberta  $[a, b] \subset \bigcup_{x \in L} I_x$  da qual, por (2), podemos extrair uma subcobertura finita  $[a, b] \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \dots \cup I_{x_n}$ . Em particular essa reunião finita contém  $X$ .

Para cada  $x \in X$ , o único intervalo original que continha  $x$  era o próprio  $I_x$ . Segue então que para cada  $x \in X$ ,  $I_x \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \dots \cup I_{x_n}$ . Logo  $X$  é finito. Assim, supondo que  $K$  cumpre a condição (2), os únicos subconjuntos de  $K$  que não possuem pontos de acumulação em  $K$  são os finitos. ■

**Prova** (3)  $\Rightarrow$  (4): Dada uma sequência de pontos  $x_n \in K$ , há duas possibilidades: ou o conjunto  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  é finito ou é infinito. No primeiro caso, algum valor  $x_{n_1} = x_{n_2} = \dots$  deve repetir-se uma infinidade de vezes, o que nos dá uma sequência constante e, portanto, convergente de  $(x_n)$ . No segundo caso, a hipótese (3) nos dá  $a \in K$  um ponto de acumulação de  $X$ , ou seja, todo intervalo aberto  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  contém uma infinidade de pontos de  $X$ , e portanto, contém termos  $x_n$  com índices arbitrariamente grandes; assim  $a$  é limite de uma subsequência de  $(x_n)$ . ■

**Prova** (4)  $\Rightarrow$  (5): Mostremos primeiro o item i). Devemos mostrar que toda sequência de Cauchy em  $K$  é convergente. Para isso mostremos que:

(I) Toda sequência de Cauchy é limitada. De fato, seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy. Logo, tomando  $\epsilon = 1 > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1$ .

Em particular, temos  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_0+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1$ . Assim, tomando

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1} - 1\}, \quad M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1} + 1\}$$

obtemos,  $m \leq x_n \leq M$ , como queríamos.

(II) Como  $(x_n)$  é limitada, por (4) temos que  $(x_n)$  possui uma subsequência convergente, digamos que essa subsequência converge para  $a \in K$ . Mas se uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  possui uma subsequência  $(x_{n_k})$  convergindo para  $a \in K$  então  $\lim x_n = a$ .

Com efeito, como  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy, dado  $\epsilon \in K, \epsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$ . E como  $\lim x_{n_k} = a$ , temos que, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k > n_2 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  e  $n_{k_0} > n_0$ , temos que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| = |x_n - x_{n_{k_0}} + x_{n_{k_0}} - a| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como queríamos.

Mostremos agora ii). Se  $K$  não fosse arquimediano então a sequência  $\{n; n \in \mathbb{N}\} \subset K$  seria limitada e, por hipótese, possuiria uma subsequência  $\{n_l; l \in \mathbb{N}'\}$ , onde  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_l < \dots\}$ , convergente, digamos para  $L$ . Então dado  $\epsilon = \frac{1}{2}$  existiria  $N_0$  tal que  $n_l > N_0 \Rightarrow |x_{n_l} - L| < \frac{\epsilon}{2}$  e, portanto,  $|x_{n_{l_1}} - x_{n_{l_2}}| < |x_{n_{l_1}} - L| + |x_{n_{l_2}} - L| < \epsilon$  para  $n_{l_1}, n_{l_2} > N_0$ .

Como, no caso presente,  $x_{n_l} = n_l$  teríamos  $|x_{n_{l_1}} - x_{n_{l_2}}| = |n_{l_1} - n_{l_2}| \geq 1$ . Absurdo. Portanto  $K$  é arquimediano. ■

**Prova** (5)  $\Rightarrow$  (6): Seja  $(x_n)$  uma sequência monótona, digamos não-decrescente, e limitada, digamos  $|x_n| \leq M$ , mas que não é de Cauchy. Então existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $N_0$  tem-se  $m_0 > n_0 > N_0$  com  $x_{m_0} - x_{n_0} \geq \epsilon$ .

Para esse  $m_0$ , tem-se  $m_1 > n_1 > m_0$  com  $x_{m_1} - x_{n_1} > \epsilon$ . Prosseguindo desse modo, para todo  $l \in \mathbb{N}$  existem  $m_l > n_l > m_{l-1}$  tais que  $x_{m_l} - x_{n_l} > \epsilon$ . Assim, como  $(x_n)$  é não-decrescente, temos  $x_{m_l} - x_{n_0} = (x_{m_0} - x_{n_0}) + (x_{n_1} - x_{m_0}) + (x_{m_1} - x_{n_1}) + \dots + (x_{m_l} - x_{n_l}) \geq l\epsilon$ .

Como  $K$  é arquimediano podemos fazer  $l\epsilon > 2M$ , o que contradiz  $|x_n| \leq M$ . Portanto toda sequência monótona, digamos não-decrescente, é de Cauchy. Tendo (5) como hipótese, tal sequência é convergente. ■

**Prova** (6)  $\Rightarrow$  (7): Mostremos primeiro o item (i). Para  $n \in \mathbb{N}$  temos  $I_{n+1} \subset I_n$ , com  $I_n = [a_n, b_n]$ , o que significa que  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Podemos então escrever

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Notemos que a sequência formada pelos  $a_n$  é monótona não-decrescente e limitada por cada  $b_n$ , que por (6) é convergente. Do mesmo modo temos que a sequência formada pelos  $b_n$  é monótona não-crescente e limitada por cada  $a_n$ , assim por (6) também é convergente. Digamos que  $\lim a_n = a$  e  $\lim b_n = b$ .

Como  $(a_n)$  é uma sequência não-decrescente, temos que  $a_n \leq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Do mesmo modo, como  $b_n$  é uma sequência não-crescente, temos que  $b \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observemos que  $a \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  pois, do contrário, se  $b_{n_0} \leq a$  para algum  $n_0$ , então, dado  $\epsilon = a - b_{n_0}$ , existiria  $n_1$  tal que,  $|a - a_{n_1}| < a - b_{n_0}$ . Como  $(a_n)$  é não-decrescente,  $a_{n_1} > b_{n_0}$ . Do mesmo modo mostra-se que  $a_n \geq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , portando  $a \leq b$ .

Concluimos que  $a$  e  $b$  (podendo ser  $a = b$ ) pertencem a todos os  $I_n$ , donde  $[a, b] \subset I_n$  para cada  $n$ . Logo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supset [a, b] \neq \emptyset.$$

Para mostrar que  $K$  é arquimediano, segue como mostrado em (4)  $\Rightarrow$  (5) item (ii). ■

**Prova (7)  $\Rightarrow$  (8):** Suponhamos  $K = A \cup B$  uma cisão não trivial. Seja  $a_1 \in A$  e  $b_1 \in B$  com, digamos  $a_1 < b_1$ , e seja  $I_1 = [a_1, b_1]$ . Se  $[a_1, \frac{b_1+a_1}{2}]$  contém algum ponto de  $B$ , digamos  $b_2$ , considere  $I_2 = [a_1, b_2]$ , do contrário consideremos  $I'_2 = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ . Se considerarmos  $I_2$  e  $[a_1, \frac{a_1+b_2}{2}]$  contiver ponto de  $B$ , digamos  $b_3$ , consideramos  $I_3 = [a_1, b_3]$ , do contrário, consideramos  $I'_3 = [\frac{a_1+b_2}{2}, b_3]$ . Prosseguindo, em qualquer caso obtemos uma sequência de intervalos encaixantes em que os extremos esquerdos pertencem à  $A$  e os direitos à  $B$ . Se  $|I_n| \rightarrow 0$  seja  $x$  o ponto comum a essa interseção. Digamos que  $x \in A$ . Então como  $A$  é aberto existe  $\epsilon > 0$  tal que  $[x, x + \epsilon) \in A$ . Tomando  $n$  tal que  $\frac{b_1-a_1}{2^n} < \epsilon$  e considerarmos  $I_r$  (ou  $I'_r$ ) para  $r > n$ , vemos que isso é impossível. Como o conjunto  $B$  também é aberto, o mesmo argumento se aplica. ■

**Prova (8)  $\Rightarrow$  (9):** Seja  $F \subset (-a, a)$  um subconjunto fechado e limitado de  $K$ . Suponha que  $F$  não tenha um elemento máximo. Considere

$$J = \bigcap_{x \in F} (x, \infty).$$

Afirmamos que  $J$  é aberto. De fato. Dado  $y \in J$ , temos que  $y > x$  para todo  $x \in F$ . Se toda vizinhança de  $y$  interceptasse  $F$ , como  $F$  é fechado, teríamos  $y \in F$  contradizendo o fato de  $y > x$  para todo  $x \in F$ . Então existe uma vizinhança  $(y - \epsilon, y + \epsilon)$  de  $y$  que não intercepta  $F$ . Afirmamos que  $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset J$ . Do contrário se algum  $y_0 \in (y - \epsilon, y + \epsilon)$  não pertencesse a  $J$  então  $y_0 \leq x_0$  para algum  $x_0 \in F$ , de modo que a vizinhança  $(y - \epsilon, y + \epsilon)$  interceptaria  $F$  em  $x_0$ , logo  $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset J$ . Como  $a \in F$ , temos  $J$  aberto e não vazio.

Considere agora

$$H = \bigcup_{x \in F} (-\infty, x).$$

Claro que,  $-a \in H$  e  $H$  é aberto.

Afirmamos que  $J \cup H = K$ . De fato. Dado  $k \in K$ , se  $k > x$  para todo  $x \in F$ , então  $k \in J$ . Se  $k \leq x_0$  para algum  $x_0 \in F$ , então como  $x_0$  não é máximo, existe  $x_1 \in F$  tal que  $k \leq x_0 < x_1$  e portanto  $k \in (-\infty, x_1) \subset H$ , a outra inclusão é imediata. Temos também que  $J \cap H = \emptyset$ . De fato. Do contrário, se existisse um  $s \in J \cap H$ , então  $s \in J$ , ou seja,  $s > x$  para todo  $x \in F$  e  $s \in H$ , ou seja,  $s < x$  para todo  $x \in F$ , o que é um absurdo.

Assim temos que  $K$  é desconexo o que é uma contradição. ■

**Prova** (9)  $\Rightarrow$  (10): Seja  $X$  um conjunto limitado superiormente. Se  $X$  é fechado, imediato, pois  $X$  terá um elemento máximo e um mínimo. Do contrário, considere  $\bar{X}$ . Mostremos que  $\bar{X}$  também é limitado. De fato. Como  $X$  é limitado existe um intervalo limitado  $[a, b]$  tal que  $X \subset [a, b]$ . Seja  $c$  o ponto médio deste intervalo e considere  $r_1 = |b - c|$ .

Considere agora  $[a_1, b_1]$  um intervalo de centro em  $c$ , mas que  $r_2 = |b_1 - c| > r_1$  assim  $[a, b] \subset [a_1, b_1]$ . Seja  $x$  um ponto que não pertença ao intervalo  $[a_1, b_1]$ , tomando  $\epsilon < |r_2 - r_1|$ , temos que  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap X = \emptyset$ , logo nenhum ponto  $x \notin [a_1, b_1]$  é ponto aderente a  $X$ , assim  $\bar{X}$  é limitado por  $[a_1, b_1]$ .

Logo como  $\bar{X}$  é fechado temos que  $\bar{X}$  tem elemento máximo e um mínimo. Seja  $y$  o elemento máximo de  $\bar{X}$ . Afirmamos que  $y = \sup X$ .

Suponha que  $y$  não seja uma cota superior de  $X$ . Assim, existe  $y_0 \in X$  tal que  $y_0 > y$ . Mas se  $y_0 \in X \subset \bar{X}$ , temos que  $y_0 \in \bar{X}$ . Como  $y_0 > y$  tem-se que  $y$  não é o máximo, o que contradiz. Logo  $y$  é uma cota superior de  $X$ .

Mostremos agora que  $y$  é a menor das cotas superiores. Se  $y$  não fosse a menor das cotas superiores de  $X$ , então existiria um  $\epsilon > 0$  tal que  $y - \epsilon$  seria cota superior de  $X$ , ou seja,  $y - \epsilon \geq z \forall z \in X$ . Assim para esse  $\epsilon$ ,  $(y - \epsilon, y + \epsilon) \cap X = \emptyset$ , isto é  $y$  não é aderente a  $X$ . O que é contradiz. Portanto  $y$  é a menor das cotas superiores. ■

**Prova** (10)  $\Rightarrow$  (1): Seja  $X$  o conjunto dos pontos  $x \in [a, b]$  tais que o intervalo  $[a, x]$  pode ser coberto por um número finito de intervalos abertos  $I_\lambda$ , isto é,  $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$ . Temos que  $X \neq \emptyset$ , por exemplo,  $a \in X$ . Seja  $c = \sup X$ . Tem-se que  $c \in [a, b]$ . Afirmamos que  $c \in X$ . De fato, existe algum  $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$  tal que  $c \in I_{\lambda_0}$ . Sendo  $\alpha < c$ , deve existir  $x \in X$  tal que  $\alpha < x < c$ . Logo  $x \in I_{\lambda_0}$ . Mas como  $x \in X$ , temos  $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$  assim  $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ , o que prova que  $c \in X$ . Mostremos agora que  $c = b$ . Do contrário, se  $c < b$ , existiria algum  $c' \in I_{\lambda_0}$  com,  $c < c' < b$ . Então  $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$  donde  $c' \in X$ , o que é absurdo, pois  $c' > c$  e  $c = \sup X$ . Vemos portanto que o intervalo  $[a, b]$  está contido numa família finita de intervalos  $I_\lambda$ . ■

## 4 Observações finais

1. À época que iniciamos o trabalho, e bom tempo depois disso, não tínhamos [1] em mãos. Então decidimos buscar uma ordenação das afirmações, seguindo a qual aproveitaríamos certos resultados bem conhecidos, e que também evitasse certas repetições; sem o cuidado com isso último perderíamos a ideia de uma demonstração na forma cíclica. Resultou que mesmo aquelas afirmações que já aparecem em [1], aparecem aqui noutra ordem.
2. Em [1] o leitor encontrará considerações sobre a necessidade de supor ordem arquimediana nos ítems que supusemos. Na verdade, gostaríamos de encorajar o leitor a ter contato com essa referência, por razões que, então, lhe serão óbvias.

**Abstract:** From the axiomatic point of view, there are several possibilities to characterize what we wish to understand as the field of real numbers. In this work we present ten axioms as possibilities to play that role.

**Keywords:** Ordered fields; Archimedean order; sequences

## Referências Bibliográficas

- [1] Cohen, L.W., *The Structure of the Real Number System*, Van Nostrand Reinhold Comp., 1963.
- [2] Lima, E.L., *Curso de Análise Vol 1*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [3] Lima, E.L., *Análise Real Funções de uma Variável Vol 1*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [4] Montresor, C.L., *O Corpo dos Números Reais é Completo: Em que sentido?* In: Boletim de Iniciação Científica em Matemática - BICMat. Vol IV. Rio Claro: IGCE, Departamento de Matemática - UNESP, 2007.



## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA – BICMAT

### *Orientação aos autores*

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem  $\text{\LaTeX}$ , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em [www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat), assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.

