

# MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III

## Agenda 1

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

### Informações Gerais Sobre o Curso:

- O professor disponibiliza uma página no domínio do IME - USP com diversos dados e materiais sobre a disciplina, [www.ime.usp.br/~jeancb/mat2455.html](http://www.ime.usp.br/~jeancb/mat2455.html), com todos os materiais do curso e que será atualizada ao longo do semestre.
- As aulas presenciais serão ministradas às segundas-feiras e às quartas-feiras, das 7h30min às 9h10min para a TURMA 9 e das 9h20min às 11h00min para a TURMA 10.
- A avaliação consistirá de três provas de múltipla escolha,  $P_1$  (a ser aplicada em 3 de maio),  $P_2$  (a ser aplicada em 7 de junho) e  $P_3$  (a ser aplicada em 12 de julho), sendo a média final da avaliação 1,  $M_1$ , dada por:

$$M_1 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$$

- A prova substitutiva,  $P_{\text{Sub}}$  (a ser aplicada em 19 julho) será aberta e poderá somente *melhorar* a nota do aluno, substituindo necessariamente a menor das notas obtidas. Assim, se  $P_k = \min\{P_1, P_2, P_3\}$ , a nota do aluno após a substitutiva será:

$$M_{\text{Sub}} = \frac{\sum_{i \neq k} P_i + P_{\text{Sub}}}{3}$$

*contanto que*  $P_{\text{Sub}} > P_k$ . Caso contrário,  $M_{\text{Sub}} = M_1$ .

- A prova de recuperação,  $P_{\text{Rec}}$  (a ser aplicada em 26 de julho), garantida ao aluno que obtiver  $3 \leq M_{\text{Sub}} < 5$ , terá peso 1 na média final da avaliação 2,  $M_2$ , dada por:

$$M_2 = \frac{\max\{M_1, M_{\text{Sub}}\} + P_{\text{Rec}}}{2}$$

---

\*jeancb@ime.usp.br

- Todo aluno tem o direito de revisão de provas e trabalhos escritos, a qual deverá ser solicitada ao próprio professor responsável pela disciplina em questão – e que será feita na presença do aluno (cf. parágrafos 1º e 2º do artigo 81 do Regimento Geral da USP).
- Segundo o artigo 82 do Regimento Geral da USP, a presença às aulas e provas é obrigatória;
- Conforme decisão da USP, nas Diretrizes aos Dirigentes das Unidades, o uso da máscara facial é obrigatório em todos os ambientes da Universidade, bem como a comprovação de imunização contra a *covid-19*. Mais informações no sítio <https://retornoseguro.usp.br>

## Bibliografia

- APOSTOL, Tom M. **Calculus: Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades**. 2. ed. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1978. 813 p. v. 2. ISBN 84-291-5003.
- BOUCHARA, Jacques C.; CARRARA, Vera Lúcia; HELLMEISTER, Ana Catarina P.; SALVITTI, Reinaldo. **Cálculo Integral Avançado**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2016. 371 p. ISBN 978-85-314-0370-5.
- BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo Diferencial e Integral**. 1. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda., 2000. 349 p. v. 2. ISBN 85-346-1266-8.
- PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.
- CRAIZER, Marcos; TAVARES Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.
- FINNEY, Ross L.; WEIR Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: George B. Thomas Jr.** 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. 570 p. v. 2. ISBN 978-85-88639362.
- MENDES, Claudio Martins. **Cálculo III**. São Carlos: [s. n.], 1988.
- PISKUNOV, Nikolai Semenovich. **Differential and Integral Calculus**. 1. ed. União das Repúblicas Soviéticas Socialistas: MIR Publisher, 1960. 895 p. ISBN 19601895.
- SPIVAK, Michael. **Cálculo en Variedades**. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1988. 134 p. ISBN 978-84-291-5142-8.

## Introdução

Este curso trata, principalmente, de estabelecer os principais conceitos sobre a integração de funções de duas ou mais variáveis em regiões do plano ou do espaço, bem como curvas e superfícies.

O primeiro tema a ser abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 2455) será o de integral múltipla – mais especificamente, integrais duplas e triplas. Este conceito generaliza o conceito da integral de funções reais de uma variável real a valores reais, compartilhando de muitas de suas propriedades, conforme veremos ao longo do curso.

A motivação para introduzir as integrais duplas e triplas pode, dentre muitas outras formas, ser geométrica. Para funções contínuas de duas variáveis que somente assumem valores não-negativos em algum retângulo do plano - ou paralelepípedo, no caso de funções de três variáveis - podemos interpretar a integral dupla como sendo o volume do sólido compreendido sob o gráfico de  $f$ , o plano  $z = 0$  e os planos determinados pelos lados do retângulo  $R$ . Veremos que, sob a hipótese de continuidade da função  $f$  em  $R$ , tal volume sempre existe, e pode ser calculado como limite de certas somas - denominadas “somas de Riemann” - que aproximam o volume do sólido. Tal volume, quando existe, é denominado por “a integral dupla de  $f$  em  $R$ ”, sendo a função  $f$  dita “integrável” - ou, mais especificamente, “Riemann-integrável”.

Nas aulas apresentaremos, sem demonstração, um teorema (**Teorema 9**) que nos fornece uma condição *necessária e suficiente* para que uma função limitada definida em um retângulo seja integrável. Tal condição diz respeito ao “tamanho do conjunto das descontinuidades da função”. Apresentaremos diversas propriedades que as integrais múltiplas compartilham com as integrais definidas do Cálculo I (linearidade, monotonicidade e aditividade).

A fim de usar o que conhecemos sobre a integração de funções de uma variável real a valores reais, introduziremos o **Teorema de Fubini** – que, em linhas gerais, nos permite calcular, sob certas hipóteses, integrais múltiplas como integrais iteradas, *i.e.*, mediante a resolução de uma sequência de integrais simples.

Veremos como calcular integrais duplas em regiões mais gerais do que simples retângulos, chamadas de conjuntos “Jordan-mensuráveis”. Usaremos integrais duplas para calcular a área de tais regiões, definiremos o “valor médio de uma função de duas variáveis reais a valores reais”, calcularemos centros de massa e momentos de inércia.

Ao final, apresentamos um apêndice (de leitura facultativa) que delinea a teoria de integração segundo Riemann, para aqueles que desejem se aprofundar no tema. Em particular, exhibe-se um exemplo de função limitada que não é Riemann-integrável.

## O Teorema do Valor Médio para Integrais

Apresentamos, brevemente, um teorema visto no curso de Cálculo II que será usado frequentemente ao longo do curso, o:

**Teorema 1 (Teorema do Valor Médio para integrais).** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então existe  $c \in ]a, b[$  tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

*Demonstração.* Sendo  $f$  contínua,  $f$  é integrável. Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$ . Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe  $c \in ]a, b[$  tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$$

□

## A soma dos $n$ primeiros quadrados

A fim de compreendermos melhor o que entendemos por “soma de Riemann”, apresentaremos um exemplo. Para isto, precisaremos da fórmula da soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais.

**Teorema 2.** Vale, para qualquer  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , que:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

*Demonstração.* Temos, no mínimo, dois modos de demonstrar a identidade acima: por indução e por indução. Apresentamos a seguir as duas demonstrações, em benefício do leitor.

1º modo: por indução: Para  $n = 2$  temos, naturalmente,

$$\sum_{i=1}^2 i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot (2 + 1) \cdot (4 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot (n-1) + 1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Temos, assim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

2º modo: por dedução:

Temos que  $\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3]$  é, por um lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n [i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$$

e, por outro lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^3 - \sum_{i=1}^n i^3 = (2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = (n+1)^3 - 1$$

de modo que:

$$\begin{aligned}3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 &= (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \\ 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n &= n^3 + 3n^2 + 3n\end{aligned}$$

e assim:

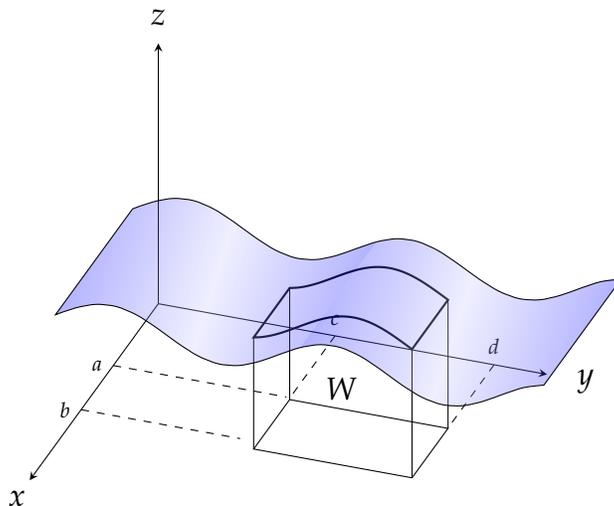
$$\begin{aligned}3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n}{2} - \frac{3n^2 + 3n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\end{aligned}$$

□

## 1 Integrais Múltiplas: a integral dupla e sua interpretação como volume

Sejam  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  intervalos da reta e seja  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in [a, b]) \& (y \in [c, d])\}$  o retângulo por eles definido. Seja, ainda,  $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e não-negativa, ou seja, tal que:

$$(\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d])(f(x, y) \geq 0).$$



Queremos, sempre que possível, calcular o volume da região  $W$ , compreendida sob o gráfico de  $f$ ,  $\text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in R\}$ , sobre o plano  $z = 0$  e os planos  $x = a, x = b, y = c$  e  $y = d$ . Assumindo que:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \leq x \leq b) \& (c \leq y \leq d) \& (0 \leq z \leq f(x, y))\}$$

possua volume, este é chamado a “integral dupla de  $f$  sobre  $R$ ” e é denotado por:

$$\iint_R f(x, y) dA \text{ ou } \iint_R f(x, y) dx dy$$

**Exemplo 3.** Consideremos a função  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto k, k$  constante positiva. Então:

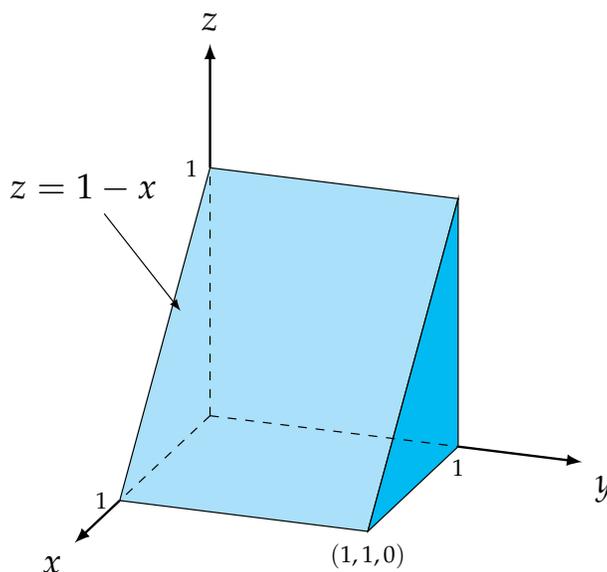
$$\iint_R k dx dy = k \cdot (b - a) \cdot (d - c),$$

que é o volume do paralelepípedo reto de base  $[a, b] \times [c, d]$  e altura  $k > 0$ .

**Exemplo 4.** Consideremos a função  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1 - x$ . Tem-se:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,1]} (1 - x) dx dy = \frac{1}{2},$$

que é o volume do prisma triangular reto cuja base é o triângulo de arestas  $\{(x, 0, 1 - x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1]\}, \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1]\}$  e  $\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1]\}$  e cuja altura é 1.



## 2 Integral Dupla sobre um Retângulo

Em seguida apresentaremos o procedimento para o cálculo de volumes por meio das “integrais de Riemann duplas”, ou seja, apresentaremos o contexto (mais geral, em termos de dimensão) em que podemos formular o processo de integração (segundo Riemann) para funções de duas ou mais variáveis.

### 2.1 Partições Regulares de Intervalos e Retângulos

Recordemos a seguinte definição da teoria de integração de funções de uma variável real a valores reais:

**Definição 5.** Dado um intervalo  $[a, b]$ , uma *partição regular de ordem  $n$*  é um conjunto (ordenado) de  $(n + 1)$  pontos, sendo o primeiro destes o ponto  $a$  e o último destes o ponto  $b$ ,  $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ , que denotaremos, a fim de dar mais clareza, por  $\mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ , tal que:

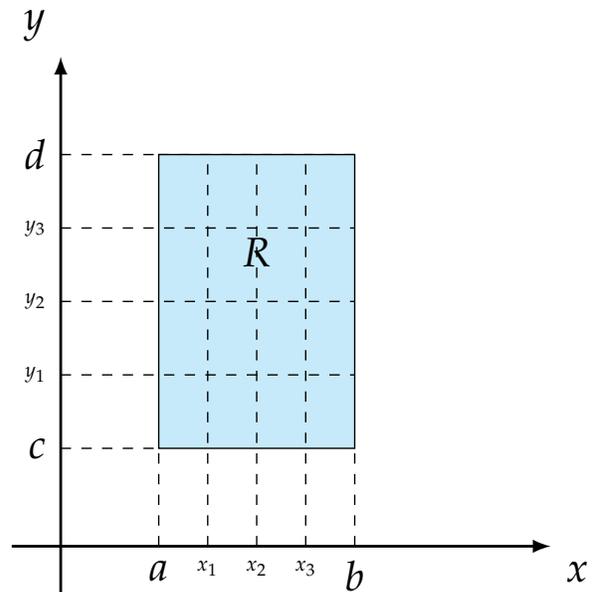
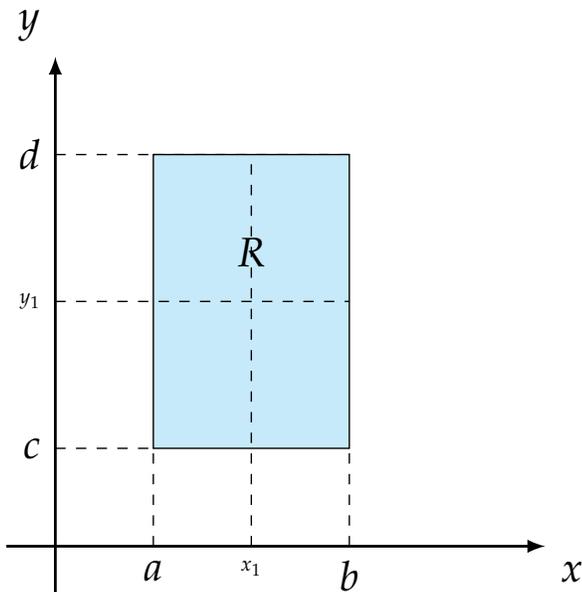
$$(\forall i \in \{0, \dots, n - 1\}) \left( x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n} \right)$$

Vamos generalizar o conceito de partição regular de ordem  $n$  para o caso de retângulos – que são os primeiros conjuntos planos sobre os quais efetuamos o processo de integração.

**Definição 6.** Uma *partição regular de ordem  $n$*  do retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  é o produto cartesiano de uma partição regular de ordem  $n$  do intervalo  $[a, b]$ ,  $\mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)} = \{a = x_0 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  por uma partição regular de ordem  $n$  do intervalo  $[c, d]$ ,  $\mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)} = \{c = y_0 < \dots < y_{n-1} < y_n = d\}$ , ou seja:

$$\mathcal{P}_R^{(n)} = \mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)} \times \mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)} = \{(x_i, y_j) \in R \mid i, j \in \{0, \dots, n\}\}$$

Abaixo ilustramos uma partição regular de ordem 2 e de ordem 4 do retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$



## 2.2 Somas de Riemann

Sejam  $f : [a, b] \times [c, d] = R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)} = \{a = x_0 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  uma partição regular de ordem  $n$  de  $[a, b]$  e  $\mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)} = \{c = y_0 < \dots < y_{n-1} < y_n = d\}$  uma partição regular de ordem  $n$  de  $[c, d]$ , de modo que  $\mathcal{P}_R^{(n)} = \mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)} \times \mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)}$  é uma partição regular de ordem  $n$  do retângulo  $R$ . Seja, para  $(i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}$ ,  $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  o  $(i, j)$ -ésimo subretângulo determinado por  $\mathcal{P}_R^{(n)}$ . Escolhendo um ponto  $c_{ij} = (x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$  qualquer, formamos a soma:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y \right) = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A,$$

onde  $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ ,  $\Delta y = y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n}$ . Uma soma deste tipo é chamada **soma de Riemann de  $f$  sobre  $R$** .

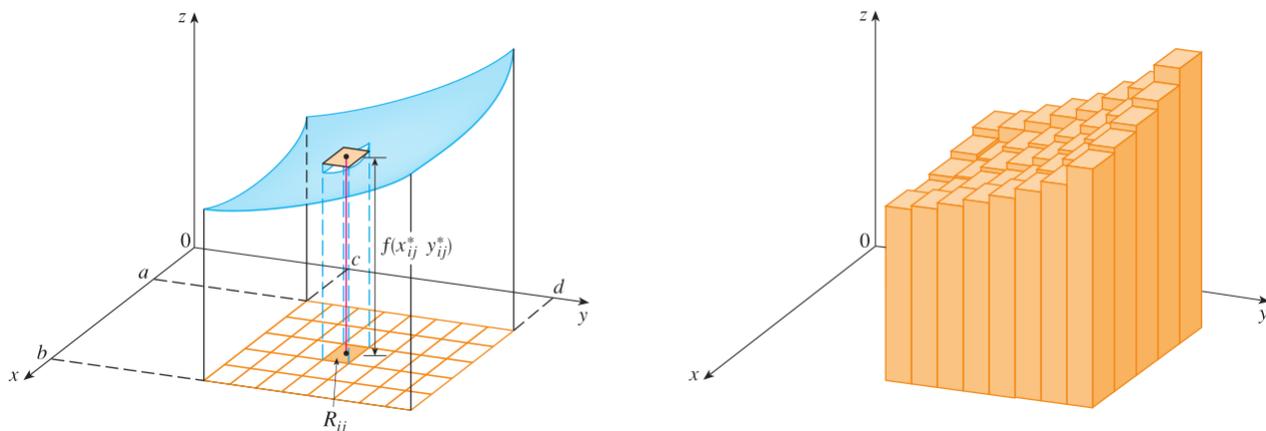


Figura 1: Ilustração dos principais elementos constitutivos de uma soma de Riemann.

**Definição 7.** Se a sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de somas de Riemann da função  $f$  tem limite  $s \in \mathbb{R}$  conforme  $n \rightarrow \infty$  e se este limite independe da escolha dos pontos  $c_{ij} = (x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  nos subretângulos  $R_{ij}$ , isto é:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A,$$

dizemos que  $f$  é **Riemann-integrável sobre  $R$** , e escrevemos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A$$

No link <https://www.geogebra.org/m/brYWAsTY> você poderá visualizar melhor como se dá o processo de “refinamento” das somas de Riemann de uma função de duas variáveis reais a valores reais.

A demonstração do resultado a seguir requer alguns conceitos que não são vistos, em geral, num primeiro curso de Cálculo, de modo que não nos preocuparemos em demonstrá-lo aqui.

**Teorema 8.** *Toda função contínua definida em um retângulo  $R$  é Riemann-integrável.*

O teorema acima nos diz, entre outras coisas, que sempre que  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, o limite das somas de Riemann conforme  $n \rightarrow \infty$  existirá independentemente da escolha que fizermos de  $c_{ij} \in R_{ij}$ . Há uma condição menos restritiva que uma função definida em um retângulo deve satisfazer a fim de ser Riemann-integrável, dada no seguinte:

**Teorema 9. [Critério de Integrabilidade segundo Riemann]** *Seja  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ :*

$$\text{Desc}(f) = \{(x_0, y_0) \in R \mid f \text{ é descontinua em } (x_0, y_0)\}$$

*pode ser descrito como uma união finita de gráficos de funções contínuas, então  $f$  é Riemann-integrável sobre  $R$ .*

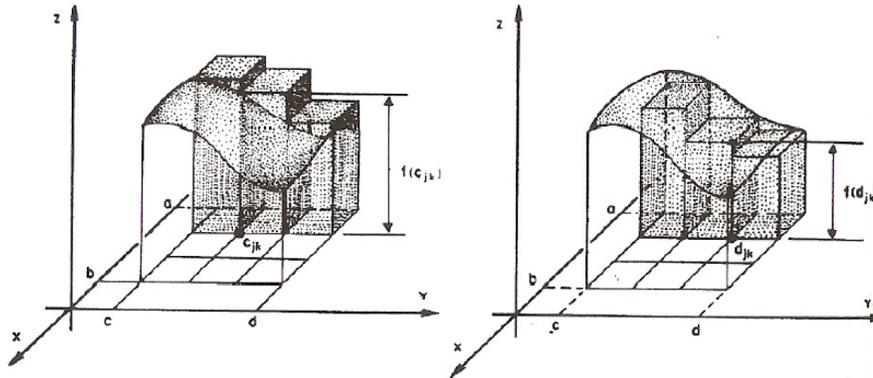
Sejam  $f : [a, b] \times [c, d] = R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva,  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \leq x \leq b) \& (c \leq y \leq d) \& (0 \leq z \leq f(x, y))\}$ . Se tomarmos  $c_{ij} = (x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$  como sendo um dos pontos em que  $f$  atinge um máximo global, então  $f(c_{ij})\Delta x\Delta y$  representará o volume da caixa retangular de base  $R_{ij}$  e altura  $f(c_{ij})$ . A soma:

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij})\Delta x\Delta y$$

representa o volume do sólido circunscrito à região  $W$ . Analogamente, se tomarmos  $d_{ij} = (x_{ij}^\dagger, y_{ij}^\dagger) \in R_{ij}$  como sendo um ponto onde  $f$  atinge um mínimo global em  $R_{ij}$ , então a soma:

$$s_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(d_{ij})\Delta x\Delta y$$

representará o volume do sólido inscrito à região  $W$ .



Pelo **Teorema 8**, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

mostrando que os volumes dos sólidos circunscrito e inscrito tendem para o mesmo valor  $s$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, a região  $W$  tem volume finito e igual a  $s$ .

**Exemplo 10.** Calcular  $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy$ , onde  $R = [0, 1] \times [0, 1]$

**Solução:** Como  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é contínua em  $R$ , segue do **Teorema 8** que  $f$  é integrável sobre  $R$  e:

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y,$$

sendo que este limite independe da escolha de  $c_{ij} \in R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , onde:

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_i = \frac{i+1}{n} < \dots < x_n = 1$$

$$0 = y_0 < y_1 = \frac{1}{n} < \dots < y_j = \frac{j+1}{n} < \dots < y_n = 1$$

e  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$ . Como a escolha do ponto  $c_{ij} \in R_{ij}$  é irrelevante para o valor do limite das somas de Riemann, tomemos, por exemplo:

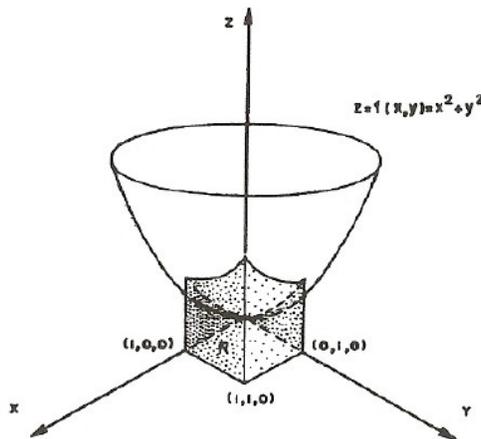
$$c_{ij} = (x_{i+1}, y_{j+1}) = \left( \frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n} \right)$$

e teremos:

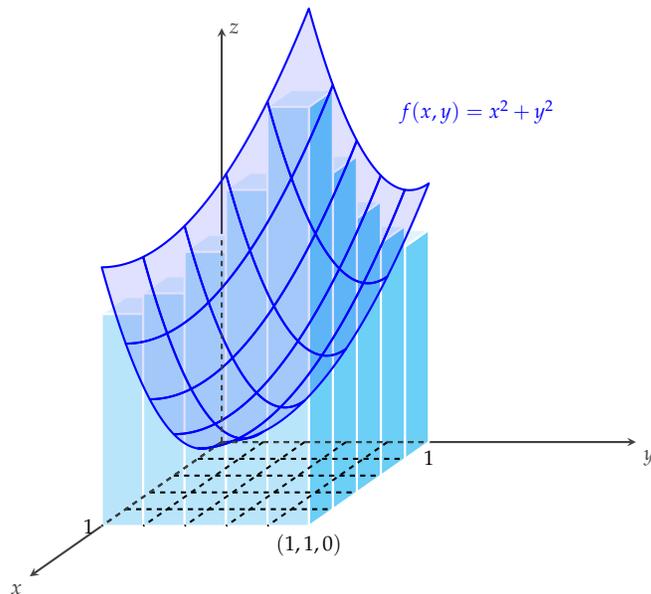
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{i+1}, y_{j+1}) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j=0}^{n-1} (x_{i+1}^2 + y_{j+1}^2) = \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (x_1^2 + y_{j+1}^2) + \sum_{j=0}^{n-1} (x_2^2 + y_{j+1}^2) + \cdots + \sum_{j=0}^{n-1} (x_n^2 + y_{j+1}^2) \right] = \frac{1}{n^2} \cdot n \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} y_{j+1}^2 \right) = \\
&= \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{i+1}{n} \right)^2 = \frac{2}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Tem-se, portanto, que:

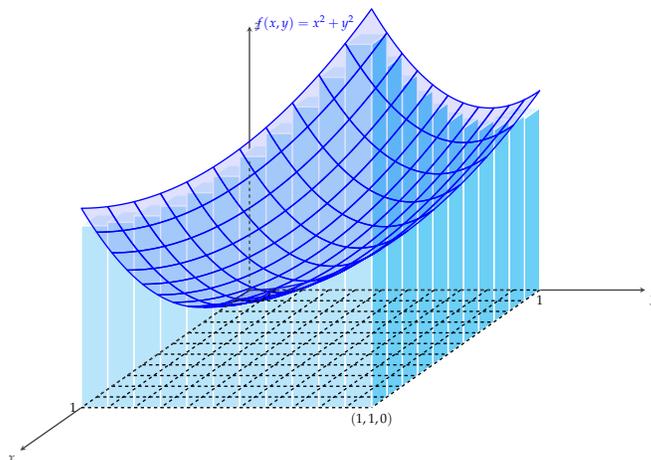
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2} = \frac{2}{3}.$$



Veja abaixo as aproximações sucessivas da região cujo volume queremos calcular por reuniões de prismas. Abaixo tem-se a aproximação gerada por uma partição regular de ordem 5:



Note o aspecto da aproximação gerada por uma partição regular de ordem 10 do volume sob a superfície:



O método do cálculo da integral dupla via limite de somas de Riemann, conforme vimos anteriormente, pode se mostrar bastante trabalhoso. Para calcular  $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ , por exemplo, nós precisamos conhecer uma fórmula para o somatório dos  $n$  primeiros quadrados. No caso geral, para aplicarmos o processo descrito acima, precisaríamos de fórmulas para os somatórios das imagens da função estudada em pontos do domínio - o que nem sempre pode ser feito, como é o caso da função  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  (não temos uma fórmula fechada para  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ ), e de muitas outras.

### 3 Propriedades da Integral de Riemann

Da definição de integral dupla como limite de somas de Riemann e dos teoremas sobre limites, podemos deduzir algumas propriedades fundamentais da integral dupla. Estas propriedades são, essencialmente, as mesmas da integral de uma função real de uma variável real.

**Teorema 11 (Linearidade).** *Sejam  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis. Então a função:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f + \beta \cdot g : R \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y) \end{aligned}$$

é Riemann-integrável em  $R$  e vale:

$$\iint_R (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x, y) dx dy = \alpha \cdot \iint_R f(x, y) dx dy + \beta \cdot \iint_R g(x, y) dx dy$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in R \mid i, j \in \{0, \dots, n\}\}$  uma partição regular de ordem  $n$  do retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Como  $f$  e  $g$  são integráveis, para qualquer escolha de  $c_{ij} \in R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$  teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \iint_R f(x, y) dx dy$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \iint_R g(x, y) dx dy$$

onde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ .

Temos, das propriedades aritméticas dos limites, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\alpha \cdot f)(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\beta \cdot g)(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \cdot \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y =$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \alpha \cdot \iint_R f(x, y) dx dy + \beta \cdot \iint_R g(x, y) dx dy$$

Ademais, tais limites independem da escolha do  $c_{ij} \in R_{ij}$ , uma vez que as funções  $f$  e  $g$  são Riemann-integráveis.  $\square$

**Teorema 12 (Monotonicidade).** *Sejam  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo,  $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $R$  tais que para todo  $(x, y) \in R$  valha  $f(x, y) \leq g(x, y)$ . Então:*

$$\iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_R g(x, y) dx dy$$

*Demonstração.* Dada qualquer partição regular de ordem  $n$  de  $R$ , digamos  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in R \mid i, j \in \{0, \dots, n\}\}$ , temos, para qualquer escolha de  $c_{ij} \in R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ , que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \iint_R f(x, y) dx dy$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \iint_R g(x, y) dx dy$$

Como para qualquer que seja  $c_{ij} \in R_{ij}$  tem-se  $f(c_{ij}) \leq g(c_{ij})$ , de modo que:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \leq \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Pela conservação do sinal no limite, temos que:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n-1} g(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \iint_R g(x, y) dx dy$$

□

**Teorema 13 (Aditividade).** *Se o retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  é subdividido em  $n$  subretângulos,  $R_1, \dots, R_n$  de tal forma que  $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ <sup>a</sup> e  $R = \cup_{i=1}^n R_i$  se para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é uma função integrável em  $R$ , então  $f \upharpoonright_{R_i}$  é integrável em  $R_i$ , então:*

$$f : R = \cup_{i=1}^n R_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f \upharpoonright_{R_i}(x, y) \text{ se } (x, y) \in R_i$$

então  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável em  $R$  e vale:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{R_i} f \upharpoonright_{R_i}(x, y) dx dy$$

<sup>a</sup>na verdade não é estritamente necessário que  $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ , basta que para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tenhamos a área de  $R_i \cap R_j$  igual a zero, ou seja, que  $R_i \cap R_j$  tenha “medida nula”.

*Demonstração.* A prova deste resultado é feita por indução no número de subretângulos. No entanto, o mecanismo do porquê da validade do resultado fica claro na demonstração para o caso de subdivisão em dois subretângulos, que apresentamos a seguir.

Suponha, primeiramente, que  $R = R_1 \cup R_2$  com  $\text{int}(R_1) \cap \text{int}(R_2) = \emptyset$ . Uma tal decomposição de  $R$  em dois subretângulos só pode ser da forma  $R_1 = [a, \alpha] \times [c, d]$  e  $R_2 = [\alpha, b] \times [c, d]$  ou da forma  $R_1 = [a, b] \times [c, \beta]$  e  $R_2 = [a, b] \times [\beta, d]$ .

Suponhamos que seja o primeiro caso,  $R_1 = [a, \alpha] \times [c, d]$  e  $R_2 = [\alpha, b] \times [c, d]$ . Dada qualquer partição  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in R \mid (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) \& (c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d)\}$  de  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $x_{i_0} = \alpha$  para algum  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$  determina uma partição  $\mathcal{P}_1 = \{(x_i, y_j) \in R \mid i \in \{1, \dots, i_0\}, j \in \{0, \dots, n\}\}$  de  $R_1$  e  $\mathcal{P}_2 = \{(x_i, y_j) \in R \mid i \in \{i_0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, n\}\}$  de  $R_2$ . Temos, assim:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i, j=1}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1}^{i_0, n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=i_0, j=1}^{n-1, n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y = \\ &= \iint_{R_1} f \upharpoonright_{R_1} (x, y) dx dy + \iint_{R_2} f \upharpoonright_{R_2} (x, y) dx dy, \end{aligned}$$

onde  $c_{ij} \in R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  é um ponto qualquer. □

## 4 O Teorema de Fubini

Conforme vimos, o cálculo de integrais duplas usando limites de somas de Riemann é, geralmente, de pouco valor prático, em virtude do desconhecimento de fórmulas fechadas, em geral, para os somatórios de imagens das funções envolvidas. O **Teorema de Fubini** nos fornece, dentre outras várias consequências, um modo prático de calcular algumas destas integrais duplas através de dois cálculos consecutivos de integrais simples. Essas integrais simples consecutivas se chamam *integrais iteradas*.

**Teorema 14 (Teorema de Fubini).** *Sejam  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo e  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então:*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que:

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Para cada  $x \in [a, b]$ , definimos:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Dividindo o intervalo  $[c, d]$  mediante uma partição regular de ordem  $n$ , digamos  $\mathcal{P}_{[c, d]}^{(n)} = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d\}$ , da aditividade da integral para funções reais de uma variável real, temos:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy$$

Agora, fixando  $\underline{x} \in [a, b]$ , aplicamos o Teorema do Valor Médio para Integrais à função:

$$\begin{array}{ccc} \phi_{\underline{x}} : [y_k, y_{k+1}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(\underline{x}, y) \end{array}$$

de modo que para qualquer  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  existe  $Y_k(\underline{x}) \in [y_k, y_{k+1}]$  tal que:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \phi_{\underline{x}}(y) dy = \phi_{\underline{x}}(Y_k(\underline{x})) \cdot (y_{k+1} - y_k) = f(\underline{x}, Y_k(\underline{x})) \cdot (y_{k+1} - y_k)$$

Deste modo, temos:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \sum_{k=0}^{n-1} f(\underline{x}, Y_k(\underline{x})) \cdot \Delta y \quad (1)$$

Desejamos, agora, obter uma expressão para:

$$\int_a^b F(x) dx$$

Seja  $\mathcal{P}_{[a, b]}^{(n)} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ . Por definição de integrabilidade segundo Riemann, para qualquer escolha de  $p_j \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ , podemos escrever:

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(p_j, Y_k(p_j)) \cdot \Delta y \right) \cdot (x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(p_j, Y_k(p_j)) \cdot \Delta y \right) \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(p_j, Y_k(p_j)) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Observe que este último termo é uma soma de Riemann, de modo que o limite acima é, em particular para a escolha  $c_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ , igual a:

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy$$

□

Observe que pelo **Teorema da Limitação**<sup>1</sup>, sendo  $R = [a, b] \times [c, d]$  um subconjunto compacto (fechado e limitado) de  $\mathbb{R}^2$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $f$  é limitada. Desta forma, a limitação de  $f$  fica garantida pelas hipóteses do teorema anterior. O **Teorema de Fubini** pode ser enunciado com hipóteses mais “fracas” (ou seja, menos reitivas), como comentamos a seguir.

**Observação 15.** A fórmula:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

ainda é válida se  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  **for limitada** e seu conjunto de descontinuidades estiver contido em uma reunião finita de gráficos de funções contínuas (ou seja, se  $\text{Desc}(f)$  tiver área igual a zero).

O **Teorema de Fubini** possui uma interpretação geométrica simples, descrita a seguir.

Se  $f$  é contínua e não-negativa em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , o número que representa a integral  $\iint_R f(x, y) dx dy$  é o volume do sólido  $W$  compreendido entre a superfície de equação  $z = f(x, y)$  e o retângulo  $R$ .

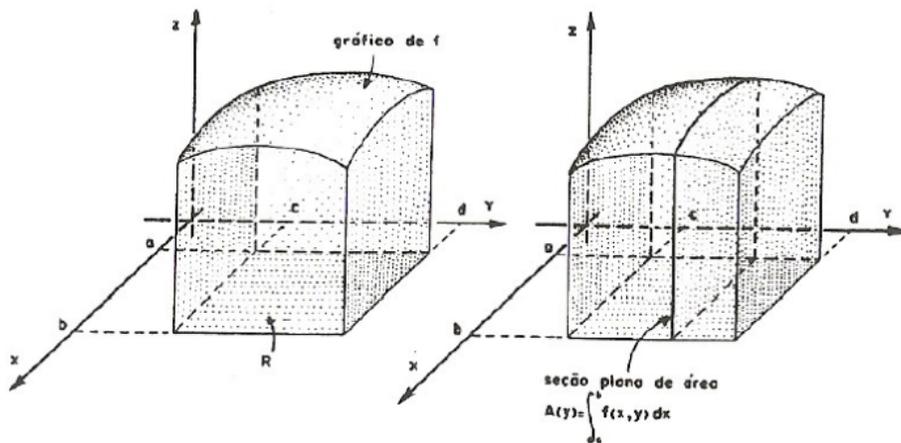
Para cada  $y \in [c, d]$ , a integral:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

<sup>1</sup>segundo o qual “toda função  $f : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua cujo domínio,  $K$ , é compacto (fechado e limitado), é limitada.”

é a área da seção plana do sólido obtida pela interseção desse com o plano paralelo ao plano  $Oxz$  passando pelo ponto  $(0, y, 0)$ . Pelo **Princípio de Cavalieri**, expressamos o volume de  $W$  por  $\int_c^d A(y)dy$ . Portanto:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$



Analogamente, se considerarmos a área da seção plana obtida como interseção do sólido  $W$  com o plano paralelo ao plano  $Oyz$  passando pelo ponto  $(x, 0, 0)$ , obtemos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

**Exemplo 16.** Calcular:

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy$$

onde  $R = [1, 2] \times [0, 1]$ .

**Solução:** A função:

$$\begin{aligned} f : [1, 2] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{x+y} \end{aligned}$$

é contínua em seu domínio, de modo que podemos aplicar o Teorema de Fubini, que nos diz que:

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_1^2 f(x,y) dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \int_0^1 f(x,y) dy \right] dx$$

Calculamos, primeiramente,  $\int_1^2 f(x,y) dx$ , ou seja:

$$\int_1^2 \frac{1}{x+y} dx$$

tratando  $y$  como se fosse uma constante numérica qualquer. Assim, como:

$$\int \frac{1}{x+y} dx = \ln|x+y| + C$$

tem-se:

$$\int_1^2 \frac{1}{x+y} dx = \ln|2+y| - \ln|1+y|$$

e portanto:

$$\int_0^1 \left[ \int_1^2 \frac{1}{x+y} dx \right] dy = \int_0^1 \ln|2+y| dy - \int_0^1 \ln|1+y| dy$$

Como:

$$\int_0^1 \ln|1+y| dy = \int_1^2 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^2 = 2 \cdot \ln(2) - 2 - (1 \cdot \ln(1) - 1) = 2 \cdot \ln(2) - 1$$

$$\int_0^1 \ln|2+y| dy = \int_2^3 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_2^3 = 3 \cdot \ln(3) - 3 - (2 \cdot \ln(2) - 2) = 3 \cdot \ln(3) - 2 \cdot \ln(2) - 1$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \int_1^2 \frac{1}{x+y} dx \right] dy &= \int_0^1 \ln|2+y| dy - \int_0^1 \ln|1+y| dy = (3 \cdot \ln(3) - 2 \cdot \ln(2) - 1) - (2 \cdot \ln(2) - 1) = \\ &= 3 \ln(3) - 4 \cdot \ln(2) = \ln(3^3) - \ln(2^4) = \ln\left(\frac{27}{16}\right) \end{aligned}$$

**Exemplo 17.** Calcular:

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

onde  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solução:** A função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é contínua em  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , de modo que podemos utilizar o Teorema de Fubini.

Temos:

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 (x^2 + y^2) dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^1 \right] dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 dy + \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

## 5 Integral Dupla sobre Regiões Mais Gerais

Até agora a integral dupla foi definida unicamente para regiões de integração retangulares. Entretanto, não é difícil estender o conceito para regiões mais gerais.

A idéia é, na verdade, trivial: dada uma função limitada definida em um conjunto fechado e limitado qualquer, consideramos este conjunto dentro de algum retângulo - que sempre existirá, uma vez que a região é suposta limitada - e calculamos a integral da função obtida ao estender-se por zero a função original.

A seguir damos a definição formal da extensão por zero de uma função:

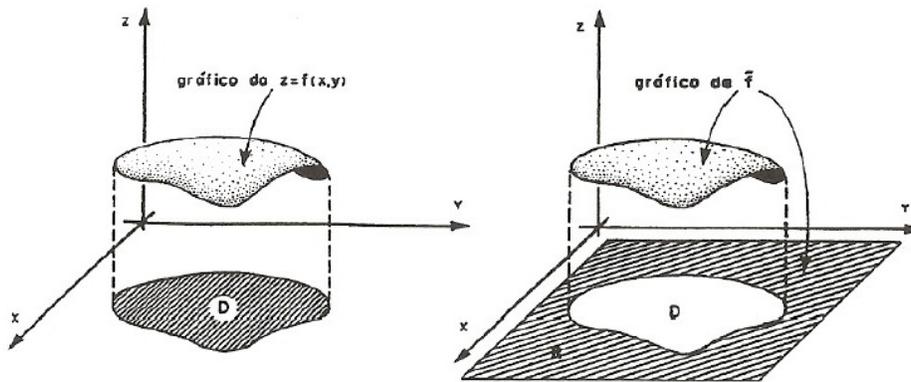
**Definição 18.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  uma região limitada do plano  $Oxy$  e  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo que contém  $D$ . Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. A **extensão por zero de  $f$**  é a função:*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : R \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \end{aligned}$$

Certamente que  $\tilde{f}$  é contínua exceto na fronteira de  $D$ ,  $\partial D$ .<sup>2</sup> Se a fronteira de  $D$  consiste da reunião de um número finito de gráficos de funções contínuas, então  $\tilde{f}$  é integrável sobre  $R$ . Assim, definimos:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_R \tilde{f}(x, y) dx dy$$

<sup>2</sup>desta forma,  $\tilde{f}$  é contínua exceto em  $\partial D$ . Veremos, mais adiante, que regiões limitadas do plano cuja fronteira é “pequena” (ou seja, tem medida nula), serão denominadas “conjuntos Jordan-mensuráveis”, e que estes conjuntos são exatamente aqueles em que certo tipo de função (a função característica) é integrável.



Veremos posteriormente que a integral  $\iint_D f(x,y) dx dy$  *independe* da escolha do retângulo  $R$  que contém  $D$ .

Consideraremos, de agora em diante, regiões limitadas do plano de dois tipos.

- Um subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , descrito do seguinte modo:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a \leq x \leq b) \& (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\},$$

onde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas tais que:

$$(\forall x \in [a,b])(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$$

é denominada uma **região de tipo I**. Um exemplo de uma região deste tipo pode ser visto na parte esquerda da Figura 5.

Numa região de tipo I, para cada  $t \in [a,b]$ , a reta  $x = t$  intercepta  $D$  ao longo de um segmento de reta compreendido entre as curvas  $y = \varphi_1(x)$  e  $y = \varphi_2(x)$ . Esta região é fechada (o conjunto  $D$  contém todos os seus pontos de aderência) e limitada porque  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são ambas contínuas em  $[a,b]$  (a fronteira de  $D$  não tem "buracos" - de modo que todos os pontos da fronteira estão contidos em  $D$ ).

- Uma região limitada do plano  $xy$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  é uma **região de tipo II** quando puder ser descrita como:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (c \leq y \leq d) \& (\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y))\}$$

onde  $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $[c,d]$  e:

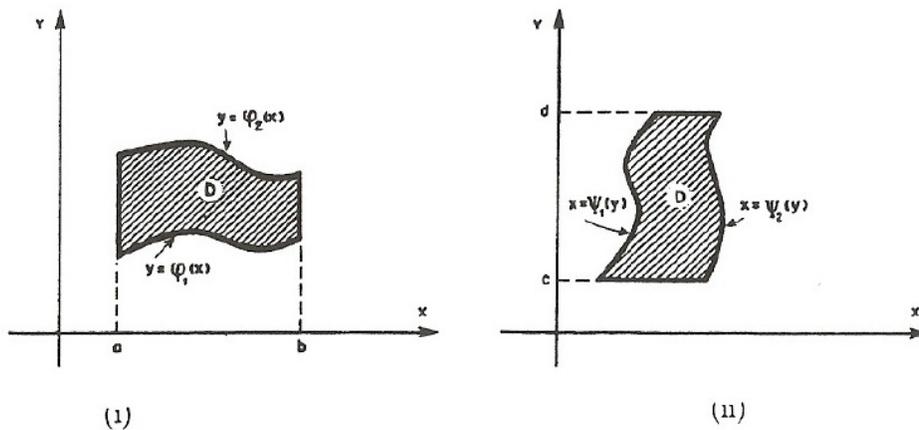


Figura 2: Regiões do tipo I (à esquerda) e do tipo II (à direita)

$$(\forall y \in [c, d])(\psi_1(y) \leq \psi_2(y))$$

Pelos mesmos argumentos, regiões de tipo II também são regiões fechadas e limitadas (portanto, compactas).

Todas as regiões que consideraremos neste curso na teoria de integrais duplas serão de tipo I, tipo II ou poderão ser subdivididas num número finito de subregiões, cada uma das quais é de tipo I ou de tipo II.

**Teorema 19 (Teorema de Fubini para Regiões dos Tipos I e II).** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida no conjunto fechado e limitado  $D$ . Então:*

(i.) *Se  $D$  é uma região de tipo I, ou seja,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \& (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\}$ , então:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

(ii.) *Se  $D$  é uma região de tipo II, ou seja,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (c \leq y \leq d) \& (\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y))\}$ , então:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

*Demonstração.* Demonstraremos apenas o item (i.), pois o item (ii.) pode ser demonstrado de maneira análoga.

Se  $D$  um conjunto, em particular, limitado, existe um retângulo  $R$  que o contém, digamos  $R = [a, b] \times [c, d] \supset D$ . Da própria definição de integral dupla sobre regiões não retangulares, tem-se, por definição:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) dx dy,$$

onde  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  é a extensão por zero da função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  - isto é,  $(\forall (x, y) \in D)(\tilde{f}(x, y) = f(x, y))$  e  $(\forall (x, y) \in R \setminus D)(\tilde{f}(x, y) = 0)$ .

Para cada  $\underline{x} \in [a, b]$  fixado, a função:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\underline{x}, \bullet) : [c, d] &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \tilde{f}(\underline{x}, y) \end{aligned}$$

é contínua exceto, possivelmente, nos pontos em que a reta  $x = \underline{x}$  intercepta a fronteira da região  $D$  - ou seja, num conjunto finito e, portanto, de "área zero" - o que nos autoriza, pela **Observação 15** a aplicar o **Teorema de Fubini**. Sendo assim, da teoria das integrais para funções de uma variável real a valores reais, a integral de  $\tilde{f}(\underline{x}, \bullet)$  existe e é:

$$\int_c^d \tilde{f}(\underline{x}, y) dy,$$

que, por aditividade em  $[c, d] = [c, \varphi_1(\underline{x})] \cup [\varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x})] \cup [\varphi_2(\underline{x}), d]$ , pode ser decomposta como:

$$\int_c^d \tilde{f}(\underline{x}, y) dy = \int_c^{\varphi_1(\underline{x})} \tilde{f}(\underline{x}, y) dy + \int_{\varphi_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} f(\underline{x}, y) dy + \int_{\varphi_2(\underline{x})}^d f(\underline{x}, y) dy$$

Como para todo  $y \in [c, \varphi_1(\underline{x})[$  e para todo  $y \in ]\varphi_2(\underline{x}), d]$  tem-se  $\tilde{f}(\underline{x}, y) = 0$  (pois, neste caso,  $(\underline{x}, y) \in R \setminus D$ ), podemos escrever a equação anterior como abaixo:

$$\int_c^{\varphi_1(\underline{x})} \tilde{f}(\underline{x}, y) dy + \int_{\varphi_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} \tilde{f}(\underline{x}, y) dy + \int_{\varphi_2(\underline{x})}^d \tilde{f}(\underline{x}, y) dy = \int_{\varphi_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} \tilde{f}(\underline{x}, y) dy = \int_{\varphi_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} f(\underline{x}, y) dy,$$

e portanto:

$$\int_c^d \tilde{f}(\underline{x}, y) dy = \int_{\varphi_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} f(\underline{x}, y) dy.$$

Pelo **Teorema de Fubini** aplicado à função  $\tilde{f}$ , temos:

$$\iint_R \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx,$$

o que completa a demonstração. □

Pelo teorema acima, podemos concluir que a integral sobre uma região limitada  $D$  qualquer independe do retângulo  $R$  que contém  $D$ .

De fato, se  $R_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$  e  $R_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$  são retângulos tais que  $D \subset R_1$  e  $D \subset R_2$ .

Por um lado,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{c_1}^{d_1} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

Por outro lado, como  $D \subset R_2$ , tem-se:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{R_2} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \int_{c_2}^{d_2} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

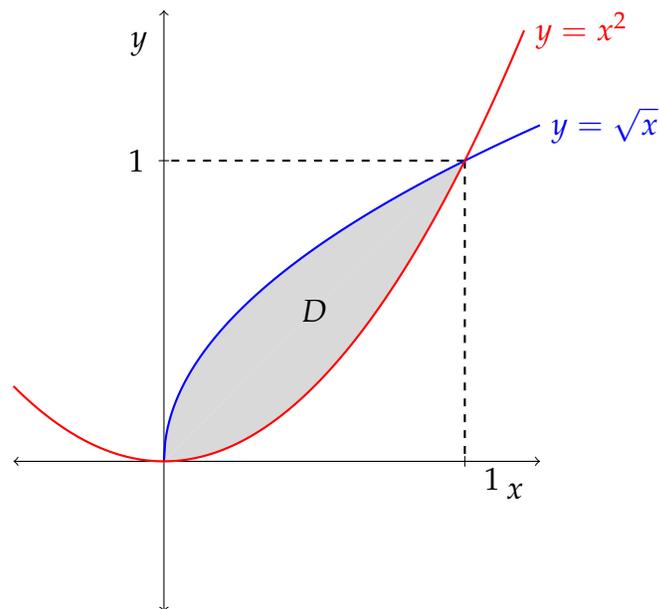
e portanto:

$$\iint_{R_1} \tilde{f}(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{R_2} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

Estamos, portanto, prontos para calcular integrais duplas de funções contínuas em regiões limitadas do tipo I e do tipo II, conforme ilustra o exemplo a seguir.

**Exemplo 20.** Calcular  $\iint_D xy dx dy$  onde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .  
Pelo **Teorema 19**, como  $D$  é uma região do tipo I, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 x \cdot \left[ \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx - \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx = \frac{1}{2} = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$



## 6 Aplicação da Integral Dupla: o cálculo de áreas

Dado um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  qualquer, a **função característica de  $S$**  é a função:

$$\begin{aligned} \chi_S : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in S, \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

Restringiremos nosso estudo a subconjuntos  $S$ , de  $\mathbb{R}^2$ , limitados. Analisemos a integrabilidade da função característica de um conjunto limitado  $D$ ,  $\chi_D$ : como esta função só admite

descontinuidades em  $\partial D$  (i.e.,  $\text{Desc}(\chi_D) = \partial D$ ), concluímos que  $\chi_D$  é integrável se, e somente se  $\partial D$  tem uma área “nula”. Conjuntos limitados cuja fronteira têm “área zero” são chamados de **conjuntos Jordan-mensuráveis** (ou, simplesmente,  $J$ -mensuráveis). Ao restringirmos (ainda mais) a nossa análise aos conjuntos Jordan-mensuráveis, temos garantida a integrabilidade de suas funções características, de modo que podemos enunciar a seguinte:

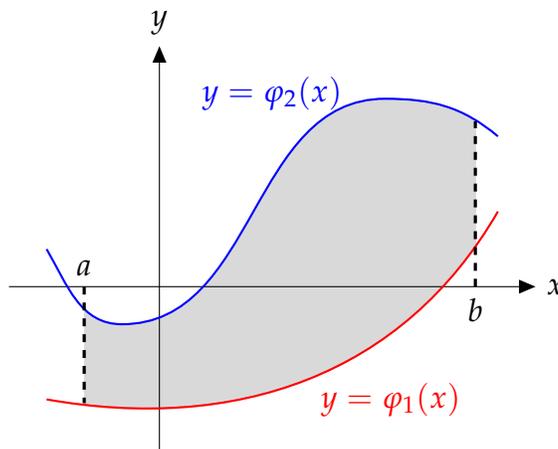
**Definição 21 (área).** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto Jordan-mensurável (ou seja,  $D$  é limitado e  $\partial D$  tem medida nula) e  $R$  um retângulo qualquer que contém  $D$ . A **área** do conjunto  $D$  é:*

$$A(D) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_R \chi_D(x, y) dx dy = \iint_D 1 dx dy$$

Uma vez que estamos trabalhando apenas com conjuntos limitados  $D$  de tipo I e II, estamos excluindo de nosso estudo a maioria dos conjuntos Jordan-mensuráveis. Embora todos estes tenham área, nos dedicaremos apenas ao estudo das áreas dos conjuntos dos tipos I e II.

Note que a definição anterior coincide com a área delimitada pela região  $D$ . Por exemplo, se  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a \leq x \leq b) \& (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\}$ , com  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, então:

$$\iint_D 1 dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = A.(D)$$

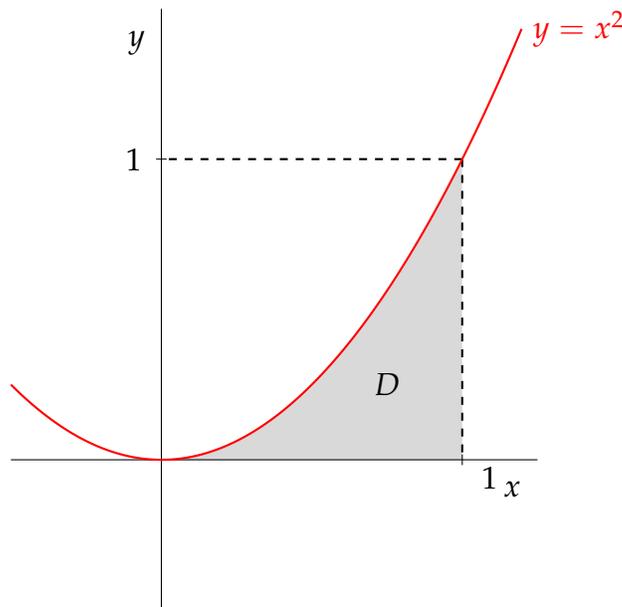


**Exemplo 22.** Calculemos a área da região:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 1) \& (0 \leq y \leq x^2)\}$$

Como  $D$  é uma região do tipo I, tem-se:

$$A.(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 dy dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$



## 7 Valor médio de uma função em uma região Jordan-mensurável do plano

O valor médio de um conjunto discreto de valores é a soma dos valores dividida pelo número de valores. No caso de uma função definida em uma região Jordan-mensurável do plano, temos um contínuo de valores. Definimos, então, o valor médio de uma função em uma região como a integral da função dividido pela área da região. Em outras palavras, o valor médio de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por:

$$m(f, D) = \frac{1}{A.(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

**Teorema 23 (Teorema do Valor Médio para Integrais Duplas).** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto do tipo I ou II de área  $A.(D)$  tal que  $\text{int.}(D)$  é conexo <sup>a</sup>. Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{int.}(D)$  tal que:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot A.(D)$$

<sup>a</sup>não pode ser decomposto como reunião de dois conjuntos abertos  $X, Y \subset \mathbb{R}^2$  tais que  $\text{Cl.}(X) \cap Y = \emptyset = X \cap \text{Cl.}(Y)$

*Demonstração.* Como  $D$  é fechado e limitado (ou seja, compacto) e  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, existem  $(x_1, y_1) \in D$  e  $(x_2, y_2) \in D$  onde  $f$  atinge, respectivamente, seus valores máximo ( $M$ ) e mínimo ( $m$ ), que coincidem com  $\sup f(x, y)$  e  $\inf f(x, y)$ , respectivamente. Assim,

$$(\forall (x, y) \in D)(m = f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) = M)$$

Da monotonicidade da integral dupla, tem-se que:

$$m \cdot A.(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot A.(D)$$

$$m \leq \frac{1}{A.(D)} \iint_D f(x, y) dx dy \leq M$$

Sendo  $D$  compacto e conexo, tem-se  $f[D] = [m, M]$ .

Como  $\frac{1}{A.(D)} \iint_D f(x, y) dx dy \in [m, M] = f[D]$ , segue que existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$  <sup>3</sup> tal que:

$$\frac{1}{A.(D)} \iint_D f(x, y) dx dy = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Portanto, tem-se:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot A.(D)$$

□

## 8 A massa e o centro de massa de uma região Jordan-mensurável

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um compacto Jordan-mensurável - ou seja, um conjunto fechado, limitado e cuja fronteira tem medida (e, portanto, conteúdo) zero. Imaginemos  $D$  como uma chapa delgada.

<sup>3</sup>uma "testemunha" de que  $\frac{1}{A.(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$  pertence, de fato, à imagem de  $D$  por  $f$ .

**Definição 24.** No contexto acima, uma **função densidade superficial de massa** associada a  $D$  é uma função contínua:

$$\begin{aligned} \delta : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \delta(x, y) \end{aligned}$$

tal que:

$$(\forall (x, y) \in D)(\delta(x, y) > 0).$$

Assim, se  $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função densidade superficial de massa associada a  $D$ , temos:

$$m(D) = \iint_D \delta(x, y) dx dy$$

onde  $m(D)$  denota a massa da chapa de forma  $D$ .

Se  $\delta$  for uma função constante e igual a  $k$ , então a massa de  $D$  é igual ao produto de  $k$  pela área de  $D$ . Neste caso dizemos que a chapa é **homogênea**.

Seja  $R$  um retângulo (portanto, um conjunto conexo) contido na região  $D$ . Pelo **Teorema do Valor Médio para Integrais Duplas**, existe  $(s, t) \in R$  tal que:

$$\iint_{R_1} \delta(x, y) dx dy = \delta(s, t) \cdot A.(R_1),$$

ou seja,

$$\delta(s, t) = \frac{m(R)}{A.(R)}$$

Assim,  $\delta(s, t)$  é a **densidade superficial média** (massa por unidade de área) de  $R$ .

Podemos considerar a região  $D$  como contida em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, tomamos uma partição regular de ordem  $n$  de  $R$ , ou seja,  $\mathcal{P}_R^{(n)} = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_i \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)}) \& (y_j \in \mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)})\}$ .

Seja, agora,  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in \text{int}(R_{ij}) \subset D$  um ponto qualquer [ao final, teremos escolhido  $n^2$  pontos nos  $n^2$  subretângulos determinados pela partição]. Como, por hipótese,  $\delta$  é contínua em cada  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_{ij} > 0$  tal que se  $\|(x, y) - (\bar{x}_i, \bar{y}_j)\| < \delta_{ij}$  então  $|\delta(x, y) - \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| < \varepsilon$ . Podemos refinar a (ou seja, acrescentar pontos à) partição  $\mathcal{P}_R^{(n)}$  de modo que o

maior dos lados de cada (novo) subretângulo seja menor que  $\sqrt{2}\eta$ , onde  $\eta = \min\{\delta_{ij} \mid (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}\}$  (o que garantirá que  $\delta$ , a função densidade superficial, não vai variar fora do intervalo  $]\delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - \varepsilon, \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + \varepsilon[$ ). Assim, a massa de cada subretângulo desta nova partição (mais refinada) será, aproximadamente:

$$m(R_{ij}) \approx \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j)A.(R_{ij}),$$

Assim, se tomarmos uma partição suficientemente fina (de tal modo que  $\max\{\Delta x, \Delta y\} < \sqrt{2}\delta_{ij}$ ), poderemos considerar a densidade de cada subretângulo  $R_{ij}$  aproximadamente constante e igual a  $\delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ .

Se denotarmos por  $\Delta m_{ij}$  a massa do retângulo  $R_{ij}$  de lados  $\Delta x$  e  $\Delta y_j$ , podemos escrever:

$$\Delta m_{ij} \approx \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

A massa da lâmina delgada será, portanto, aproximadamente igual a:

$$m(D) \approx \sum_{i,j=1}^n \Delta m_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y$$

É razoável supor que, à medida que refinamos mais e mais a partição, obteremos valores cada vez mais próximos do da massa da lâmina.

Pela definição de integral dupla, temos:

$$m(D) \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \Delta m_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y = \iint_D \delta(x, y) dx dy$$

É comum referir-se  $\Delta m_{ij}$  como um **elemento de massa**. Em virtude de (\*), também escrevemos:

$$m(D) = \iint_D dm$$

## 9 Aplicação da Integral Dupla: Centro de Massa de uma Região Não-Homogênea

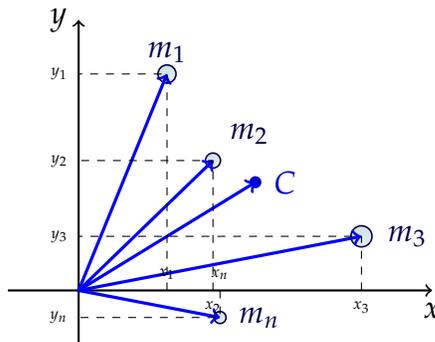
Muitos conceitos, tais como massa, centro de massa e momento de inércia podem ser definidos com o auxílio de integrais duplas para distribuições contínuas de massa. Nesta seção faremos uma breve discussão sobre o centro de massa.

Se  $P$  denota um vetor no plano com origem  $(0, 0)$  e extremidade num ponto arbitrário e se  $n$  massas,  $m_1, \dots, m_n$  estão localizadas nos pontos  $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ , respectivamente, o **centro de massa** do sistema é definido como sendo o ponto  $C$  determinado pela

equação:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k, y_k)}{\sum_{k=1}^n m_k},$$

onde o denominador  $\sum_{k=1}^n m_k$  é chamado **massa total do sistema**.



O centro de massa pode ser pensado como “o ponto de equilíbrio” do sistema.

Se as massas estão localizadas nos pontos de coordenadas  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  e se o centro de massa  $C$  tem coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , a relação que define  $C$  pode ser representada por duas equações escalares:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

No numerador do quociente que define  $\bar{x}$ , a  $k$ -ésima parcela da soma,  $m_k x_k$ , é chamado **momento de massa  $m_k$  com relação ao eixo  $y$** . Se a massa  $m$ , igual à massa total do sistema, fosse colocada no centro de massa, seu momento em relação ao eixo  $y$  seria igual ao momento do sistema,

$$m\bar{x} = \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

Quando consideramos um sistema cuja massa está distribuída numa região do plano e não apenas num conjunto formado por um número finito de pontos, os conceitos de massa, centro de massa e momento de inércia são definidos por meio de integrais duplas.

Vamos, agora, definir **centro de massa** de uma região  $D \subset \mathbb{R}^2$  compacta e Jordan-mensurável.

Tomamos, primeiramente, uma partição regular de ordem  $n$  de um retângulo que contém  $D$ , digamos  $R = [a, b] \times [c, d]$ ,  $\mathcal{P}_R^{(n)} = \{(x_i, y_j) \in R \mid 0 \leq i, j \leq n\}$ . Em cada sub-retângulo determinado pela partição,  $R_{ij}$ , tomamos um ponto qualquer  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in \text{int.}(R_{ij})$ . A massa de  $R_{ij}$  será, aproximadamente,  $\delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta x\Delta y$  (caso  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{ij} \setminus D$ , tomamos  $\delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0$ ).

Para fins de aproximação, vamos considerar cada retângulo  $R_{ij}$  como um ponto material localizado em  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$  e de massa  $\delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta x\Delta y$  (vimos que é possível obter aproximações tão boas quanto queiramos na seção anterior, fazendo uso da continuidade da função densidade de massa superficial). O centro de massa do sistema obtido é, conforme aprendemos em Física, o ponto de coordenadas aproximadas:

$$\bar{x}_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y}$$

$$\bar{y}_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y}$$

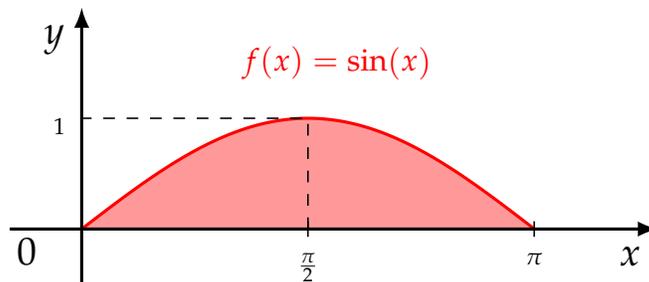
Conforme refinamos mais e mais a partição, nos aproximamos mais e mais dos valores exatos das coordenadas do centro de massa de  $D$ . Tomando o limite das somas de Riemann acima nos dá, portanto:

$$\bar{x}_c = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy} = \frac{\iint_D x dm}{\iint_D dm}$$

$$\bar{y}_c = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy} = \frac{\iint_D y dm}{\iint_D dm}$$

**Exemplo 25.** Calcular a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq y \leq \sin(x)) \& (0 \leq x \leq \pi)\}$  e com densidade  $\delta(x, y) = y$ .

**Solução:** Primeiramente esboçamos a lâmina, como segue:



Para calcularmos sua massa, temos:

$$m(D) = \iint_D dm = \iint_D \delta(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} y dy dx = \int_0^\pi \left( \frac{\sin^2(x)}{2} \right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

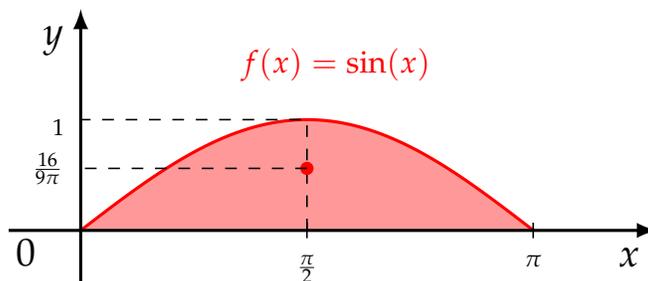
Quanto às coordenadas do centro de massa, temos:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \delta(x, y) dy dx = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} (x \cdot y) dy dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \delta(x, y) dy dx = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} y^2 dy dx = \frac{16}{9\pi}$$

O centro de massa da lâmina de formato  $D$  e densidade dada pela função acima é, portanto, o ponto de coordenadas:

$$\left( \frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi} \right)$$



**Observação 26.** Quando a densidade de um objeto é constante, ela se cancela no numerador e no denominador das fórmulas para  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Quando  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são considerados,  $\delta$  pode muito bem ser igual a 1. Assim, quando  $\delta$  é constante, a localização do centro de massa se torna uma característica da forma do objeto, e não mais do material do qual o objeto é feito. Em tais casos, os engenheiros costumam chamar o centro de massa de **centróide** da forma. Para encontrar o centróide, fazemos  $\delta = 1$  e calculamos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  como antes.

## 10 Mudança de Ordem na Integração Múltipla

Há certas integrais múltiplas que não podem ser resolvidas na ordem de integração em que são colocadas. É, por exemplo, o caso da integral:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy dx$$

uma vez que não existe função elementar cuja derivada seja  $f(y) = \sin(y)/y$ <sup>4</sup>.

O resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema de Fubini para regiões de tipo I e II:

**Teorema 27.** *Seja  $D$  uma região que possa ser descrita simultaneamente como sendo de tipo I, ou seja, dada por:*

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

*onde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $(\forall x \in [a, b])(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$ , e do tipo II, ou seja, descrita como:*

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

*onde  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $(\forall y \in [c, d])(\psi_1(y) \leq \psi_2(y))$ .*

*Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então vale:*

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx = \iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

*Demonstração.* Sendo  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ , por um lado, pelo **Teorema de Fubini**, tem-se:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Como também podemos escrever  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ , também pelo **Teorema de Fubini** tem-se, por outro lado:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

e segue o resultado. □

Note que a continuidade de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é condição *suficiente* para a inversão da ordem de integração, mas não é necessária. Uma condição necessária para a invertibilidade na ordem de integração é dada em seguida.

<sup>4</sup>Nós até mesmo definimos a função seno-integral por  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Tal função, no entanto, não nos permite calcular diretamente  $\text{Si}(x)$  sem calcularmos a integral.

**Teorema 28 (Teorema de Fubini (forte)).** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto limitado e  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada em  $\mathbb{R}$  cujo conjunto de descontinuidades está contido em uma reunião finita de gráficos de funções contínuas (ou seja,  $f$  Riemann-integrável). Então, se  $D$  uma região que pode ser descrita simultaneamente como sendo de tipo I, ou seja, dada por:*

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

onde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $(\forall x \in [a, b])(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$ , e do tipo II, ou seja, descrita como:

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

onde  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $(\forall y \in [c, d])(\psi_1(y) \leq \psi_2(y))$ , vale:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx = \iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

ou seja, podemos inverter a ordem de integração.

Vamos aplicar este teorema para avaliar a integral dupla:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy dx$$

Procedemos como segue:

- Esboçamos a região de integração, que neste caso é:

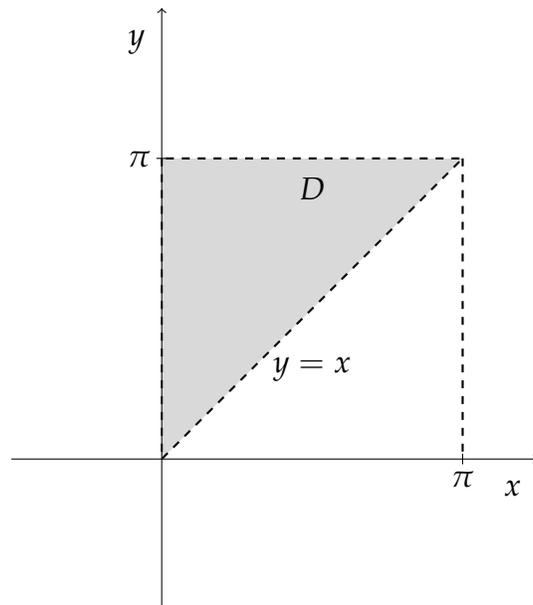
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq \pi) \& (x \leq y \leq \pi)\}$$

Neste caso, a região  $D$  é originalmente dada como uma região do tipo I;

- Expressamos  $D$  como uma região de tipo II, ou seja:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq y) \& (0 \leq y \leq \pi)\}$$

o que é sempre feito com auxílio do esboço da região.



- Escrevemos a função que pretendemos integrar, explicitando seu domínio:

$$f : D \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi]\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$$

Podemos considerar o domínio de  $f$  contido em  $D$  e estender a função por um:

$$\tilde{f} : D \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi]\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(y)}{y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 1, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Note que a função  $\tilde{f}$  assim definida é contínua em  $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi]\}$ , uma vez que para qualquer  $x_0 \in [0, \pi]$  vale:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Em seguida, como  $\tilde{f}$  está cumprindo as condições de **Teorema 27**, invertemos a ordem de integração, observando que na segunda integral descrevemos  $D$  como uma região do tipo II:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy dx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin(y)}{y} dx dy = \int_0^\pi \left( \frac{\sin(y)}{y} \cdot \int_0^y dx \right) dy = \int_0^\pi \sin(y) dy = 2$$

Não existe regra geral para prever que ordem de integração será melhor em circunstâncias como essa, assim não se preocupe em saber como começará suas integrações. Simplesmente vá em frente e, se a ordem que você escolheu primeiro não funcionar, tente a outra.

**Observação 29.** Será que podemos aplicar o **Teorema de Fubini** para inferir que:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy ?$$

A resposta é: não! A função  $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$  não está definida em  $(0, 0)$ . Em princípio, isto não é um óbice à aplicação do teorema, uma vez que poderíamos tomar a “extensão de  $f$  por zero”, ou seja, considerar a função:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

No entanto, observe que  $f$  não é limitada em  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Com efeito, tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x-y}{(x+y)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

de modo que dado qualquer  $K > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|(x, 0) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, 0)| \geq K$ . Assim, para cada  $K > 0$ , não importa quão grande seja, podemos tomar o ponto  $(\frac{\delta}{2}, 0) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ , e teremos  $f(\frac{\delta}{2}, 0) \geq K$ . Logo, o **Teorema de Fubini** não se aplica porque a função  $f$  não é limitada em seu domínio.

## 11 Integrais duplas sobre regiões ilimitadas

A fim de calcular integrais duplas sobre regiões ilimitadas, procedemos de forma análoga àquela usada para definir integrais de funções de uma variável real a valores reais sobre conjuntos ilimitados da reta.

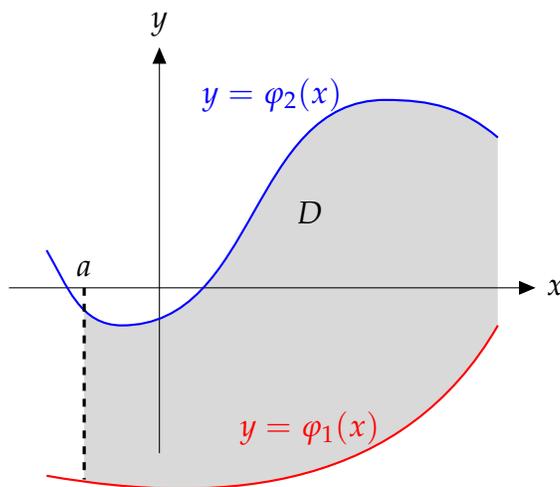
**Definição 30 (Integrabilidade em Regiões Ilimitadas).** Sejam  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a \leq x) \& (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\}$ , onde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  são uma funções contínuas tais que  $(\forall x \in [a, \infty[)(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$  e  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é **integrável em  $D$**  se, e somente se existir o limite:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Neste caso, escrevemos:

$$\int_a^\infty \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

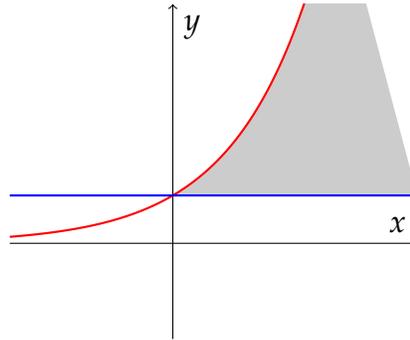
para denotar este limite.



**Exemplo 31.** Calcular, se existir:

$$\int_1^\infty \int_{e^x}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$$

**Solução:** Procedemos como sempre, esboçando a região:



Calculamos primeiramente:

$$\int_{e^x}^1 \frac{1}{x^3 y} dy = \frac{1}{x^3} \int_{e^x}^1 \frac{dy}{y} = \frac{1}{x^3} \cdot \left[ - \int_1^{e^x} \frac{dy}{y} \right] = -\frac{1}{x^3} [\ln |y|]_1^{e^x} = -\frac{1}{x^3} (\ln |e^x| - \ln |1|) = -\frac{1}{x^2}$$

Em seguida, calculamos a integral imprópria:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left( \int_{e^x}^1 \frac{dy}{x^3 y} \right) dx &= \int_1^\infty \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) = 1. \end{aligned}$$

**Definição 32.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, exceto possivelmente em um subconjunto de medida nula,  $\text{Desc}(f) \subset \mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $f$  é **integrável em  $\mathbb{R}^2$**  se o limite :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \int_{-R}^R f(x, y) dx dy$$

existir. Neste caso, denotamos este limite por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

**Exemplo 33.** Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} dx dy$$

**Solução:** Calcularemos, na verdade:

$$\int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} dx dy$$

e depois passaremos o limite para  $R \rightarrow \infty$ .

Primeiramente, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx &= \frac{1}{(y^2+1)} \cdot \int_{-R}^R \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{y^2+1} \cdot [\arctan(x)]_{-R}^R = \\ &= \frac{2 \arctan(R)}{y^2+1} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy &= 2 \arctan(R) \int_{-R}^R \frac{1}{y^2+1} dy = \\ &= 2 \arctan(R) \cdot 2 \arctan(R) = 4 \cdot \arctan^2(R) \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} 4 \arctan^2(R) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \pi^2$$

A observação abaixo pode ser útil no cômputo de integrais de certas funções, como a do exemplo anterior.

**Observação 34.** *Suponhamos que  $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua que pode ser expressa como:*

$$(\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d])(f(x, y) = F(x) \cdot G(y))$$

Então tem-se:

$$\int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d F(x) \cdot G(y) dy = F(x) \cdot \int_c^d G(y) dy$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_c^d \int_a^b F(x) \cdot G(y) dy = \int_a^b \left( F(x) \int_c^d G(y) dy \right) dx$$

Como  $\int_c^d G(y) dy$  é um simples escalar, tem-se:

$$\int_a^b \left( F(x) \int_c^d G(y) dy \right) dx = \left( \int_c^d G(y) dy \right) \cdot \left( \int_a^b F(x) dx \right)$$

Da observação acima, conclui-se<sup>5</sup> que se  $f : [a, \infty[ \times [c, \infty[ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua tal que  $f(x, y) = F(x) \cdot G(y)$  para todo  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  e integrável em seu domínio, então:

$$\int_a^{\infty} \int_c^{\infty} f(x, y) dx dy = \left( \int_a^{\infty} F(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^{\infty} G(y) dy \right)$$

---

<sup>5</sup>usando o fato de que, se os dois limites existem, o limite do produto é o produto dos limites

**Observação 35.** *Tudo o que foi desenvolvido aqui se estende, mutatis mutandis, naturalmente, para integrais triplas.*

## 12 Aplicação da Integral Dupla: Momento de Inércia

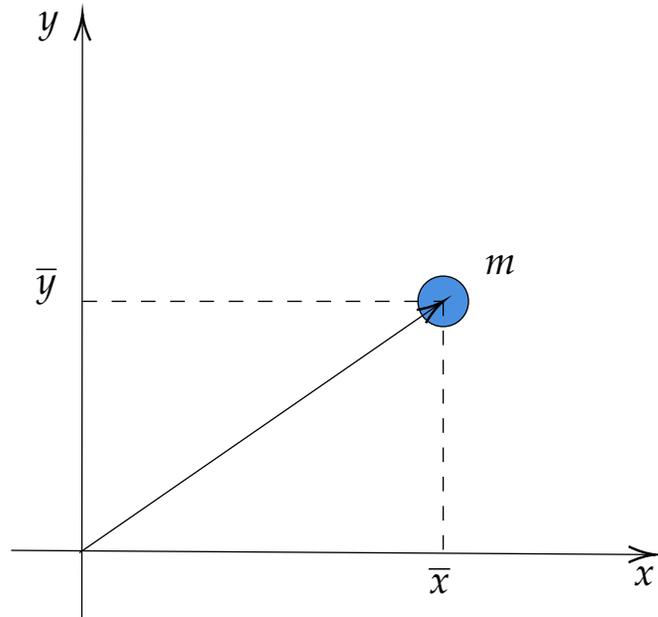
Nesta seção,  $D$  será uma região  $J$ -mensurável do plano que pode ser decomposta numa quantidade finita de regiões dos tipos I e II e  $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  será uma função de densidade superficial de massa.

Nosso objetivo é deduzir uma fórmula que nos permita calcular o momento de inércia de uma lâmina plana, dada por  $D$  e  $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}$ , em torno de algum dos eixos coordenados (ou seja, em torno do eixo  $Ox$  ou em torno do eixo  $Oy$ ).

O momento de inércia da lâmina é análogo à massa de um corpo em movimento linear. O que torna difícil de fazer girar ou parar a lâmina é seu momento de inércia, uma grandeza que leva em conta não apenas a massa, mas também sua distribuição espacial. A fim de estudar a cinemática e a dinâmica de corpos em rotação em torno de um eixo, é necessário, portanto, termos em mãos o momento de inércia.

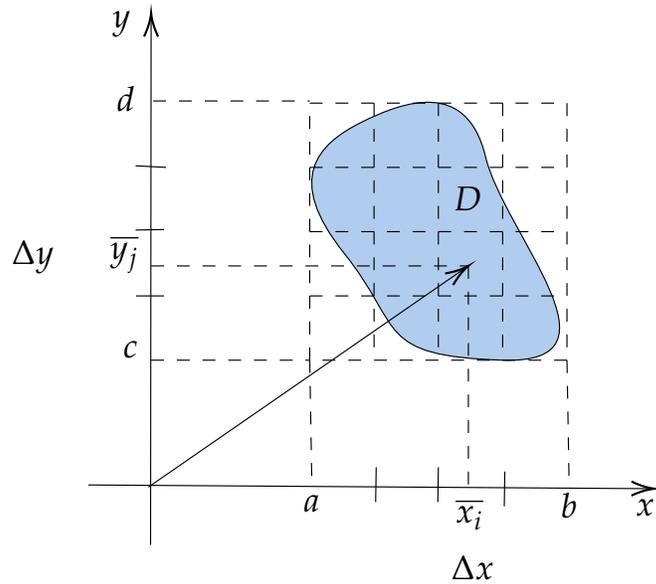
No caso de um ponto material de massa  $m$  de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , o momento de inércia com respeito ao eixo  $y$  é dado por  $I_y = m \cdot \bar{x}^2$ , enquanto que o momento de inércia com respeito ao eixo  $x$  é dado por  $I_x = m \cdot \bar{y}^2$ .

Veremos, na sequência, como proceder no caso de uma distribuição contínua de massa no espaço.



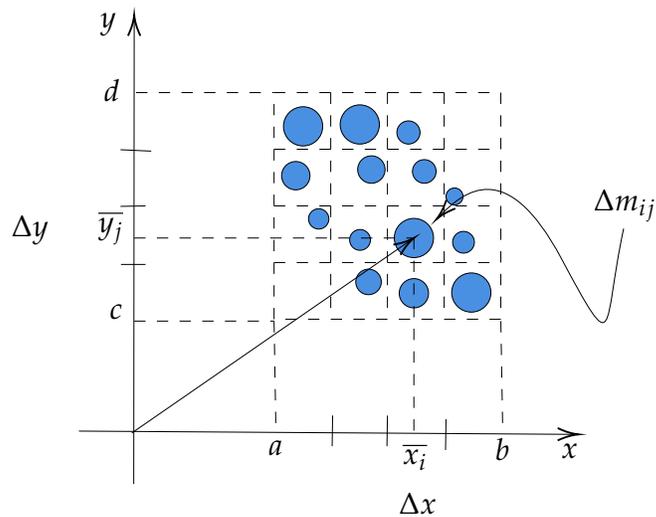
Se, entretanto, estivermos estudando a rotação de uma lâmina rígida plana (de densidade superficial dada por uma função,  $\delta$ ) em torno de certo eixo, estaremos mais interessados na quantidade de energia que estará armazenada, ou na quantidade de energia que será necessária para acelerar a lâmina até uma determinada velocidade angular. É aqui que entra o segundo momento, ou o momento de inércia, que é a contraparte da inércia de um corpo (massa) em movimentos rotatórios. Suponhamos que a lâmina seja uma região do tipo I ou do tipo II.

Procedemos como sempre: circunscrevemos a lâmina,  $D$ , em algum retângulo,  $R = [a, b] \times [c, d]$  e tomamos uma partição regular de ordem  $n$ ,  $\mathcal{P}_R^{(n)} = \{(x_i, y_j) \mid (x_i \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{(n)}) \& (y_j \in \mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)})\}$ . Em cada sub-retângulo,  $R_{ij}$ , escolhemos um ponto arbitrário  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ :



Estendemos a função  $\delta$  por zero:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}: [a, b] \times [c, d] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \delta(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \end{aligned}$$



Podemos, agora, aproximar a lâmina por uma distribuição discreta de  $n^2$  massas no plano, concentradas nos pontos  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ . A massa do ponto de coordenadas  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$  será aproximadamente:

$$\Delta m_{ij} \approx \tilde{\delta}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y$$

de modo que o momento de inércia desta partícula com respeito ao eixo  $y$  será:

$$(I_{ij})_y \approx \bar{x}_i^2 \cdot \Delta m_{ij} = x_i^2 \cdot \tilde{\delta}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y$$

Aproximamos o momento de inércia da lâmina pela soma:

$$I_y \approx \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i^2 \cdot \Delta m_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \cdot \tilde{\delta}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y$$

Esperamos que quanto maior seja o valor de  $n$ , mais próximo do valor exato do momento de inércia da lâmina com respeito ao eixo  $y$  estaremos, ou seja, que:

$$I_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i^2 \cdot \tilde{\delta}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y = \iint_R x^2 \cdot \tilde{\delta}(x, y) dx dy = \iint_D x^2 \cdot \delta(x, y) \cdot dx dy$$

Analogamente, vemos que o momento de inércia da lâmina  $D$  com respeito ao eixo  $x$  é:

$$I_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{y}_j^2 \cdot \tilde{\delta}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x \Delta y = \iint_R y^2 \cdot \tilde{\delta}(x, y) dx dy = \iint_D y^2 \cdot \delta(x, y) \cdot dx dy$$

Passemos, agora, à análise do momento de inércia de distribuições contínuas de massa no espaço.

Seja  $D$  uma chapa plana, delgada, cuja densidade superficial é descrita, em cada ponto, pela função  $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , O número:

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy$$

é chamado o **momento de inércia da chapa em relação ao eixo  $x$** . O número:

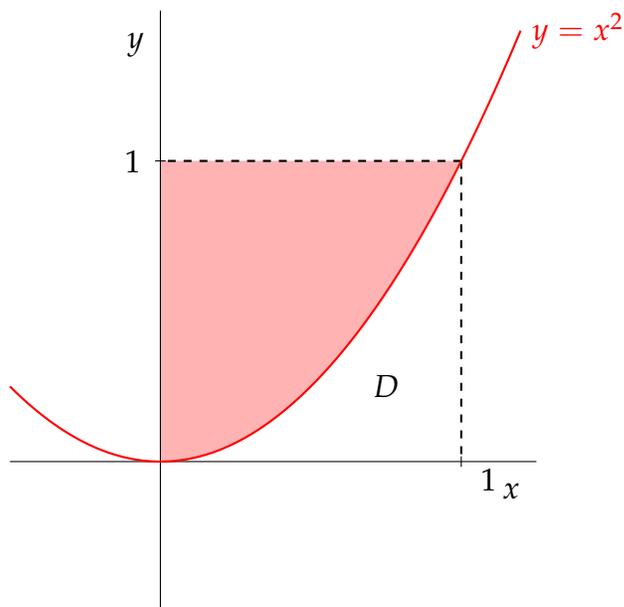
$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy$$

é chamado **momento de inércia da chapa  $D$  com relação ao eixo  $x$** .

A soma  $I_x + I_y$  é chamada **momento de inércia polar em relação à origem**, denotado por  $I_0$ . Logo,

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy$$

**Exemplo 36.** Determinar os momentos de inércia  $I_x, I_y$  e  $I_0$  da lâmina de forma  $D$ , região do primeiro quadrante limitada pela parábola  $y = x^2$  e pela reta  $y = 1$ , com densidade superficial igual a  $\delta(x, y) = xy$ .



**Solução:**

Temos:

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy = \iint_D y^2 \cdot (xy) dx dy = \iint_D xy^3 dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 xy^3 dy dx = \frac{1}{10}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy = \iint_D x^2 \cdot (xy) dx dy = \iint_D x^3 y dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 y dy dx = \frac{1}{16}$$

e

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy = \iint_D xy^3 dx dy + \iint_D x^3 y dx dy = \frac{13}{80}$$

## 13 Apêndice

No texto desta agenda usamos apenas partições regulares dos retângulos a fim de tornar mais conveniente a apresentação. Neste apêndice, apresentamos conceitos mais refinados da teoria de integração, e terminamos por exibir um exemplo de função que não é integrável de acordo

com a nossa definição.

Sejam  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  um retângulo,  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\}$  uma partição qualquer (não necessariamente regular) de  $[a, b]$  e  $\mathcal{P}_{[c,d]} = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d\}$  uma partição qualquer de  $[c, d]$ , de modo que  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in R \mid x_i \in \mathcal{P}_{[a,b]}, y_j \in \mathcal{P}_{[c,d]}\}$  seja uma partição de  $R$ . Para cada subretângulo  $S \subset R$ , determinado por  $\mathcal{P}$ , sejam:

$$m_{S_{ij}}(f) = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in S_{ij}\}$$

$$M_{S_{ij}}(f) = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in S_{ij}\}$$

e seja  $\text{vol}(S_{ij})$  o volume do subretângulo  $S_{ij}$ , dado por  $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$ . As **somas inferior** e **superior** de  $f$  correspondentes à partição  $\mathcal{P}$  são, respectivamente:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i,j=1}^{m,n} m_{S_{ij}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ij}) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i,j=1}^{m,n} M_{S_{ij}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ij})$$

Evidentemente, como  $m_{S_{ij}}(f) \leq M_{S_{ij}}(f)$ , tem-se que  $s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$ .

Vale também vale o seguinte resultado mais forte:

**Lema 37.** *Sejam  $\mathcal{P}$  uma partição do retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  e  $\mathcal{P}'$  uma partição do mesmo retângulo tal que todo subretângulo determinado por  $\mathcal{P}'$  esteja contido em algum subretângulo da partição  $\mathcal{P}$ .<sup>a</sup> Então:*

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$$

*Ou seja, ao refinarmos uma partição, as somas inferiores não diminuem e as somas superiores não aumentam.*

<sup>a</sup>neste caso, dizemos que  $\mathcal{P}'$  é **mais fina** do que  $\mathcal{P}$ .

*Demonstração.* Por hipótese, cada subretângulo  $S_{ij}$  de  $\mathcal{P}$  se subdivide em vários (digamos  $k$ ) subretângulos pertencentes a  $\mathcal{P}'$ , digamos  $S_{ij} = S_{ij1} \cup \dots \cup S_{ijk}$ , de modo que  $\text{vol.}(S_{ij}) = \sum_{\ell=1}^k \text{vol.}(S_{ij\ell})$ . Por propriedade de ínfimo de um conjunto, como  $S_{ij\ell} \subset S_{ij}$ , tem-se  $m_{S_{ij}}(f) \leq m_{S_{ij\ell}}(f)$ , de modo que:

$$m_{S_{ij}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ij}) = m_{S_{ij1}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ij1}) + \cdots + m_{S_{ijk}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ijk}) \leq \\ \leq m_{S_{ij1}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ij1}) + \cdots + m_{S_{ijk}}(f) \cdot \text{vol.}(S_{ijk})$$

A soma em  $i, j$  do primeiro membro da expressão acima, para todo  $S_{ij}$  determinado por  $\mathcal{P}$  é  $s(f, \mathcal{P})$ , enquanto que a soma de todos os membros do segundo membro é  $s(f, \mathcal{P}')$ . Desta forma,  $s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}')$ . A demonstração para somas superiores é análoga.  $\square$

**Corolário 38.** Se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  são duas partições quaisquer de  $R$ , tem-se  $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ , que é uma partição mais fina do que  $\mathcal{P}$  e do que  $\mathcal{P}'$ , simultaneamente. Então:

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}'') \leq S(f, \mathcal{P}'') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

$\square$

Decorre do corolário acima que o limitante superior das somas inferiores de  $f$  é menor ou igual ao limitante inferior das somas superiores de  $f$ , ou seja,

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\} \leq \inf\{S(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\}$$

Uma função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é **Riemann-integrável em  $R$**  se:

- $f$  é limitada em  $R$ ;
- $\sup\{s(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\}$

Denotamos este número dado na igualdade acima por  $\iint_R f(x, y) dx dy$ , que denominamos “a integral de  $f$  sobre  $R$ ”. A seguir, um critério muito útil sobre a integrabilidade de funções.

**Teorema 39.** Uma função limitada  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}$  de  $R$  tal que:

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

*Demonstração.* Certamente que se para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}$  tal que  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$  tem-se  $\sup\{s(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\}$ , de modo que  $f$  é integrável.

Reciprocamente, se  $f$  é Riemann-integrável em  $R$ , tem-se  $\sup\{s(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } R\}$ , de modo que para cada  $\varepsilon > 0$  existem partições  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  tais que  $S(f, \mathcal{P}) - S(f, \mathcal{P}') < \varepsilon$ . Se  $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ , do lema segue que  $S(f, \mathcal{P}'') - s(f, \mathcal{P}'') \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}') < \varepsilon$ .  $\square$

**Exemplo de uma função limitada que não é Riemann-integrável:** considere:

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Se  $\mathcal{P}$  é qualquer partição de  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , cada subretângulo  $S$  por ela determinado tem sempre pontos  $(x, y)$  com  $x$  racional e com  $x$  irracional. Deste modo,  $m_S(f) = 0$  e  $M_S(f) = 1$ , e portanto:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{S \subset R} 0 \cdot \text{vol.}(S) = 0$$

e:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{S \subset R} 1 \cdot \text{vol.}(S) = \text{vol.}([0, 1] \times [0, 1]) = 1$$

de modo que  $f$  não é Riemann-integrável.

Uma caracterização da Riemann-integrabilidade de uma função pode ser dada em termos do “tamanho” do conjunto onde a função é descontínua. A grosso modo, se tal conjunto for “pequeno” (em um sentido que tornaremos preciso a seguir), então a função será Riemann-integrável - e se a função for Riemann-integrável, seu conjunto de discontinuidades será “pequeno”.

**Definição 40 (medida nula).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  tem *medida nula* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma cobertura  $\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$  de  $A$ , por retângulos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=0}^{\infty} \text{vol.}(R_i) < \varepsilon$ .

Como exemplo, podemos citar o gráfico de qualquer função real de uma variável real no plano.

Não é difícil demonstrar que qualquer subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula: de fato, se  $A$  tem medida nula e  $B \subset A$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma

cobertura de  $A$ ,  $\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$ , por retângulos tais que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{vol.}(R_i) < \varepsilon$ . A mesma coleção de retângulos recobre  $B$ , de modo que  $B$  tem medida nula. Pode-se demonstrar, também sem dificuldades, que a reunião finita de conjuntos de medida nula também tem medida nula.

**Definição 41 (conteúdo nulo).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  tem conteúdo nulo se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir uma cobertura finita  $\{R_1, \dots, R_n\}$  de  $A$  por retângulos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=1}^n \text{vol.}(R_i) < \varepsilon$ .

**Exemplo 42.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$  tem conteúdo nulo.

Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $f$  é uniformemente contínua em  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que  $|x_1 - x_2| < \delta$  tem-se  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Tome uma partição  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  tal que  $\max\{|x_{i+1} - x_i| \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\} < \delta$ . A coleção de retângulos  $R_i = [x_i, x_{i+1}] \times [m_i(f), M_i(f)]$ , onde  $m_i(f) = \min\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$  e  $M_i(f) = \max\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$  é tal que  $\text{Graf}(f) \subset \cup_{i=0}^{n-1} R_i$  e, para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , tem-se  $\text{vol.}(R_i) < \delta \cdot \frac{\varepsilon}{b-a}$ , e assim  $\sum_{i=0}^{n-1} \text{vol.}(R_i) < n \cdot \delta \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} < (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$ .

Observe que dado um conjunto compacto  $A \subset \mathbb{R}^2$  de medida nula,  $A$  também tem conteúdo nulo. Com efeito, como  $A$  tem medida nula, dado  $\varepsilon > 0$  existe uma cobertura  $\{R_i\}_{i \in I}$  por retângulos tais que  $\sum_{i \in I} \text{vol.}(R_i) < \varepsilon$ . Considere a cobertura aberta  $\mathfrak{A} = \{\text{int.}(R_i) \mid i \in I\}$  de  $A$ . Pela compacidade de  $A$ , segue que  $\mathfrak{A}$  admite uma subcobertura finita, digamos  $A' = \{\text{int.}(R_i) \mid i \in \{i_1, \dots, i_n\}\}$ . Tem-se, assim, que  $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_n}\}$  é uma cobertura finita de  $A$  por retângulos tais que:

$$\sum_{j=1}^n \text{vol.}(R_{i_j}) \leq \sum_{i \in I} \text{vol.}(R_i) < \varepsilon$$

**Definição 43 (oscilação).** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A *oscilação de  $f$  em  $R$*  é:

$$\omega(f, R) = M_R(f) - m_R(f)$$

Se  $f$  não for contínua em  $(x_0, y_0)$ , a medida da descontinuidade de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  pode ser dada de forma precisa. Sejam, para  $\delta > 0$ :

$$M(f, (x_0, y_0), \delta) = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)\}$$

e

$$m(f, (x_0, y_0), \delta) = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)\}$$

A *oscilação de  $f$  em  $(x_0, y_0)$*  é:

$$\omega(f, (x_0, y_0)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)] = \inf_{\delta > 0} \omega(f, (x_0, y_0), \delta)$$

**Proposição 44.** Sejam  $R$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Tem-se, para qualquer  $(x_0, y_0) \in \text{int.}(R)$ :

$$\omega(f, (x_0, y_0), \delta) = \sup\{|f(x, y) - f(z, w)| \mid (x, y), (z, w) \in B((x_0, y_0), \delta)\}$$

*Demonstração.* Dados  $(x, y), (z, w) \in B((x_0, y_0), \delta)$ , podemos escolher a notação de modo que  $f(z, w) \leq f(x, y)$ . Temos:

$$m(f, (x_0, y_0), \delta) \leq f(z, w) \leq f(x, y) \leq M(f, (x_0, y_0), \delta)$$

o que nos dá:

$$|f(x, y) - f(z, w)| = f(x, y) - f(z, w) = f(x, y) + (-f(z, w)) \leq M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)$$

Assim,  $M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)$  é cota superior de  $\{|f(x, y) - f(z, w)| \mid (x, y), (z, w) \in B((x_0, y_0), \delta)\}$ . Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B((x_0, y_0), \delta)$  tais que  $f(x_1, y_1) > M(f, (x_0, y_0), \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$  e  $f(x_2, y_2) < m(f, (x_0, y_0), \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,  $-f(x_2, y_2) > -m(f, (x_0, y_0), \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Segue-se que  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \geq f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1) + (-f(x_2, y_2)) > (M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)) - \varepsilon$ . Isto mostra que  $M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)$  é a menor cota superior de  $\{|f(x, y) - f(z, w)| \mid (x, y), (z, w) \in B((x_0, y_0), \delta)\}$ ,

de modo que:

$$\omega(f, (x_0, y_0), \delta) = \sup\{|f(x, y) - f(z, w)| \mid (x, y), (z, w) \in B((x_0, y_0), \delta)\}.$$

□

**Observação 45.** Em virtude da **Proposição 44**, como a oscilação é o supremo de um conjunto de números não negativos, tem-se sempre  $\omega(f, (x_0, y_0), \delta) \geq 0$ .

**Proposição 46.** Uma função limitada  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $(x_0, y_0) \in R$  se, e somente se,  $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$ .

*Demonstração.* Suponha  $f$  contínua em  $(x_0, y_0)$ , de modo que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$  implica  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja:

$$(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))(f(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2})$$

Em particular, para qualquer  $\eta > 0$  com  $0 < \eta < \delta$ , vale:

$$(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \eta))(f(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2})$$

Por definição de supremo, como  $f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}$  é cota superior para  $f(x, y)$  em  $B((x_0, y_0), \eta)$ , tem-se:

$$(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \eta))(f(x, y) \leq M(f, (x_0, y_0), \eta) \leq f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2})$$

Analogamente, para o ínfimo, temos:

$$(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \eta))(f(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, (x_0, y_0), \eta) \leq f(x, y))$$

e portanto:

$$\begin{cases} M(f, (x_0, y_0), \eta) \leq f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ f(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, (x_0, y_0), \eta) \end{cases}$$

Segue, portanto, que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \eta < \delta$  implica  $M(f, (x_0, y_0), \eta) - m(f, (x_0, y_0), \eta) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - f(x_0, y_0) = \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} [M(f, (x_0, y_0), \delta) - m(f, (x_0, y_0), \delta)] =$

0, de modo que  $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$ .

Reciprocamente, se  $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < \eta < \delta$  então  $M(f, (x_0, y_0), \eta) - m(f, (x_0, y_0), \eta) < \varepsilon$ .

Como para todo  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \eta)$  tem-se  $f(x, y) \leq M(f, (x_0, y_0), \eta)$  e  $-f(x_0, y_0) \leq -m(f, (x_0, y_0), \eta)$ . Tem-se, assim:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) < M(f, (x_0, y_0), \eta) - m(f, (x_0, y_0), \eta) < \varepsilon.$$

Também valem que  $f(x_0, y_0) \leq M(f, (x_0, y_0), \eta)$  e  $m(f, (x_0, y_0), \eta) \leq f(x, y)$ , logo:

$$f(x_0, y_0) - f(x, y) \leq M(f, (x_0, y_0), \eta) - m(f, (x_0, y_0), \eta)$$

donde segue que:

$$m(f, (x_0, y_0), \eta) - M(f, (x_0, y_0), \eta) \leq f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Assim, para todo  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \eta)$  vale:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq M(f, (x_0, y_0), \eta) - m(f, (x_0, y_0), \eta) < \varepsilon.$$

Segue, portanto, que  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ . □

**Lema 47.** *Seja  $R$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  e  $(x_0, y_0) \in \text{int.}(R)$ . Se  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e  $\omega(f, (x_0, y_0)) < c$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, (x, y)) < c$  para todo  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ .*

*Demonstração.* Pela definição de limite, como  $\omega(f, (x_0, y_0)) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \omega(f, (x_0, y_0), \eta) < c$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, (x_0, y_0), \delta) < c$ . Dado qualquer  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ , tomamos  $\zeta > 0$  com  $B((x, y), \zeta) \subset B((x_0, y_0), \delta)$  e obtemos:

$$\omega(f, (x, y)) \leq \omega(f, (x, y), \eta) \leq \omega(f, (x_0, y_0), \delta) < c$$

□

**Lema 48.** Seja  $R$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, dado  $\varepsilon > 0$ , tem-se que o conjunto:

$$B = \{(x_0, y_0) \in R \mid \omega(f, (x_0, y_0)) \geq \varepsilon\}$$

é fechado em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Mostraremos que  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  é aberto.

Note que:

$$B = R \cap \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, (x, y)) \geq \varepsilon\}$$

e portanto:

$$\mathbb{R}^2 \setminus B = (\mathbb{R}^2 \setminus R) \cup \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, (x, y)) < \varepsilon\}$$

Assim, dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ , tem-se  $(x, y) \notin R$  ou  $\omega(f, (x, y)) < \varepsilon$ . No primeiro caso, como  $R$  é fechado e portanto  $\mathbb{R}^2 \setminus R$  é aberto, existe um retângulo aberto  $C$  que contém  $(x, y)$  tal que  $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus R \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$ .

Tomemos  $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, (x, y)) < \varepsilon\}$ . Pelo **Lema 47**, tem-se que existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, (x, y)) < \varepsilon$  para todo  $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ . Segue disto que  $B((x_0, y_0), \delta) \subset \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, (x, y)) < \varepsilon\}$ , de modo que este conjunto é aberto e seu complementar,  $\{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, (x, y)) \geq \varepsilon\}$  é fechado. Segue que  $\mathbb{R}^2 \setminus B$ , por ser união de abertos, é aberto, e portanto  $B$  é fechado.

□

**Lema 49.** Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $R$  um retângulo e seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que para todo  $(x, y) \in R$  tenhamos  $\omega(f, (x, y)) < \varepsilon$ . Então existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $R$  com  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon \cdot \text{vol.}(R)$ .

*Demonstração.* Dado qualquer  $(x, y) \in R$ , existe um retângulo fechado  $R_{(x,y)}$  que contém  $(x, y)$  em seu interior e tal que  $M_{R_{(x,y)}}(f) - m_{R_{(x,y)}}(f) < \varepsilon$ , de modo que  $\{\text{int}(R_{(x,y)}) \mid (x, y) \in R\}$  constitui uma cobertura aberta de  $R$ . Sendo  $R$  compacto (fechado e limitado), uma quantidade finita de conjuntos da forma  $\text{int}(R_{(x,y)})$  recobre  $R$ , digamos  $\{\text{int}(R_{(x_i, y_i)}) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $R$  tal que cada subretângulo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}$  está contido em algum

$U_{(x_i, y_i)}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tem-se, então,  $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ , de modo que  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \text{vol.}(S) < \varepsilon \cdot \text{vol.}(R)$ . □

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma função seja Riemann-integrável, a saber, que o conjunto de suas descontinuidades tenha medida nula.

**Teorema 50.** *Sejam  $R$  um retângulo e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $\text{Desc}(f)$  tem medida nula então  $f$  é Riemann-integrável em  $R$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $B$  tenha medida nula. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $B_\varepsilon = \{(x, y) \in R \mid \omega(f, (x, y)) \geq \varepsilon\}$ . Então  $B_\varepsilon \subset B$ , de modo que  $B_\varepsilon$  também tem medida nula. Uma vez que  $B_\varepsilon$  é fechado e limitado, segue que  $B_\varepsilon$  é compacto, e portanto tem conteúdo nulo. Assim, existe uma coleção finita de retângulos fechados,  $U_1, \dots, U_n$  tais que  $B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int.}(U_i)$  tais que  $\sum_{i=1}^n \text{vol.}(U_i) < \varepsilon$ .

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $R$  tal que cada subretângulo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}$  está em um dos dois seguintes grupos:

- (1)  $S_1$ , que consiste dos subretângulos  $S$  tais que  $S \subset U_i$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- (2)  $S_2$ , que consiste dos subretângulos  $S$  tais que  $S \cap B_\varepsilon = \emptyset$ .

Como  $f$  é limitada, seja  $M > 0$  tal que:

$$(\forall (x, y) \in R) (|f(x, y)| < M).$$

Tem-se  $M_S(f) - m_S(f) < 2M$  para cada  $S$ . Portanto,

$$\sum_{S \in S_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \text{vol.}(S) < 2M \sum_{i=1}^n \text{vol.}(U_i) < 2M\varepsilon$$

Se  $S \in S_2$ , tem-se para todo  $(x, y) \in S$ ,  $\omega(f, (x, y)) < \varepsilon$ . Pelo **Lema 49**, existe uma partição  $\mathcal{P}'$ , mais fina do de  $\mathcal{P}$  tal que:

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \text{vol.}(S') < \varepsilon \cdot \text{vol.}(S),$$

para  $S \in S_2$ . Então:

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}') &= \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \text{vol.}(S') + \\
&+ \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \text{vol.}(S') < 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \varepsilon \cdot \text{vol.}(S) \leq \\
&\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot \text{vol.}(R)
\end{aligned}$$

Como  $M$  e  $\text{vol.}(R)$  são números fixados, isto mostra que se pode encontrar uma partição  $\mathcal{P}'$  com  $S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}')$  tão pequeno quanto se queira. Desta forma,  $f$  é Riemann-integrável.  $\square$

## Referências

- [1] Pinto, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.
- [2] Craizer, Marcos; TAVARES Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.
- [3] Finney, Ross L.; WEIR Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: George B. Thomas Jr.** 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. 570 p. v. 2. ISBN 978-85-88639362.
- [4] Spivak, Michael. **Cálculo en Variedades**. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1988. 134 p. ISBN 978-84-291-5142-8.