MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Agenda 2

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

Nesta agenda trataremos de transformações que podemos aplicar no plano a fim de tornar integrais duplas sobre essas mais simples de se calcular, levando em conta a sua simetria ou mesmo reduzindo-as a figuras "bem comportadas".

Veremos que geralmente é possível, ao nos depararmos com uma região de integração "torta", lançarmos mão de uma técnica que simplifica grandemente nosso trabalho, a mudança de variáveis. Tal técnica nos permite "mudar" a região de integração "torta" para uma mais "bem comportada", levando sempre em conta o efeito da "mudança de escala em cada ponto" (o determinante jacobiano), dando uma interpretação geométrica precisa para isto.

Veremos finalmente um exemplo particularmente útil e frequente de mudança de coordenadas, que é capaz de aproveitar a simetria do problema em apreço a fim de simplificar os cálculos: o sistema de coordenadas polares.

1 Transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

Um **sistema de coordenadas** em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação injetora de algum subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

*jeancb@ime.usp.br

Exemplo 1. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. A função:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \mapsto & (a \cdot u + b \cdot v, c \cdot u + d \cdot v) \end{array}$$

é injetora e, portanto, um sistema de coordenadas.

Exemplo 2. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0, \infty[\times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \end{array}$$

é injetora e, portanto, um sistema de coordenadas.

As definições de limite, continuidade e diferenciabilidade são dadas coordenada a coordenada:

Definição 3 (**Continuidade de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$**)**.** *Uma função:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \mapsto & (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array}$$

é contínua em $(u_0, v_0) \in U$ se, e somente se, $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forem contínuas em (u_0, v_0). Analogamente, φ é contínua em $D \subset U$ se, e somente se, $\varphi_1 \restriction_D : D \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 \restriction_D : D \to \mathbb{R}$ forem funções contínuas.

Definição 4 (**Diferenciabilidade de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$**)**.** *Uma função:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \mapsto & (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array}$$

é diferenciável em $(u_0, v_0) \in U$ se, e somente se, $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forem funções diferenciáveis em (u_0, v_0). Analogamente, φ é diferenciável em $D \subset U$ se, e somente se, $\varphi_1 \restriction_D : D \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 \restriction_D : D \to \mathbb{R}$ forem funções diferenciáveis.

Conforme já se sabe, sendo $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ diferenciável em $(u_0, v_0) \in \text{int.}(D)$, sua diferencial será a transformação linear dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi'(u_0, v_0) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \end{array}$$

A tal transformação associamos seu determinante, cujo significado geométrico será discutido posteriormente.

Definição 5 (Jacobiano de uma Tranformação em Um Ponto). *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (u_0, v_0) \in \text{int.}(D)$ e $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$, uma transformação diferenciável em P_0 cujas funções coordenadas são $x, y : U \to \mathbb{R}$. O **determinante jacobiano de φ em** $P_0 = (u_0, v_0)$ é*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) := \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

Por vezes também denotaremos o determinante jacobiano por $|J\varphi(u_0, v_0)|$.

1.1 Interpretação Geométrica do Jacobiano

Nesta seção procuraremos dar uma "intuição" sobre como uma transformação φ deforma certas regiões do plano e qual o significado de seu determinante jacobiano.

Sejam D um aberto de $\mathbb{R}^2$ e:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \varphi[D] \subseteq \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

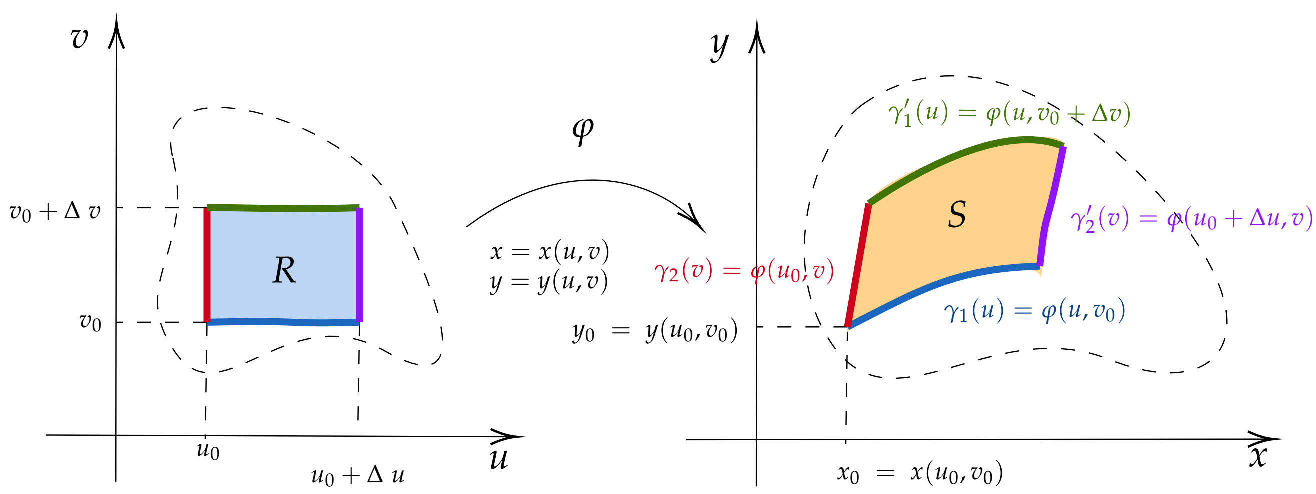
(aqui denotamos $\varphi_1 = x : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 = y : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) uma transformação invertível tal que

$$(\forall (u, v) \in D)(|J\varphi(u, v)| \neq 0)$$

Sejam $(u_0, v_0) \in D$, $\Delta u, \Delta v > 0$ tais que o retângulo:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u) \& (v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v)\}$$

de área $\Delta u \cdot \Delta v$ esteja inteiramente contido em D. A transformação φ aplica R na região $S = \varphi[R]$ delimitada pelas curvas:



$$\begin{array}{rcl} \gamma_1: \; [u_0, u_0+\Delta u] & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \varphi(u, \underline{v_0}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1': \; [u_0, u_0+\Delta u] & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \varphi(u, \underline{v_0+\Delta v}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2: \; [v_0, v_0+\Delta v] & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & \varphi(\underline{u_0}, v) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2': \; [v_0, v_0+\Delta v] & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & \varphi(\underline{u_0+\Delta u_0}, v) \end{array}$$

Os vetores:

$$\vec{T}_1 := \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

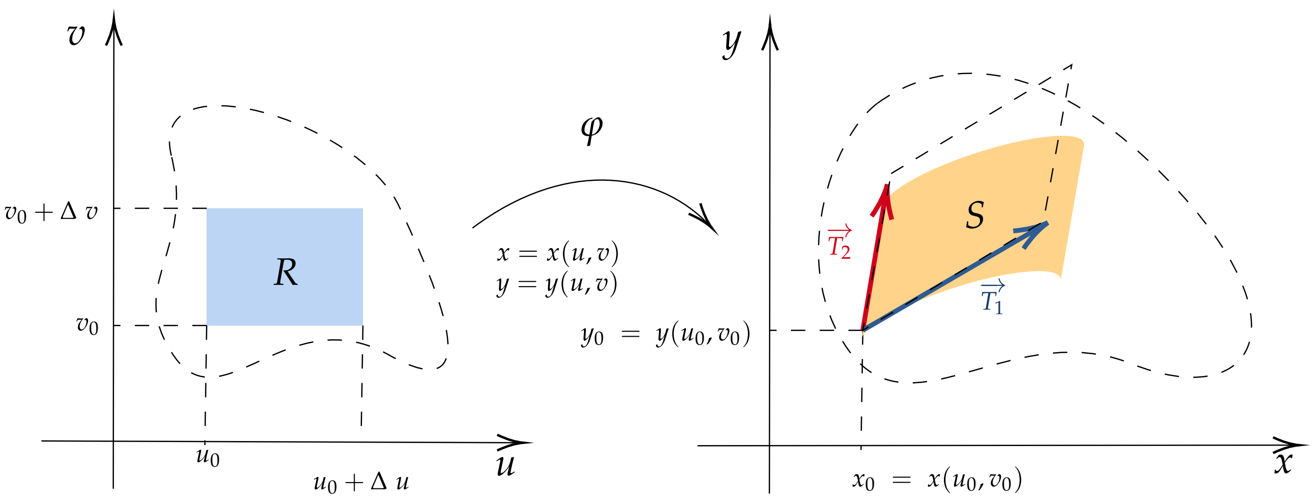
e

$$\vec{T}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

são tangentes a $\mathrm{tr}(\gamma_1)$ e $\mathrm{tr}(\gamma_2)$ em $\varphi(u_0, v_0)$, respectivamente. Intuitivamente, se considerarmos Δu e Δv suficientemente pequenos, a área de S poderá ser aproximada pela área do paralelogramo de vértice $\varphi(u_0, v_0)$ determinado pelos vetores $\Delta u \cdot \vec{T}_1$ e $\Delta v \cdot \vec{T}_2$, cuja área é dada por:

$$A(S) \approx \left\| \Delta u \cdot \vec{T}_1 \times \Delta v \cdot \vec{T}_2 \right\| = \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Note que:



$$\|\vec{T_1} \times \vec{T_2}\| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{array} \right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |J\varphi(u_0,v_0)|$$

e assim:

$$A(S) \approx |J\varphi(u_0,v_0)| \cdot \overbrace{\Delta u \cdot \Delta v}^{A(R)} = |J\varphi(u_0,v_0)| \cdot A(R) \tag{1}$$

Podemos interpretar, sob as circunstâncias apresentadas aqui, o valor absoluto do determinante jacobiano de uma transformação invertível em um ponto P_0 como "um fator de escala de área pontual", um número capaz de quantificar o quanto uma transformação aumenta, mantém ou diminui a área de um pequeno retângulo com vértice em P_0. Mais precisamente, se $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \varphi[D] \subseteq \mathbb{R}^2$ é de classe $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^2)$ tal que $J\varphi(u_0,v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo, tem-se:

$$\lim_{r\to 0} \frac{A(\varphi[B((u_0,v_0),r)])}{A(B((u_0,v_0),r))} = |J\varphi(u_0,v_0)|$$

Uma justificativa precisa deste fato será dada como uma aplicação do teorema da mudança de variáveis.

1.2 Mudança de variáveis na Integral Dupla

Um dos objetivos da mudança de variáveis na integral dupla é facilitar o cálculo da integral:

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

quando o integrando f ou a região D são tais que a integral não é simples de ser calculada diretamente. Como exemplo, considere a integral:

$$\iint_R \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{4(y+x)}\right) dxdy,$$

onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $x+y=1$ e $x+y=2$.

Na integração de funções de uma variável, usamos o método da substituição para simplificar a integral $\int_a^b f(x)dx$. Este método é baseado na fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du,$$

onde $a=\varphi(c)$ e $b=\varphi(d)$, sendo φ invertível e com derivada contínua em $[c,d]$ e f contínua em $[a,b]$.

No caso de funções de duas variáveis, transformaremos a integral dupla $\iint_D f(x,y)dxdy$, onde D é uma região do plano Oxy em outra integral dupla $\iint_Q F(u,v)dudv$, onde Q é uma região do plano Ouv.

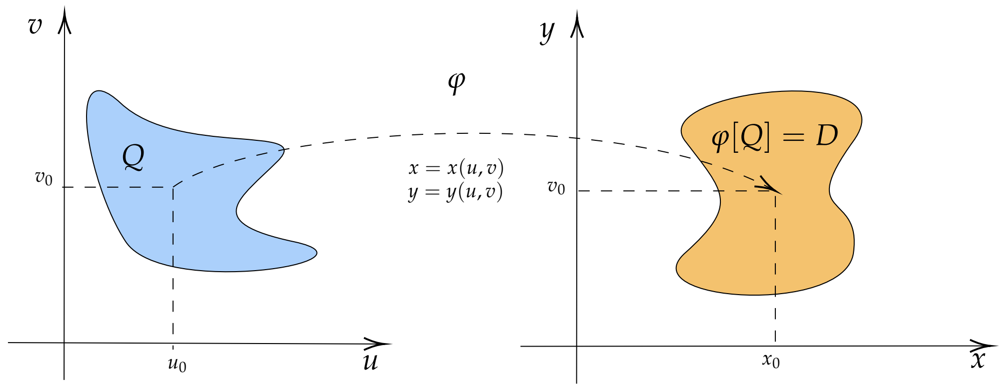
Para tanto, consideremos as funções de x e y definidas por:

$$x = x(u,v), \; y = y(u,v) \tag{2}$$

Estas equações definem uma aplicação φ que associa a cada ponto (u,v) do plano Ouv um ponto (x,y) do plano Oxy, isto é:

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

Impondo condições apropriadas sobre $x(u,v)$ e $y(u,v)$, podemos determinar uma região Q do plano Ouv de modo que φ é contínua e injetora em Q, e $\varphi[Q]=D$, conforme ilustra a figura a seguir:



O teorema a seguir nos fornece condições sob as quais é possível mudar as variáveis na integral dupla.

Teorema 6 (Mudança de Variáveis). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $x = \varphi_1, y = \varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ e $Q \subset U$ um compacto (conjunto fechado e limitado) tais que:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

• *é injetora em Q;*

• *o determinante Jacobiano da aplicação φ, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ nunca se anula em Q.*

Se f é Riemann-integrável em $\varphi[Q]$, então:

$$\iint_{\varphi[Q]} f(x,y)dxdy = \iint_Q f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \tag{3}$$

Demonstração. (informal) Para simplificar, suponhamos que Q seja um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados, digamos $Q = [a,b] \times [c,d]$. Consideremos uma partição regular de ordem n de Q, $\mathcal{P}_Q^{(n)} = \{(u_i, v_j) \in \mathbb{R}^2 \mid (u_i \in \mathcal{P}_{[a,b]}^n) \& (v_j \in \mathcal{P}_{[c,d]}^{(n)})\}$. Esta subdivisão de Q em sub-retângulos $\Delta Q_{ij} = [u_i, u_i + \Delta u] \times [v_j, v_j + \Delta v]$. Para valores suficientemente grandes de n, os sub-retângulos ΔQ_{ij} serão suficientemente pequenos, de modo que:

$$(\forall (x,y) \in \Delta Q_{ij})(f(x,y) \approx f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)))$$

Segue, assim, que a integral de f em ΔQ_{ij} é, aproximadamente:

$$f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \cdot \text{área}\,(\Delta Q_{ij})$$

Conforme visto em (1), temos:

$$\text{área}\,(\Delta Q_{ij}) \approx |\det J(u_i, v_j)| \cdot \Delta u \Delta v$$

e portanto:

$$\iint_{\varphi[Q]} f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j)) \cdot |\det J(u_i,v_j)|\Delta u \Delta v$$

O valor exato da integral é obtido no limite, quando $n \to \infty$, e portanto:

$$\iint_{\varphi[Q]} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j)) \cdot |\det J(u_i,v_j)|\Delta u \Delta v =$$

$$= \iint_{Q} f(\varphi(u,v)) \cdot |\det J(u,v)| dudv$$

□

Há um resultado que nos permite "fortalecer" o **Teorema da Mudança de variáveis**, no sentido em que podemos remover uma das condições que suas hipóteses exigem.

De fato, podemos remover a condição de o determinante jacobiano de g nunca se anular em U, dado que g é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ (pois suas funções coordenadas, x e y, o são). Isto ocorre porque, sendo g uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, o conjunto dos seus "pontos problemáticos", ou seja, pontos onde o determinante jacobiano se anula, tem "área" (medida nula) zero - e portanto não contribui com a parte relevante da integral. Isto tudo é uma consequência do:

Teorema 7 (Teorema de Sard). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ uma função de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ e $\Sigma = \left\{(x,y) \in U \mid \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 0\right\}$. O conjunto $g[\Sigma]$ tem medida nula ("área zero", sendo portanto um conjunto que nada interfere na integrabilidade da função).*

Teorema 8. *Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto U. Se no ponto $(x_0, y_0) \in U$ $d\varphi(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ for um isomorfismo, então:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{A.}(\varphi[B((x_0,y_0),r)])}{\text{A.}(B((x_0,y_0),r))} = |J\varphi(x_0,y_0)|$$

Demonstração. Uma observação preliminar: se $f : B((x_0, y_0), r) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e se definirmos $m(r) = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in B((x_0,y_0),r)\}$ e $M(r) = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in B((x_0,y_0),r)\}$, então $f(x_0,y_0) = \lim_{r\to 0} m(r) = \lim_{r\to 0} M(r)$, e $(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r))(m(r) \leq f(x,y) \leq M(r))$. Segue-se daí, pela monotonicidade da integral dupla, que:

$$m(r) \leq \frac{1}{\text{A.}(B((x_0,y_0),r))} \iint_{B((x_0,y_0),r)} f(x,y)dxdy \leq M(r)$$

e pelo **Teorema do Confronto**,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\text{A.}(B((x_0,y_0).r))} \iint_{B((x_0,y_0),r)} f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)$$

Disto segue, fazendo $f(x,y) = |Jg(x,y)|$ que:

$$\text{A.}(g[B((x_0,y_0),r)]) = \iint_{g[B((x_0,y_0),r)]} 1dxdy = \iint_{B((x_0,y_0),r)} |Jg(x,y)|dxdy$$

onde na segunda igualdade utilizamos o **Teorema da Mudança de Variáveis**, e portanto:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{A.}(g[B((x_0,y_0),r)])}{\text{A.}(B((x_0,y_0),r))} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\text{A.}(B((x_0,y_0),r))} \iint |Jg(x,y)|dxdy = |Jg(x_0,y_0)|$$

□

2 Casos Especiais de Mudanças de Variáveis

Embora a mudança de variável seja feita, frequentemente, de modo "artesanal", dois tipos de mudança de coordenadas são particularmente frequentes. Nós os analisaremos nesta seção.

2.1 Mudança Linear de Coordenadas

Consideramos a transformação linear φ definida por:

$$x(u,v) = au + bv \ \text{ e } \ y(u,v) = cu + dv \tag{4}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. O determinante jacobiano desta transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Sempre que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, o sistema (4) pode ser resolvido para u e v em termos de x e y. Portanto, φ é injetora em todo $\mathbb{R}^2$, e a fórmula (3) pode ser escrita na forma:

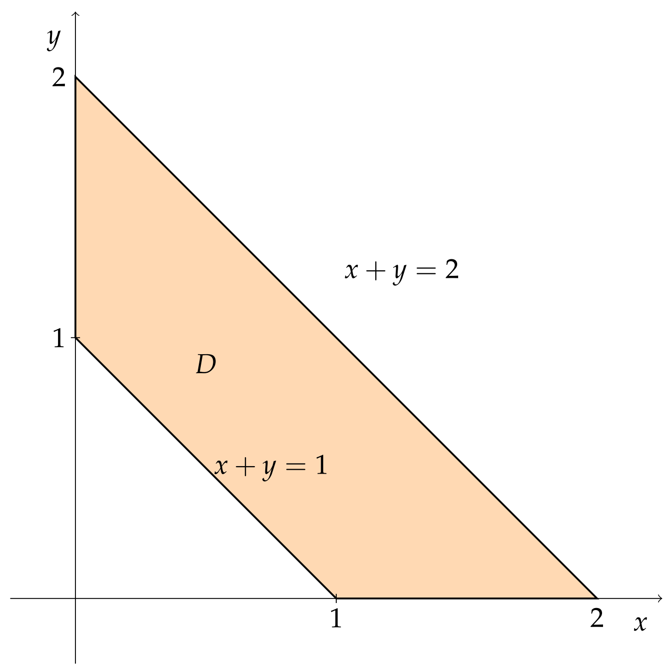
$$\iint_{g[Q]} f(x,y)dxdy = |ad - bc| \iint_Q f(au + bv, cu + dv)dudv \tag{5}$$

Exemplo 9. *Passemos a resolver a integral dada no início destas notas:*

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{4(y+x)}\right) dxdy,$$

onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $x + y = 1$ e $x + y = 2$.

Solução: Esboçamos a região D:



e notamos que é uma **região limitada e fechada**.

$f(x,y) = \cos\left(\frac{\pi\cdot(y-x)}{4\cdot(y+x)}\right)$ é uma função contínua em todo D (trata-se da composta da função contínua cosseno com uma função racional cujo denominador não se anula em nenhum ponto de D). Logo, f **é Riemann-integrável em** D.

Vamos buscar uma mudança de coordenadas que torne mais simples a integral:

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi\cdot(y-x)}{4\cdot(y+x)}\right) dxdy$$

Vamos fazer, neste caso:

$$\begin{cases} u = \pi y - \pi x \\ v = 4y + 4x \end{cases} \tag{6}$$

Agora vamos escrever x e y (que são as coordenadas da substituição) em termos de u e de v:

$$\begin{cases} u = \pi y - \pi x \\ v = 4y + 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = \frac{u}{\pi} \\ y + x = \frac{v}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{v}{4} - \frac{u}{\pi} \\ 2y = \frac{v}{4} + \frac{u}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u,v) = \frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi} \\ y(u,v) = \frac{u}{2\pi} + \dfrac{v}{8} \end{cases}$$

A transformação desejada é, portanto:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{v}{8} - \dfrac{u}{2\pi}, \dfrac{u}{2\pi} + \dfrac{v}{8}\right) \end{array}$$

Note que φ foi obtida como inversa de uma transformação linear:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\pi \cdot y - \pi \cdot x, 4y + 4x) \end{array}$$

De fato, para qualquer $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

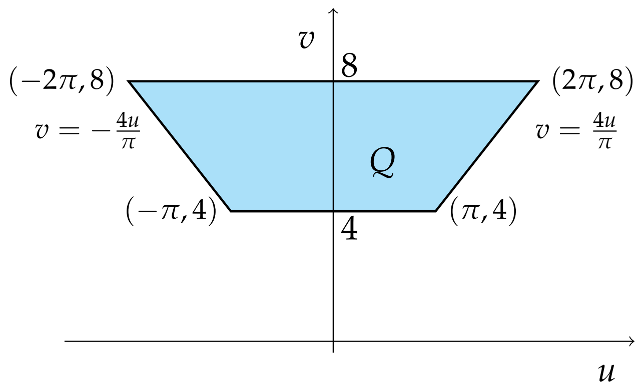
$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(u,v) = \psi\left(\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}, \frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}\right) = \\ = \left(\pi \cdot \left(\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}\right) - \pi \cdot \left(\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}\right), 4 \cdot \left(\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}\right) + 4 \cdot \left(\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}\right)\right) = (u,v) \end{aligned}$$

e para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(x,y) = \varphi(\pi \cdot y - \pi \cdot x, 4y + 4x) = \\ = \left(\frac{4y + 4x}{8} - \frac{\pi \cdot y - \pi \cdot x}{2\pi}, \frac{\pi \cdot y - \pi \cdot x}{2\pi} + \frac{4y + 4x}{8}\right) = (x,y) \end{aligned}$$

Devemos, agora, determinar a região $Q = \varphi^{-1}[D] = \psi[D]$. Para facilitar nossos cálculos, levaremos em conta que ψ é uma transformação linear bijetora e que, portanto, aplica segmentos em segmentos. Como:

$$\begin{cases} \psi(0,1) = (\pi, 4) \\ \psi(0,2) = (2\pi, 8) \\ \psi(2,0) = (-2\pi, 8) \\ \psi(1,0) = (-\pi, 4) \end{cases}$$



que é, novamente, uma **região fechada e limitada**.

Notamos que $\varphi \restriction_Q$ é **injetora** (já que é a restrição de φ (uma função que é bijetora e, em particular, injetora) a Q).

Observamos que as funções coordenadas, $\varphi_1(u,v) = \frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}$ e $\varphi_2(u,v) = \frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}$, por serem lineares, **são ambas de classe** $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Agora calculamos o determinante jacobiano desta transformação em um ponto qualquer. Como é mais fácil, calculamos o determinante jacobiano de ψ em um ponto (x_0, y_0) qualquer e depois tomamos o seu recíproco:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} -\pi & \pi \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8\pi \neq 0$$

$$\therefore \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)} = -\frac{1}{8\pi} \neq 0$$

Concluímos, assim, que **o determinante jacobiano da transformação φ nunca se anula**.
Estamos, portanto, em condições de aplicar o **Teorema da Mudança de Variável**:

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi \cdot (y-x)}{4 \cdot (x+y)}\right) dxdy = \iint_Q \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \left|-\frac{1}{8\pi}\right| dudv$$

Resta expressar Q como uma região do tipo II. Para encontrarmos as equações das retas que delimitam a região Q do plano Ouv, notamos que a reta $x + y = 1$ é levada por ψ na reta:

$$1 = x + y = \left(\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}\right) + \left(\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}\right) = \frac{v}{4},$$

ou seja, na reta horizontal $\{(u,4) \mid u \in \mathbb{R}\}$.
A reta $x + y = 2$ é levada por ψ na reta:

$$2 = x + y = \left(\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi}\right) + \left(\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8}\right) = \frac{v}{4},$$

ou seja, na reta horizontal $\{(u, 8) \mid u \in \mathbb{R}\}$.

A reta $x = 0$ é levada em $\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi} = 0$, e a reta $y = 0$ é levada em $\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8} = 0$

A nova região de integração é a região Q delimitada pelas retas $v = 4$, $v = 8$, $\frac{v}{8} - \frac{u}{2\pi} = 0$ e $\frac{u}{2\pi} + \frac{v}{8} = 0$.

Assim, tem-se:

$$\iint_R \cos\left(\frac{\pi \cdot (y-x)}{4 \cdot (y+x)}\right) dxdy = \frac{1}{8\pi} \iint_Q \cos\left(\frac{u}{v}\right) dudv = \frac{1}{8\pi} \cdot \int_4^8 \int_{u=-\frac{\pi}{4}v}^{u=\frac{\pi}{4}v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) dudv =$$

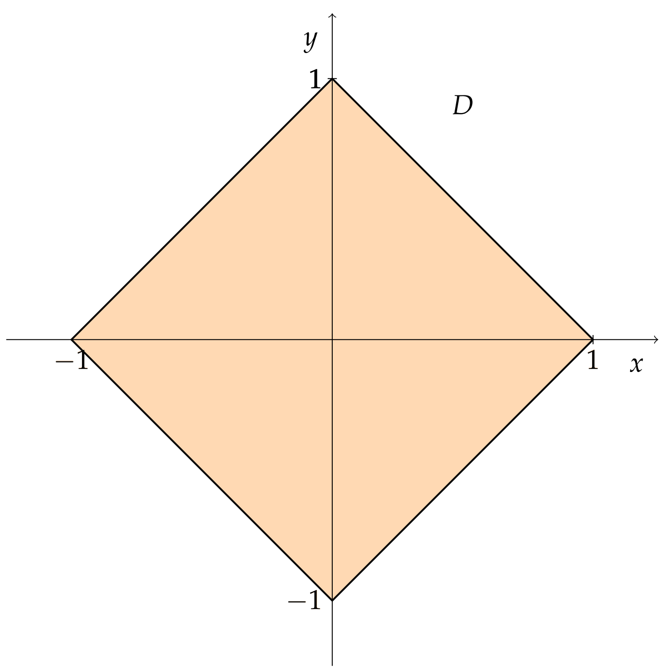
$$= \frac{1}{8\pi} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}$$

Exemplo 10. *Sejam D o quadrado de vértices $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ e $(0, 1)$, f a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (x+y)^4 \cdot (x-y)^2 \end{array}$$

Calcular $\iint_D f(x, y) dxdy$.

Solução: esboçamos a região D abaixo:



e notamos que é uma **região limitada e fechada**.

$f(x,y) = (x+y)^4 \cdot (x-y)^2$ é contínua (por ser polinomial) em D, e portanto f **é Riemann-integrável em** Q.

Vamos buscar uma mudança de coordenadas que torne mais simples a integral:

$$\iint_Q (x+y)^4 \cdot (x-y)^2 dxdy$$

Vamos fazer, neste caso, $u = x+y$ e $v = x-y$.

Agora, vamos escrever x e y (que serão as coordenadas da substituição) em termos de u e de v:

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = u+v \\ 2y = u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u,v) = \frac{u+v}{2} \\ y(u,v) = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

A transformação que precisamos é, portanto:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}$$

Note que φ é bijetora, pois foi calculada como a inversa da transformação:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

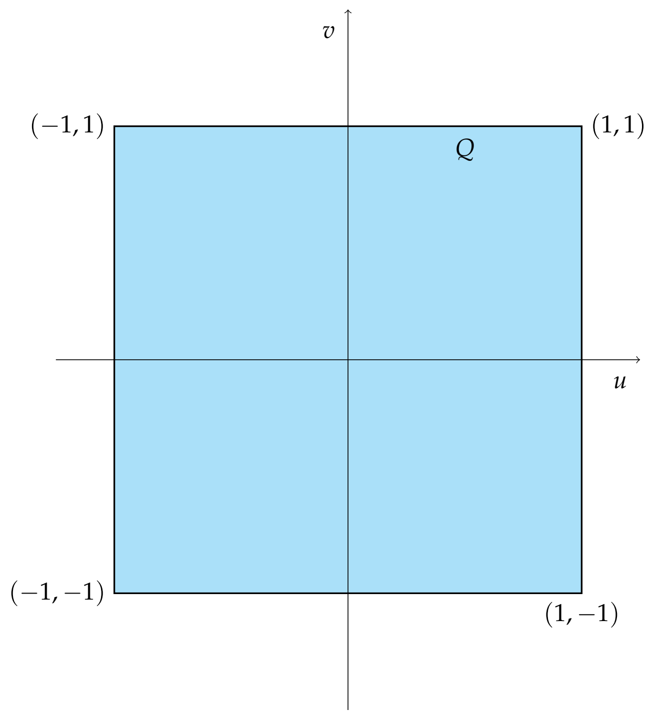
De fato, observe que $(\varphi \circ \psi)(x,y) = \varphi\,(x+y, x-y) = \left(\frac{(x+y)+(x-y)}{2}, \frac{(x+y)-(x-y)}{2}\right) = (x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e que $(\psi \circ \varphi)(u,v) = \psi\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = (u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Devemos, agora, determinar a região $Q = \varphi^{-1}[D] = \psi[D]$. Para facilitar nossos cálculos, levaremos em conta que ψ é uma transformação linear bijetora e que, portanto, aplica segmentos em segmentos. Como

$$\begin{cases} \psi(-1,0) = (-1,-1) \\ \psi(0,1) = (1,-1) \\ \psi(1,0) = (1,1) \\ \psi(0,-1) = (-1,1) \end{cases}$$

O segmento que une $(-1,0)$ a $(0,1)$ será transformado, por ψ, no segmento que une $(-1,-1)$ a $(1,-1)$; o segmento que une $(0,1)$ a $(1,0)$ será transformado, por ψ, no segmento que une $(1,-1)$ a $(1,1)$, o segmento que une $(1,0)$ a $(0,-1)$ será transformado, por ψ, no segmento que une $(1,1)$ a $(-1,1)$.

Desta forma, $Q = \varphi^{-1}[D] = \psi[D]$ será o quadrado de vértices $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ e $(-1,1)$:



que é, novamente, **uma região fechada e limitada do plano**.

Notamos que que $\varphi \restriction_Q$ **é injetora** (já que é a restrição de φ (uma função que é bijetora e, em particular, injetora) a Q).

Observamos que as funções coordenadas de φ, $\varphi_1(u,v) = \frac{u+v}{2}$ e $\varphi_2(u,v) = \frac{u-v}{2}$, por serem lineares, são ambas **de classe** $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Agora calculamos o determinante jacobiano desta transformação em um ponto qualquer $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right| = |\det J\varphi(u_0,v_0)| = \left|\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

Observamos que **para todo** $(u_0,v_0) \in Q$ **tem-se** $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right| \neq 0$.

Estamos, portanto, cumprindo as hipóteses do **Teorema de Mudança de Variáveis**, que nos permite calcular a integral original como segue:

$$\iint_R (x+y)^4 \cdot (x-y)^2 dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}[R]} f(\varphi(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv$$

Finalmente:

$$\iint_{\varphi^{-1}[R]} f(\varphi(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv = \iint_Q u^4 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} u^4 v^2 du \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(v^2 \int_{-1}^{1} \frac{u^5}{5} du \right) dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \int_{-1}^{1} \left(v^2 \right) dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}.$$

Pode acontecer, no entanto, de uma única mudança de variável não dar conta de simplificar suficientemente a integral dupla. Nestes casos, procedemos por etapas, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 11. *Calcular a massa de* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 \leq 100\}$, *com densidade* $\delta(x,y) = x - 2y + 18$

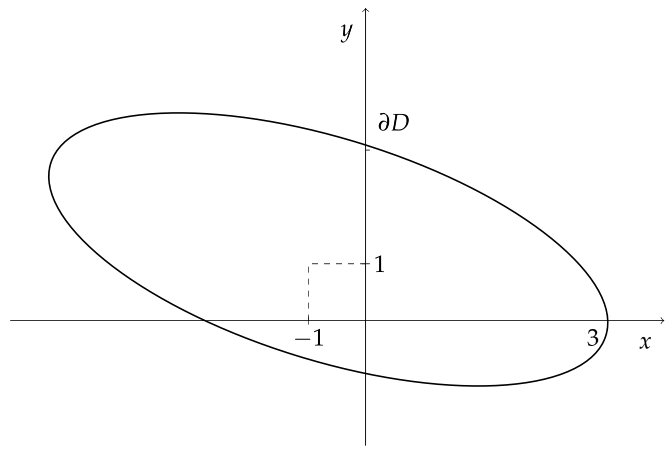
Solução: O problema é calcular a integral dupla:

$$\iint_D (x - 2y + 18) dxdy$$

Com um pouco de Geometria Analítica, vemos que a fronteira da região D,

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 = 100\}$$

é uma elipse rotacionada:



Efetuamos, primeiramente, uma mudança de variáveis linear, como segue:

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3x + 4y \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rccc} \vartheta: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-2y, 3x+4y) \end{array}$$

Escrevendo x e y em termos de u e v obtemos:

$$\begin{cases} x(u,v) = \frac{2u+v}{5} \\ y(u,v) = \frac{-3u+v}{10} \end{cases}$$

de modo que a transformação que vai simplificar a região de integração será:

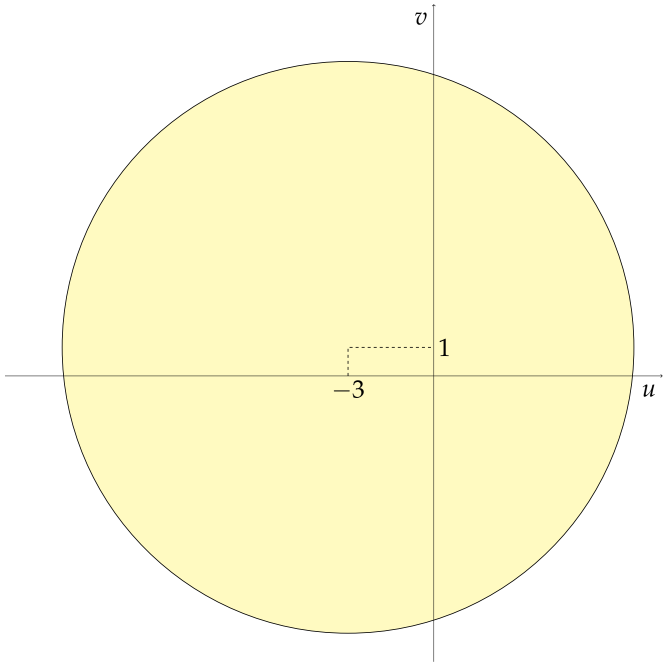
$$\begin{array}{rccc} \zeta: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\frac{2u+v}{5}, \frac{-3u+v}{10}\right) \end{array}$$

Temos, assim:

$$\zeta^{\dashv}[D] = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \zeta(u,v) \in D\} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{2u+v}{5}, \frac{-3u+v}{10}\right) \in D\right\} =$$
$$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u+3)^2 + (v-1)^2 \leq 100\}$$

$$|J\zeta(u_0,v_0)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

Assim, a região $\zeta^{\dashv}[D]$ é:



Pelo **Teorema da Mudança de Variáveis**, segue-se que:

$$\iint_D \delta(x,y)dxdy = \iint_D (x-2y+18)dxdy = \iint_{\zeta^{\dashv}[D]} (u+18)\cdot\frac{1}{10}dudv = \frac{1}{10}\iint_{\zeta^{\dashv}[D]} (u+18)dudv$$

A região $\zeta^{\dashv}[D]$ é uma circunferência centrada no ponto $(-3,1)$ - o que não é conveniente em termos de limites de integração. Faremos, portanto, mais uma mudança de variável, correspondente a uma translação.

A fim de resolver esta integral, fazemos mais uma mudança de variável:

$$\begin{cases} \alpha = u+3 \\ \beta = v-1 \end{cases}$$

de modo que:

$$\begin{cases} u = \alpha-3 \\ v = \beta+1 \end{cases}$$

A transformação $\varphi(\alpha,\beta) = (\alpha-3,\beta+1)$ tem determinante jacobiano igual a 1 e é tal que $\varphi^{\dashv}[\zeta^{\dashv}[D]] = \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha^2+\beta^2 \leq 100\}$, e portanto:

$$\iint_{\zeta^{\dashv}[D]} (u+18)dudv = \iint_{\varphi^{\dashv}[\zeta^{\dashv}[D]]} (\alpha+15)d\alpha d\beta = \int_{-10}^{10}\int_{-\sqrt{100-\alpha^2}}^{-\sqrt{100-\alpha^2}} (\alpha+15)d\beta d\alpha = 1500\pi$$

Conclui-se, assim, que:

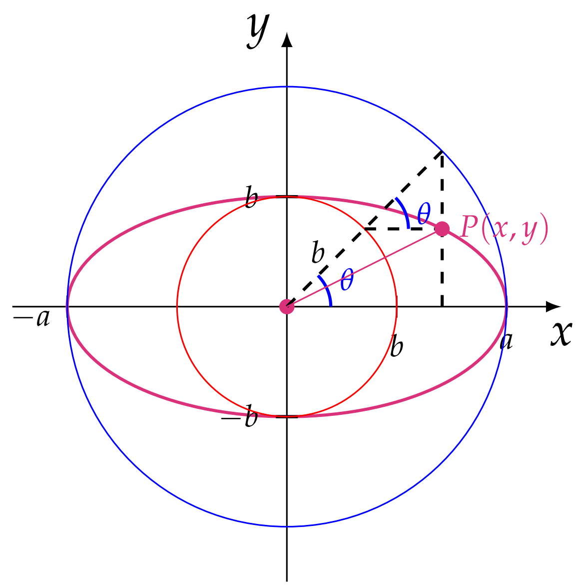
$$\iint_D \delta(x,y)dxdy = \frac{1}{10}1500\pi = 150\pi$$

2.2 Sistema de Coordenadas Elípticas

Sejam $a > 0, b > 0$ fixados. Uma mudança de coordenadas da forma:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (a\cdot\rho\cdot\cos(\theta), b\cdot\rho\cdot\sin(\theta)) \end{array}$$

é denominado um **sistema de coordenadas elípticas**.



Observe que o retângulo $Q = [0,1] \times [0,2\pi]$ é aplicado por φ em:

$$\varphi[Q] = \{\varphi(\rho,\theta) \mid (0 \leq \rho \leq 1)\&(0 \leq \theta \leq 2\pi)\} =$$
$$= \{(a\cdot\rho\cdot\cos(\theta), b\cdot\rho\cdot\sin(\theta)) \mid (0 \leq \rho \leq 1)\&(0 \leq \theta \leq 2\pi)\} = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

O determinante jacobiano de um sistema de coordenadas elípticas é:

$$|J\varphi(\rho_0,\theta_0)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}(\rho_0,\theta_0)\right| = \begin{vmatrix} a\cdot\cos(\theta_0) & -a\cdot\rho_0\cdot\sin(\theta_0) \\ b\cdot\sin(\theta_0) & b\cdot\rho_0\cdot\cos(\theta_0) \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot\rho_0$$

Desta forma, **tem-se para qualquer** $(\rho_0,\theta_0) \in]0,\infty[\times[0,2\pi[$, $|J\varphi(\rho_0,\theta_0)| = a\cdot b\cdot\rho_0 \neq 0$.

Chamamos a atenção, aqui, para o fato de que **a mudança de coordenadas elíptica é injetora (por ser invertível) em qualquer região contida em** $]0,\infty[\times]0,2\pi[$. De fato, dados $(\rho_1,\theta_1),(\rho_2,\theta_2)\in]0,\infty[\times[0,2\pi[$, tem-se:

$$\varphi(\rho_1,\theta_1)=\varphi(\rho_2,\theta_2) \iff (a\cdot\rho_1\cdot\cos(\theta_1),b\cdot\rho_1\cdot\sin(\theta_1))=(a\cdot\rho_2\cdot\cos(\theta_2),b\cdot\rho_2\cdot\sin(\theta_2))$$

$$\begin{cases} a\cdot\rho_1\cdot\cos(\theta_1)=a\cdot\rho_2\cdot\cos(\theta_2) \\ b\cdot\rho_1\cdot\sin(\theta_1)=b\cdot\rho_2\cdot\sin(\theta_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta_1)=\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)=\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\sin(\theta_2) \end{cases}$$

o que implica:

$$1=\cos^2(\theta_1)+\sin^2(\theta_1)=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\cdot\cos^2(\theta_2)+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\cdot\sin^2(\theta_2)=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2$$

Uma vez que $\rho_1>0$ e $\rho_2>0$, tem-se:

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2=1 \iff \rho_1=\rho_2$$

Sabendo que $\rho_1=\rho_2$, teremos $\varphi(_1,\theta_1)=\varphi(\rho_2,\theta_2)$ somente se:

$$\begin{cases} a\cdot\cos(\theta_1)=a\cdot\cos(\theta_2) \\ b\cdot\sin(\theta_1)=b\cdot\sin(\theta_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta_1)=\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)=\sin(\theta_2) \end{cases} \overset{\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi[}{\iff} \theta_1=\theta_2$$

Também é fácil verificar que $x(\rho,\theta)=\varphi_1(\rho,\theta)=a\cdot\rho\cdot\cos(\theta)$ e $y(\rho,\theta)=\varphi_2(\rho,\theta)=b\cdot\rho\cdot\sin(\theta)$ **são ambas funções de classe** $\mathcal{C}^1(]0,\infty[\times[0,2\pi[,\mathbb{R})$.

As observações feitas acima nos garantem que podemos aplicar o **Teorema da Mudança de Variável** sempre que necessário.

Exemplo 12. *Calcular a integral:*

$$\iint_D e^{-(x^2+4y^2)}dxdy$$

onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2\leq 4\}$

Solução: Vamos buscar uma mudança de coordenadas elípticas:

$$\begin{cases} x(\rho,\theta)=a\cdot\rho\cdot\cos(\theta)=2\cdot\rho\cdot\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta)=b\cdot\rho\cdot\sin(\theta)=1\cdot\rho\cdot\sin(\theta) \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,\infty[\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (2\cdot\rho\cdot\cos(\theta), 1\cdot\rho\cdot\sin(\theta)) \end{array}$$

e $|J\varphi(\rho_0,\theta_0)| = 2\cdot\rho_0$. Temos:

$$Q = \varphi^{-1}[D] = \{(\rho,\theta) \mid 4\rho^2\cos^2(\theta) + 4\rho^2\cdot\sin^2(\theta) \leq 4\} = \{(r,\theta) \mid \rho^2 \leq 1\} = [0,1]\times[0,2\pi]$$

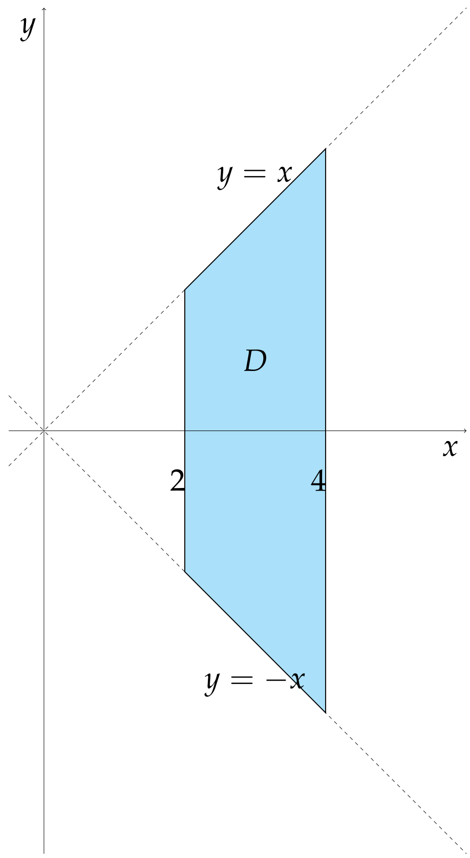
$$\iint_D e^{-(x^2+4y^2)}dxdy = \iint_{\varphi^{-1}[D]} e^{-\rho^2}\cdot 2\cdot\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-\rho^2}\cdot 2\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(e^{-\rho^2}\Big|_0^1\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(e^{-1^2} - e^{-0^2}\right)d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

Exemplo 13. *Seja* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (1\leq x\leq 2)\&(|y|\leq x)\}$. *Calcular:*

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+9y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solução: Esboçamos a região de integração:



que é uma **região limitada e fechada**.

A função $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+9y^2)^{\frac{3}{2}}}$ é contínua em toda a região D, e portanto f **é Riemann-integrável em** D.

Vamos buscar uma mudança de coordenadas elípticas que torne mais simples a integral:

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+9y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Neste caso, podemos tomar, por exemplo:

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) = a \cdot \rho \cdot \cos(\theta) = 3 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = b \cdot \rho \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot \rho \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

de modo que o argumento da integral dupla acima envolve a expressão mais simples:

$$\frac{1}{(3^2 \cdot \rho^2 \cdot \cos^2(\theta) + 9 \cdot \rho^2 \cdot \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{27\rho^3}$$

Desta forma, a transformação que tomaremos será:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [0,\infty[\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (3\cdot\rho\cdot\cos(\theta), 1\cdot\rho\cdot\sin(\theta)) \end{array}$$

e $|J\varphi(\rho_0,\theta_0)| = 3\cdot\rho_0$. Precisamos, agora, explicitar $\varphi^{\dashv}[D]$, a "nova" região de integração. Observe que explicitar $\varphi^{\dashv}[D]$ corresponde a descrever a região D mediante coordenadas elípticas.

Se um ponto $(x,y) = (3\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ pertence à região D, então a coordenada $y = \rho\cdot\cos(\theta)$ deverá variar entre os valores $-3\cdot\rho\cdot\cos(\theta)$ e $3\cdot\rho\cdot\cos(\theta)$, ou seja:

$$-3\cdot\rho\cdot\cos(\theta) \leq \rho\cdot\sin(\theta) \leq 3\cdot\rho\cdot\cos(\theta)$$

$$-3 \leq \tan(\theta) \leq 3$$

$$-\arctan(3) \leq \theta \leq \arctan(3)$$

A coordenada $x = 3\rho\cos(\theta)$, por sua vez, deverá satisfazer:

$$1 \leq 3\cdot\rho\cdot\cos(\theta) \leq 2$$

$$\frac{1}{3} \leq \rho\cdot\cos(\theta) \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot\cos(\theta)} \leq \rho \leq \frac{2}{3\cdot\cos(\theta)}$$

Pelo **Teorema de Mudança de Variável**, temos:

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+9y^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{\varphi^{\dashv}[D]} \frac{1}{27\cdot\rho^3}\cdot\overbrace{3\cdot\rho}^{=|J\varphi(\rho,\theta)|}\,d\rho d\theta$$

Aplicamos, agora, o **Teorema de Fubini**:

$$\iint_{\varphi^{\dashv}[D]} \frac{1}{27\cdot\rho^3}\cdot\overbrace{3\cdot\rho}^{=J\varphi(\rho,\theta)}\,d\rho d\theta = \int_{-\arctan(3)}^{\arctan(3)}\left(\int_{\frac{1}{3\cos(\theta)}}^{\frac{2}{3\cos(\theta)}}\frac{1}{9\rho^2}d\rho\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\int_{-\arctan(3)}^{\arctan(3)}\left(-\frac{1}{\rho}\Bigg|_{\frac{1}{3\cos(\theta)}}^{\frac{2}{3\cos(\theta)}}\right)d\theta\right) = \frac{1}{9}\cdot\int_{-\arctan(3)}^{\arctan(3)}\left(\frac{3}{2}\cos(\theta)\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\sin(\theta)\Bigg|_{-\arctan(3)}^{\arctan(3)} = \frac{1}{3}\sin(\arctan(3)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

2.3 Sistema de Coordenadas Polares

As integrais algumas vezes - a depender da simetria da região de integração - são mais fáceis de calcular se mudarmos para coordenadas polares. Nesta seção mostraremos como fazer a mudança e como calcular integrais sobre regiões cujas fronteiras são dadas por equações polares.

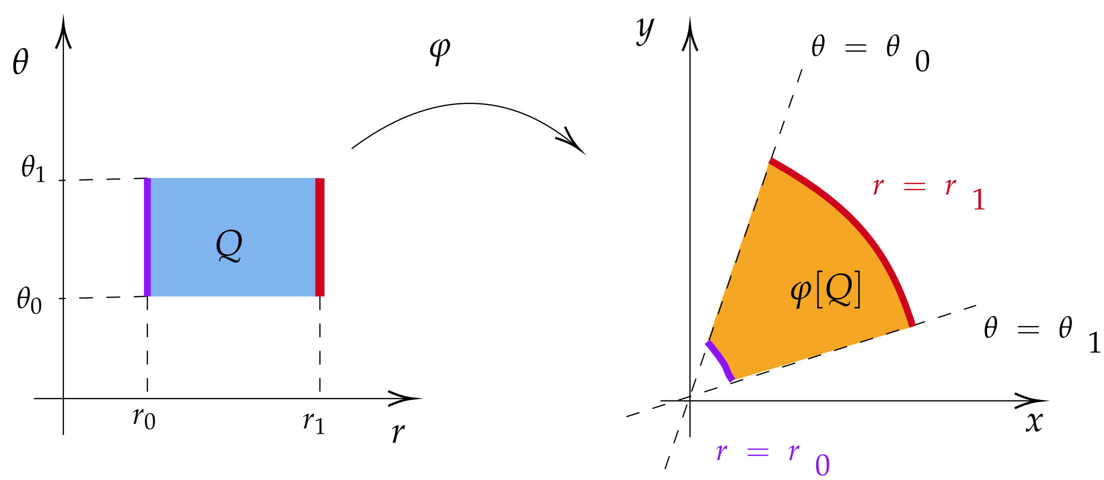
Um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, descrito em coordenadas cartesianas, também pode ser dado no sistema de coordenadas polares, (r, θ), onde r é o comprimento do vetor $\vec{OP}$ e θ é o ângulo, tomado no sentido anti-horário, entre $\vec{OP}$ e o eixo Ox. A transformação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,\infty[\times[0,2\pi[\subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta)) \end{array}$$

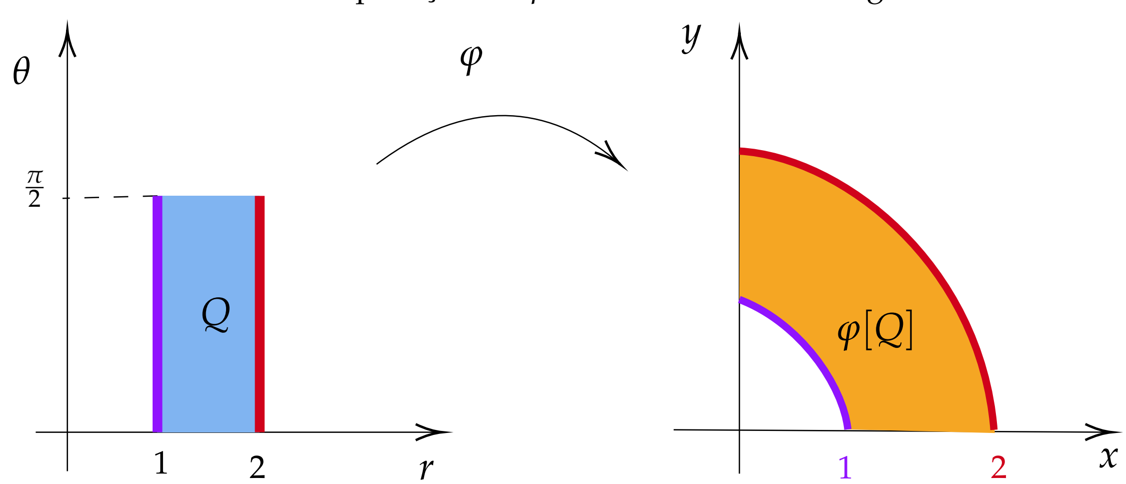
fornece a relação entre as coordenadas cartesianas e polares. Temos, portanto:

$$\varphi(r,\theta) = (\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta)),$$

onde $\varphi_1(r,\theta) = r\cdot\cos(\theta)$ e $\varphi_2(r,\theta) = r\cdot\sin(\theta)$.



Efeito da aplicação de φ na forma de um retângulo.



Efeito da aplicação de φ na forma de um retângulo.

O determinante jacobiano desta transformação é:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r_0,\theta_0) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r_0,\theta_0) \\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\cdot\sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

Podemos interpretar este determinante do seguinte modo:

"A área da imagem de um retângulo R bastante pequeno com vértice $(r_0,\theta_0) \in]0,\infty[\times]0,2\pi[$ é aproximadamente igual a r_0 multiplicado pela área de R. Assim, quanto mais distante a primeira coordenada do vértice do retângulo R estiver da origem, mais deformado será o valor da área da imagem."

Observação 14. *Note que o* ***sistema de coordenadas polares*** *é um caso especial do* ***sistema de coordenadas elípticas*** *(basta tomarmos $a = b = 1$). Desta forma, tudo que se disse a respeito da aplicabilidade do* ***Teorema da Mudança de Variável*** *ao sistema de coordenadas elípticas se aplica também ao sistema de coordenadas polares.*

2.3.1 Mudando Integrais Cartesianas para Integrais Polares

O procedimento para mudar uma integral cartesiana $\iint_{\varphi[Q]} f(x,y)dxdy$ para uma integral polar é composto de dois passos:

- Substituímos $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, e trocamos $dxdy$ por $rdrd\theta$ na integral cartesiana.

- Estabelecemos os limites polares de integração para a fronteira de Q.

A fórmula (3) se escreve, no caso da mudança de coordenadas polares:

$$\iint_{\varphi[Q]} f(x,y)dxdy = \iint_Q r\cdot f(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta))drd\theta \tag{7}$$

Exemplo 15. *Calcular* $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$*, onde R é a região interior à cardióide $r = 1+\sin(\theta)$ e exterior à circunferência $r = 1$.*

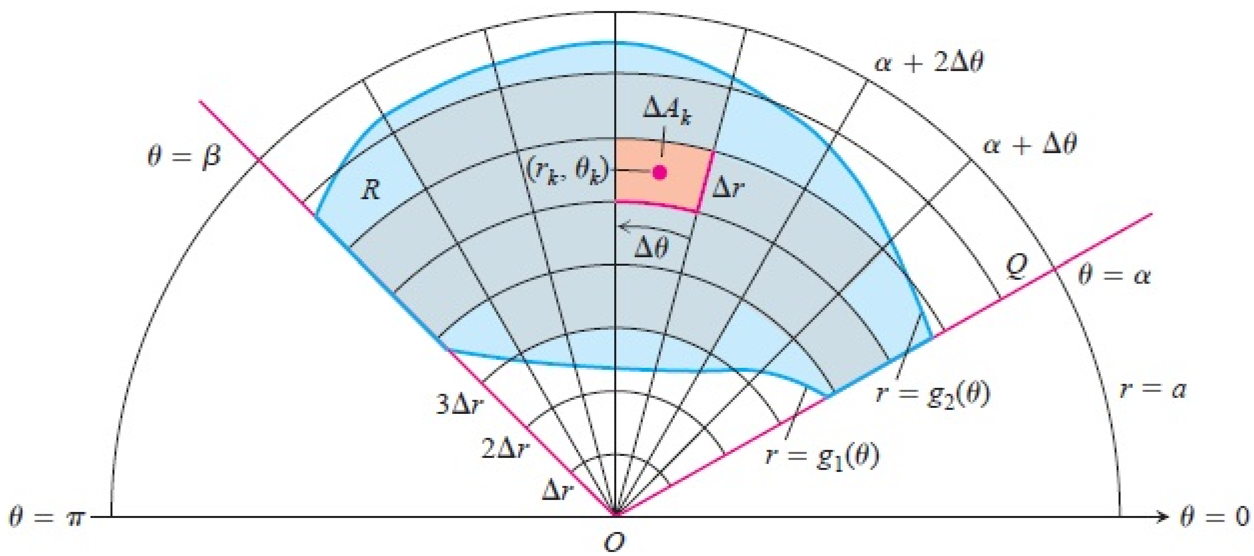
Solução: Pela própria forma da região de integração, sugere-se uma mudança de coordenadas de cartesianas para polares.

Neste caso, temos, fazendo $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ e $dxdy$ igual a $rdrd\theta$:

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\int_0^{\pi}\int_1^{1+\sin(\theta)} \frac{1}{r}rdrd\theta = 2\cdot\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta = 4$$

2.3.2 Integrais em Coordenadas Polares

Quando definimos a integral dupla de uma função sobre uma região R no plano Oxy, começamos cortando R em retângulos cujos lados eram paralelos aos eixos coordenados. Estes eram os formatos naturais para usar porque seus lados têm valores constantes de x ou de y. Em coordenadas polares, o formato natural é um "retângulo polar" cujos lados têm valores constantes de r e θ.



Suponha que uma função $f = f(r, \theta)$ seja definida sobre uma região R que é limitada pelos raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas curvas contínuas $r = \varphi_1(\theta)$ e $r = \varphi_2(\theta)$. Suponha, também, que $(\forall\theta \in [\alpha, \beta])(0 \leq \varphi_1(\theta) \leq \varphi_2(\theta))$. Então R está em uma região com formato de leque Q definida pelas desigualdades $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Cobrimos Q com uma grade de arcos circulares e raios. Os arcos são cortados de circunferências centradas na origem, com raios $\Delta r, 2\Delta r, \cdots, m\Delta r$, onde $\Delta r = a/m$. Os raios são dados por:

$$\theta = \alpha,\ \theta = \alpha + \Delta\theta,\ \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \cdots, \theta = \alpha + m\Delta\theta = \beta,$$

onde $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m$. Os arcos e raios dividem Q em pequenos pedaços chamados "retângulos polares".

Enumeramos os retângulos polares que estão dentro de R (a ordem não importa), chamando as áreas de $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$.

Seja (r_k, θ_k) o centro de um retângulo polar cuja área é ΔA_k. Por "centro" queremos dizer o ponto que está na metade do caminho entre os arcos circulares sobre o raio que é a bisstriz deles. Então formamos a soma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k \tag{8}$$

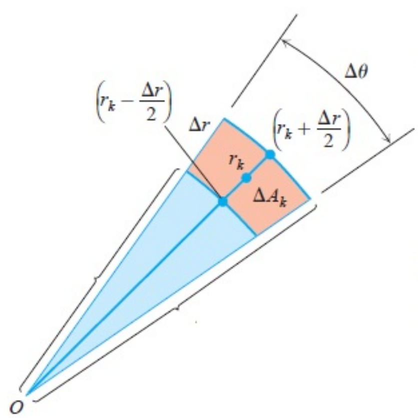
Se f for contínua em R, essa soma aproximará um limite quando refinarmos a grade para fazer Δr e $\Delta\theta$ tendem a zero. O limite é a integral dupla de f sobre R. Em símbolos,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)dA$$

Para calcularmos este limite, primeiro temos que escrever a soma S_n de uma maneira que expresse ΔA_k em termos de Δr e $\Delta\theta$. O raio do arco interno que limita ΔA_k é $r_k - \Delta r/2$. O raio externo é $r_k + \Delta r/2$. As áreas dos setores circulares subentendidos por esses arcos na origem são:

Raio Interno: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Raio Externo: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$



Assim, a área do retângulo polar é $\Delta A_k =$ (área da seção maior) - (área da seção menor).

$$\Delta A_k = \frac{\Delta r}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r\Delta\theta$$

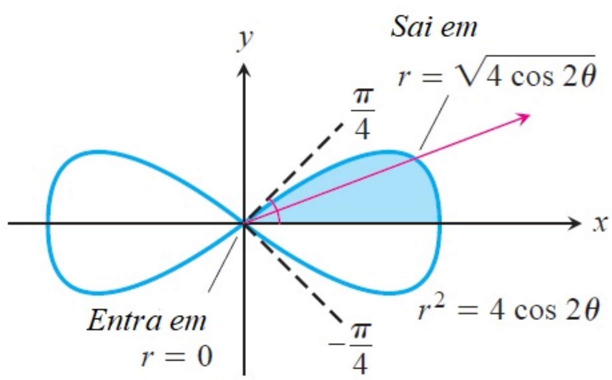
Combinando o resultado acima com (8), temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta$$

Aplicando o **Teorema de Fubini**, tomando o limite da soma acima conforme $n \to \infty$, obtemos:

$$\iint_R f(r,\theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta$$

Exemplo 16. *Calcular a área dentro da lemniscata* $r^2 = 4\cos(2\theta)$.



Solução: Primeiro traçamos o gráfico da lemniscata para determinar os limites de integração, e vemos que a área total é quatro vezes a área da porção no primeiro quadrante.

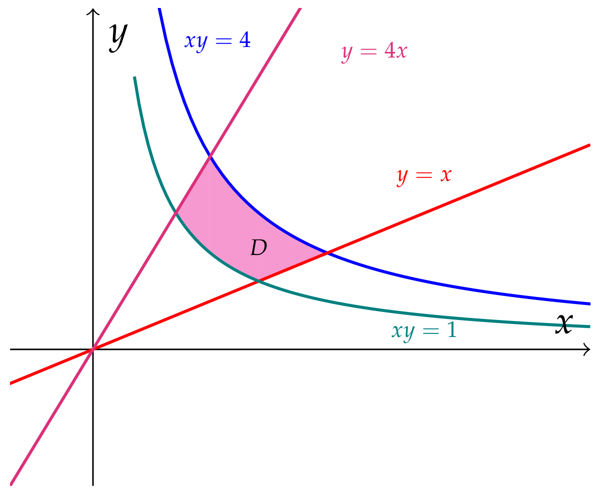
$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{4\cos(2\theta)}} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos(2\theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\theta) d\theta = 4\sin(2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4$$

2.4 Sistemas Artesanais de Coordenadas

Frequentemente é necessário lançarmos mão da nossa criatividade para resolver certas integrais. Para tanto, buscamos expressões envolvendo x e y que variem entre constantes, digamos $a \leq \phi_1(x,y) \leq b$, $c \leq \phi_2(x,y) \leq d$. Em seguida, orientados pelo esboço da região em apreço, fazemos a mudança de coordenadas $u = \phi_1(x,y)$ e $v = \phi_2(x,y)$.

Exemplo 17. *Calcular a área da região D delimitada pelas curvas ddadas por* $x \cdot y = 1$, $x \cdot y = 2$, $y = 4x$ *e* $y = x$.

Solução: Esboçamos a região:



Observamos que:

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 1 \leq x \cdot y \leq 4 \\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4 \end{cases}$$

de modo que convém efetuar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = x \cdot y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Observamos que $x > 0$ e $y > 0$. Expressando x e y em termos de u e v, obtemos:

$$\begin{cases} u = x \cdot y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{y} \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{vx} \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{u}{v} \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{u \cdot v} \end{cases}$$

A mudança de variável que se sugere é:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \{(u,v) \mid (u > 0)\&(v > 0)\} & \to & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0)\&(y > 0)\} \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{u \cdot v}\right) \end{array}$$

Observe que φ é a inversa da transformação:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0)\&(y > 0)\} & \to & \{(u,v) \mid (u > 0)\&(v > 0)\} \\ & (x,y) & \mapsto & \left(x \cdot y, \frac{y}{x}\right) \end{array}$$

e que portanto φ **é injetora** em seu domínio. Notamos também que as funções coordenadas, $x(u,v) = \varphi_1(u,v) = \sqrt{u/v}$ e $y(u,v) = \varphi_2(u,v) = \sqrt{u \cdot v}$ **são de classe** $\mathcal{C}^1(]0,\infty[\times]0,\infty[,\mathbb{R})$.

O determinante jacobiano desta transformação em um ponto $(u_0, v_0) \in]0,\infty[\times]0,\infty[$ é:

$$|J\varphi(u_0,v_0)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{v_0} & -\frac{u_0}{v_0^2} \\ v_0 & u_0 \end{vmatrix} = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_0}{v_0} = \frac{2u_0}{v_0} \neq 0$$

Também, $\varphi^{\dashv}[D] = \{(u,v) \in]0,\infty[\times]0,\infty[| \ (1 \leq u \leq 4) \& (1 \leq v \leq 4)\} \subset]0,\infty[\times]0,\infty[$ é uma região **limitada e fechada do plano**. Como $f(x,y) = 1$ é contínua, segue que f **é Riemann-integrável**. Pelo **Teorema da Mudança de Variável**, tem-se:

$$\text{área}\,(D) = \iint_D dxdy = \iint_{\varphi^{\dashv}[D]} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_1^4 \left(\int_1^4 \frac{2u}{v} du\right) dv = 15 \cdot \int_1^4 \frac{dv}{v} =$$

$$= 15 \cdot \ln(4)$$

Referências

[1] Pinto, Diomara; Morgado, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.

[2] Craizer, Marcos; Tavares Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.

[3] Finney, Ross L.; Weir Maurice D.; Giordano, Frank R. **Cálculo: George B. Thomas Jr.**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. 570 p. v. 2. ISBN 978-85-88639362.

[4] Spivak, Michael. **Cálculo en Variedaes**. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1988. 134 p. ISBN 978-84-291-5142-8.