

# MAT2455 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

## AGENDA 3

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

### 1 Integrais Triplas

Integrais de funções definidas em regiões do  $\mathbb{R}^3$  são chamadas **integrais triplas**. Assim como as integrais simples e as integrais duplas, as integrais triplas são limites de somas de Riemann. A única diferença é que, no caso das integrais triplas, as parcelas são dadas pelo produto do valor da função em um ponto multiplicado pelo *volume* de um paralelepípedo em torno deste ponto.

Integrais triplas são bastante utilizadas em Matemática, Física e Engenharias. Por exemplo, os conceitos de volume, centro de massa, centróide e momentos de inércia de regiões espaciais são definidos através de integrais triplas. Também a carga total em uma certa região de uma distribuição espacial de carga é dada por uma integral tripla - e existem muitas outras situações em que a idéia de integral tripla é essencial.

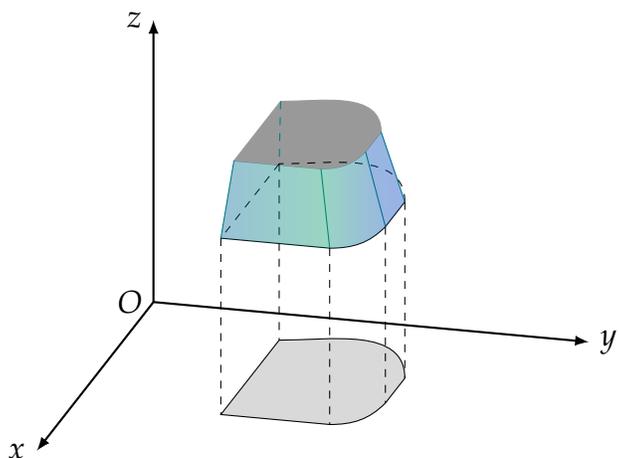
#### 1.1 Somas de Riemann e o Conceito de Integral Tripla

Essencialmente, a integral tripla é o limite de somas de Riemann em que cada parcela é o produto do valor da função em um ponto da região de integração pelo volume de uma região bem “pequena” em torno deste ponto.

Assim como em nossos estudos da agenda anterior, diremos que uma região do espaço tridimensional é Jordan-mensurável sempre que for limitada e sua fronteira tiver um tamanho “irrelevante” para os fins da integração. Neste caso, um conjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  será **Jordan-mensurável** se, e somente se, for limitado e se sua fronteira tiver “volume” nulo. Isto fica garantido, por exemplo, se o sólido  $W$  for delimitado por pedaços de planos ou por superfícies que são gráficos de funções contínuas, como ilustrado a seguir.

---

\*jeancb@ime.usp.br



Sejam  $W \subset \mathbb{R}^3$  uma região Jordan-mensurável (limitada e cuja fronteira tenha “volume” nulo) e  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $W$ . A **integral tripla de  $f$  em  $W$** , que será denotada por:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$$

ou

$$\iiint_W f(x, y, z) dV$$

será obtida como segue.

Começaremos supondo, a fim de simplificarmos nossa análise, que a região  $W$  é um paralelepípedo, digamos:

$$W = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2].$$

Se  $\mathcal{P}_1^{(n)} [a_1, a_2]$ ,  $\mathcal{P}_2^{(n)} [b_1, b_2]$  e  $\mathcal{P}_3^{(n)} [c_1, c_2]$  são partições regulares de ordem  $n$  de  $[a_1, a_2]$ ,  $[b_1, b_2]$  e  $[c_1, c_2]$ , temos que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^{(n)} [a_1, a_2] \times \mathcal{P}_2^{(n)} [b_1, b_2] \times \mathcal{P}_3^{(n)} [c_1, c_2]$  é uma partição regular de ordem  $n^3$  do paralelepípedo  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ , que subdivide  $W$  em  $n^3$  caixas, denotadas por  $R_{ijk} = [a_1 + i\Delta x, a_1 + (i + 1)\Delta x] \times [b_1 + j\Delta y, b_1 + (j + 1)\Delta y] \times [c_1 + k\Delta z, c_1 + (k + 1)\Delta z]$ , onde  $\Delta x = (a_2 - a_1)/n$ ,  $\Delta y = (b_2 - b_1)/n$  e  $\Delta z = (c_2 - c_1)/n$ .

Dividimos, assim, os intervalos  $[a_1, a_2]$ ,  $[b_1, b_2]$  e  $[c_1, c_2]$  em subintervalos de comprimentos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ . Construimos, então, as somas de Riemann:

$$S_n(f, W) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

onde  $\bar{x}_i$  é um ponto qualquer do subintervalo  $[x_i, x_i + \Delta x] = [a_1 + i\Delta x, a_1 + (i + 1)\Delta x]$ ,  $\bar{y}_j$  é um ponto qualquer do subintervalo  $[y_j, y_j + \Delta y] = [b_1 + j\Delta y, b_1 + (j + 1)\Delta y]$  e  $\bar{z}_k$  é um ponto qualquer do subintervalo  $[z_k, z_k + \Delta z] = [c_1 + k\Delta z, c_1 + (k + 1)\Delta z]$ . Denotaremos o produto cartesiano destes três intervalos por  $R_{ijk} = [x_i, x_i + \Delta x] \times [y_j, y_j + \Delta y] \times [z_k, z_k + \Delta z]$ .

Como as parcelas das somas de Riemann são o produto do valor de  $f$  em um ponto de  $W$  pelo volume de uma pequena região em torno deste ponto, estas somas são boas aproximações para a integral tripla de  $f$  em  $W$ , esperamos que tanto melhores quanto menores tomarmos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ .

A integral tripla de  $f$  em  $W$  é, por definição, o limite das somas de Riemann quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja:

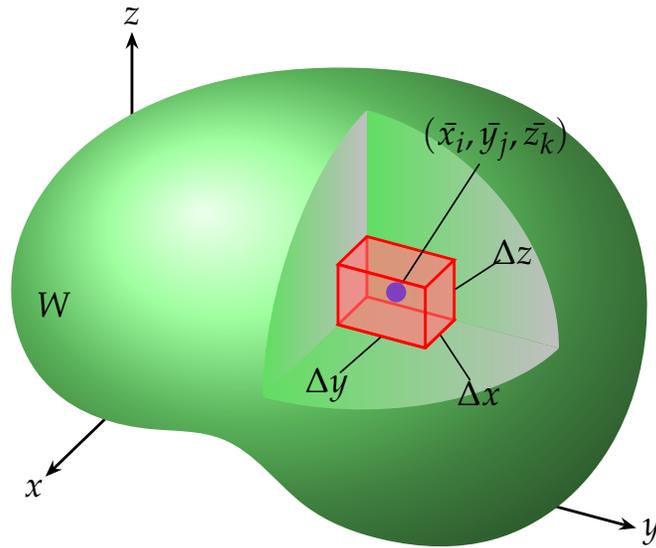
$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, W) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Formalmente, temos a seguinte:

**Definição 1.** *Sejam  $W = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}^3$  um paralelepípedo e  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Seja, também,  $S_n(f, W)$  uma soma de Riemann como a descrita anteriormente. Se existir  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, W)$  e este limite não depender da escolha de  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \in R_{ijk}$ , dizemos que  $f$  é **Riemann-integrável em  $W$**  e denotamos este limite por:*

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \text{ ou } \iiint_W f(x, y, z) dV$$

A fim de definir a integral tripla de  $f$  em uma região limitada,  $W$ , qualquer do espaço, lançaremos mão do mesmo artifício usado na definição de integral dupla, estendendo a função a um cubo como sendo 0 fora da região original.



Assim, sendo  $W$  uma região limitada do espaço, ela está contida em algum paralelepípedo,  $\bar{W}$ , da forma  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ . Podemos, então, aumentar a região de integração de  $W$  para  $\bar{W}$ , considerando:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \quad \bar{W} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in W \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in \bar{W} \setminus W \end{cases} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\bar{W}} \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

A seguir vemos como a integral tripla nos permite definir o volume de uma região Jordan-mensurável do espaço.

**Observação 2.** Se  $W \subset \mathbb{R}^3$  é Jordan-mensurável e  $f: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $f(x, y, z) = 1$  para todo  $(x, y, z) \in W$ , então:

$$\text{Vol.}(W) = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W dV$$

**Observação 3.** Se um sólido tem formato  $B \subset \mathbb{R}^3$ , Jordan-mensurável, e se  $\delta : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\delta(x, y, z) > 0$  para todo  $(x, y, z) \in B$ , fornecendo em cada ponto a densidade do sólido, então sua massa será:

$$m(B) = \iiint_B \delta(x, y, z) dx dy dz$$

O gráfico de uma função real de três variáveis reais é um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , que não conseguimos visualizar. Por este motivo, a integral tripla de uma função geral não possui uma interpretação geométrica envolvendo este gráfico, como ocorria com as integrais duplas.

## 1.2 Funções Riemann-Integráveis

Recordemos a seguinte:

**Definição 4.** Sejam  $W \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto Jordan-mensurável e  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função **limitada** qualquer. Dizemos que  $f$  é **Riemann-integrável em  $W$**  se existir o limite das somas de Riemann de  $f$  em  $W$  e este limite não depender da escolha dos pontos  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$  tomados no interior dos paralelepípedos determinados por qualquer que seja a partição em apreço, ou seja, se existir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

para qualquer partição e qualquer escolha de pontos  $(x_i, y_j, z_k)$  no interior dos paralelepípedos determinados por esta partição. Neste caso, denotamos o limite por  $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$ .

O resultado a seguir nos dá uma condição suficiente para garantir a integrabilidade de uma função de três variáveis reais:

**Teorema 5 (Condição suficiente para Riemann-integrabilidade).** Se  $W \subset \mathbb{R}^3$  é Jordan-mensurável  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, exceto possivelmente em um subconjunto contido em uma reunião finita de gráficos de funções contínuas de duas variáveis reais a valores reais, então  $f$  é Riemann-integrável em  $W$ .

## 1.3 Propriedades da Integral Tripla

Conforme veremos nos teoremas a seguir, a integral tripla tem propriedades análogas às das integrais duplas. As demonstrações destes teoremas são análogas aos teoremas da AGENDA 2, de modo que as omitiremos.

**Teorema 6 (Linearidade).** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f, g : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções Riemann integráveis. Então:

$$\iiint_W (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x, y, z) dx dy dz = \alpha \cdot \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz + \beta \cdot \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz$$

**Teorema 7 (Aditividade).** Sejam  $W \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto Jordan-mensurável tal que  $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$  onde o "volume" de cada  $W_i \cap W_j$  é zero, e  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann-integrável em  $W$ . Então para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem-se  $f \upharpoonright_{W_i}$  é Riemann-integrável em  $W_i$  e vale:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \iiint_{W_i} f \upharpoonright_{W_i}(x, y, z) dx dy dz$$

**Teorema 8 (Monotonicidade).** Sejam  $W \subset \mathbb{R}^3$  Jordan-mensurável e  $f, g : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções Riemann-integráveis não-negativas tais que:

$$(\forall (x, y, z) \in W)(f(x, y, z) \leq g(x, y, z))$$

Então:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz$$

Também, análogo ao teorema que temos para integrais duplas, o seguinte:

**Teorema 9 (Teorema do Valor Médio para Integrais Triplas).** Sejam  $W \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto Jordan-mensurável, com  $\text{int.}(W)$  conexo e não vazio,  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $m = \inf\{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in W\}$  e  $M = \sup\{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in W\}$ . Então existe  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \text{int.}(W)$  tal que:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \text{Vol.}(W)$$

## 2 O Teorema de Fubini para Integrais Triplas

Como no caso de funções de duas variáveis, o **Teorema de Fubini** é válido. Se  $W = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  é um paralelepípedo e  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então:

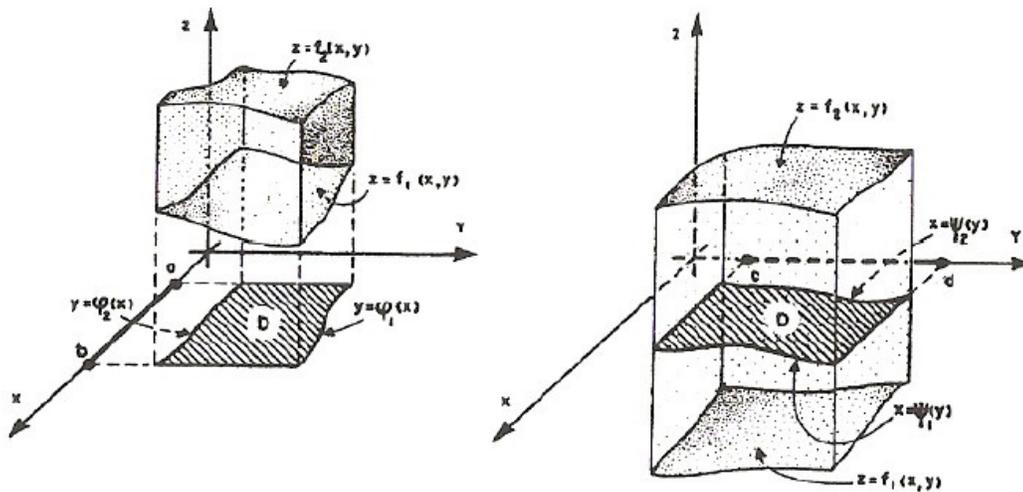
$$\begin{aligned} \iiint_W f(x,y,z) dx dy dz &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) dx dy dz = \int_c^d \int_p^q \int_a^b f(x,y,z) dx dz dy = \\ &= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y,z) dy dx dz = \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x,y,z) dy dz dx = \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_p^q f(x,y,z) dz dx dy = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x,y,z) dz dy dx. \end{aligned}$$

Restringiremos nossa atenção a três tipos especiais de regiões de  $\mathbb{R}^3$ :

- Uma região  $W \subset \mathbb{R}^3$  é de **tipo I** se pode ser descrita por:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid [(x,y) \in D] \& [f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)]\}$$

onde  $D \subset \mathbb{R}^2$  é uma região fechada e limitada, projeção de  $W$  no plano  $Oxy$ , e  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $D$  satisfazendo  $(\forall (x,y) \in D)(f_1(x,y) \leq f_2(x,y))$ .



Região do tipo I

Regiões deste tipo são limitadas por duas superfícies de equações  $z = f_1(x,y)$  e  $z = f_2(x,y)$  e (talvez) por uma porção de cilindro gerada por uma reta se movendo paralelamente ao eixo  $Oz$  ao longo de  $\partial D$ . Neste caso,

$$\iiint_W f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy \quad (1)$$

- Uma região  $W \subset \mathbb{R}^3$  é do **tipo II** se puder ser descrita por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid [(x, z) \in D] \& [g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)]\},$$

onde  $D$  é a região limitada e fechada, projeção de  $W$  no plano  $Oxz$ , e  $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas tais que  $(\forall (x, z) \in D)(g_1(x, z) \leq g_2(x, z))$ . Neste caso,

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{g_1(x, z)}^{g_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz \quad (2)$$

- Uma região  $W \subset \mathbb{R}^3$  é do **tipo III** se puder ser descrita por:

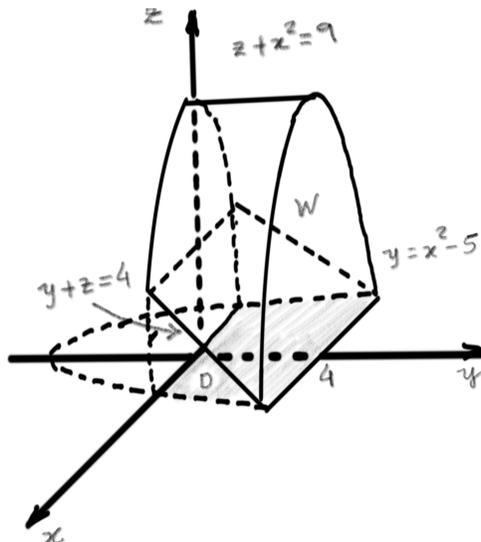
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid [(y, z) \in D] \& [h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)]\},$$

onde  $D$  é a região limitada e fechada, projeção de  $W$  no plano  $Oyz$ , e  $h_1, h_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas tais que  $(\forall (y, z) \in D)(h_1(y, z) \leq h_2(y, z))$ . Neste caso,

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz \quad (3)$$

**Exemplo 10.** Calcular o volume do sólido  $W$  limitado pelas superfícies de equações  $z + x^2 = 9$ ,  $y + z = 4$ ,  $y = 0$  e  $y = 4$ .

**Solução:** Primeiramente esboçamos a região de integração,  $W$ :



O sólido  $W$  é limitado superiormente pela superfície  $z = 9 - x^2$  e inferiormente pelo plano  $z = 4 - y$ , tratando-se, portanto, de uma região de tipo I, com  $f_1(x, y) = 4 - y$  e  $f_2(x, y) = 9 - x^2$ . Podemos escrever:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (4 - y \leq z \leq 9 - x^2) \& ((x, y) \in D)\},$$

onde  $D$  é a projeção de  $W$  no plano  $xy$ , que pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-\sqrt{y+5} \leq x \leq \sqrt{y+5}) \& (0 \leq y \leq 4)\}$$

Calculamos, assim:

$$\begin{aligned} \iiint_W dx dy dz &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} \left( \int_{4-y}^{9-x^2} dz \right) dx dy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} (5 - x^2 + y) dx dy = \\ &= \int_0^4 \left[ 5x - \frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} dy = \int_0^4 \left( 10(y+5)^{1/2} - \frac{2}{3}(y+5)^{3/2} + 2y(y+5)^{1/2} \right) dy = \\ &= \left[ \frac{20}{3}(y+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(y+5)^{5/2} + \frac{4}{5}(y+5)^{5/2} - \frac{20}{3}(y+5)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=4} = \left[ \frac{8}{15}(y+5)^{5/2} \right]_0^4 = \\ &= \frac{8}{15}(243 - 25\sqrt{5}). \end{aligned}$$

### 3 Mudança de Variáveis na Integral Tripla

Como veremos em seguida, a fórmula de mudança de variáveis na integral dupla pode ser estendida às integrais triplas.

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto e

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

uma função onde  $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções com derivadas parciais contínuas no subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ .

O determinante jacobiano da função  $\varphi$  é:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Se  $\varphi$  for injetora num subconjunto fechado e limitado  $Q \subset U$  e  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$  nunca se anular em  $Q$ , então:

$$\iiint_{\varphi[Q]} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (4)$$

**Exemplo 11** (Mudança de Coordenadas Lineares). A transformação:

$$\varphi : \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) \mapsto (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)$$

onde:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$$

é chamada de **mudança linear de coordenadas**. Esta transformação é sempre injetora e tem por determinante jacobiano o número:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A transformação inversa de  $\varphi$  é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}$$

ou seja,

$$\varphi^{-1} : \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Exemplo 12.** Calcular:

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz$$

**Solução:** Neste caso, aplicamos a substituição:

$$u(x, y, z) = (2x - y)/2, v(x, y, z) = y/2, w(x, y, z) = z/3$$

que nos dá  $x(u, v, w) = u + v$ ,  $y(u, v, w) = 2v$  e  $z(u, v, w) = 3w$ , de modo a obter a transformação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\mapsto (u + v, 2v, 3w) \end{aligned}$$

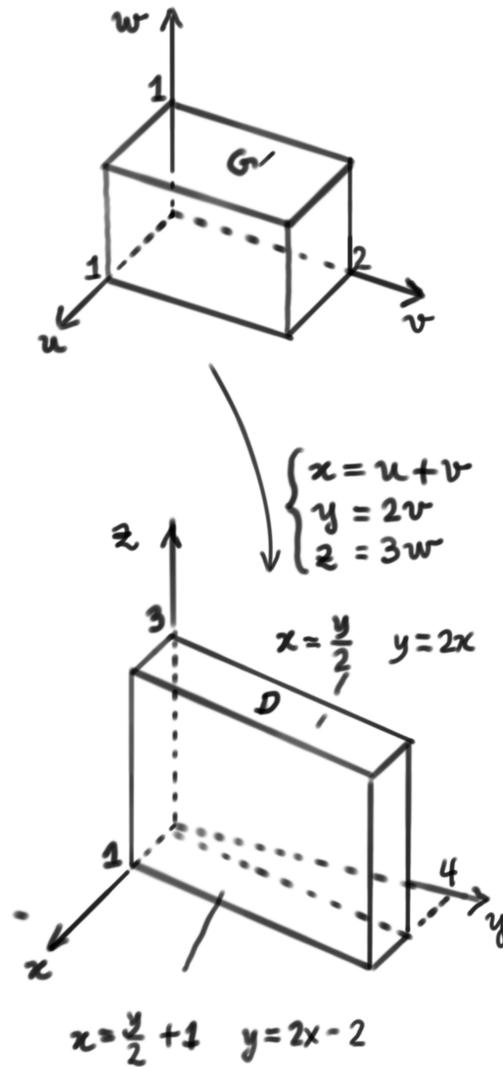
A região de integração original é  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y/2 \leq x \leq y/2 + 1) \& (0 \leq y \leq 4) \& (0 \leq z \leq 3)\}$ . Vejamos que conjunto é  $\varphi^{-1}[D]$ . Para tanto, precisamos somente verificar de onde a fronteira de  $D$  veio, por  $\varphi$ .

A fronteira de  $D$  consiste de certas porções dos seguintes planos:

$$x = y/2, x = (y/2) + 1, y = 0, y = 4, z = 0 \text{ e } z = 3$$

Note que:

- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y/2\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + v = v\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u = 0\}$ ;
- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = (y/2) + 1\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + v = v + 1\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u = 1\}$ ;
- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 2v = 0\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid v = 0\}$ ;
- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 2v = 4\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid v = 2\}$ ;
- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 3w = 0\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w = 0\}$ ;
- $\varphi^{-1}[\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3\}] = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 3w = 3\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w = 1\}$ ;



Concluimos que  $G = \varphi^{-1}[D]$  é o paralelepípedo  $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$  no plano  $Ouvw$  - que é uma ótima região para se integrar, devido ao Teorema de Fubini.

O jacobiano da transformação é:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

Agora temos tudo o que precisávamos para aplicar a fórmula (4):

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw = \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 6 \cdot (u+w) dudvdw = 6 \cdot \int_0^1 \int_0^2 \left[ \frac{u^2}{2} + uw \right]_0^1 dv dw = 6 \cdot \int_0^1 \int_0^2 \left( \frac{1}{2} + w \right) dv dw = \\
&= 6 \cdot \int_0^1 \left[ \frac{v}{2} + vw \right]_0^2 dw = 6 \cdot \int_0^1 (1 + 2w) dw = 6[w + w^2]_0^1 = 12.
\end{aligned}$$

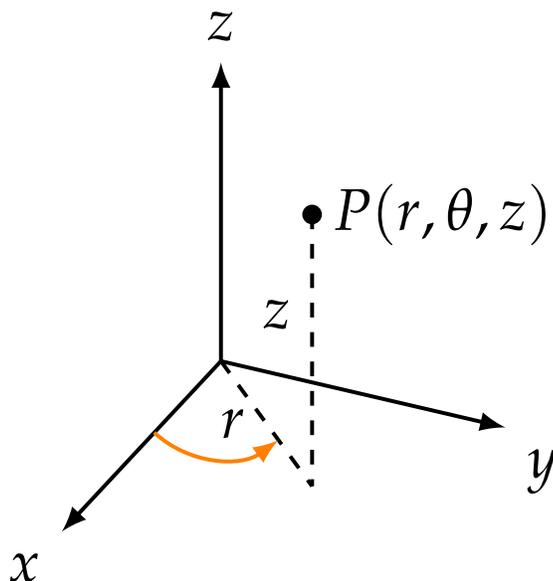
### 3.1 Casos Especiais de Mudança de Variáveis

#### 3.1.1 Coordenadas Cilíndricas

Um ponto  $P$  de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$  tem coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares da projeção de  $P$  no plano  $Oxy$ . As coordenadas retangulares e cilíndricas do ponto  $P$  estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x(r, \theta, z) = r \cos(\theta) \\ y(r, \theta, z) = r \sin(\theta) \\ z(r, \theta, z) = z \end{cases} \quad (5)$$

onde  $r \geq 0$ ,  $\theta$  varia no intervalo  $[0, 2\pi[$  e  $z \in \mathbb{R}$ .



As equações (5) definem uma transformação:

$$\varphi : [0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

que se torna injetora quando restrita a  $]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$ .

Vejam, agora, o efeito de  $\varphi$  em alguns subconjuntos especiais de  $]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$ .

Dado  $a > 0$ , a imagem de  $\{(r, \theta, z) \in ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mid r = a\} = \{(a, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}\}$  por  $\varphi$  é uma superfície cilíndrica de raio  $a$  cujo eixo coincide com o eixo  $z$ . De fato,

$$\varphi[\{(a, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}\}] = \{(a \cos(\theta), a \sin(\theta), z) \mid (\theta \in [0, 2\pi[) \& (z \in \mathbb{R})\}$$

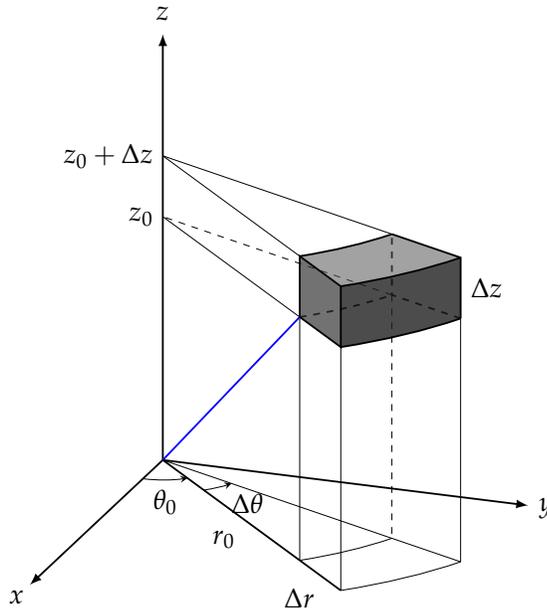
Dado  $\alpha_0 \in [0, 2\pi[$ , a imagem do conjunto  $\{(r, \theta, z) \in ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mid \theta = \alpha_0\} = \{(r, \alpha_0, z) \mid (r > 0) \& (z \in \mathbb{R})\}$  é um semiplano que contém o eixo  $z$ . De fato,

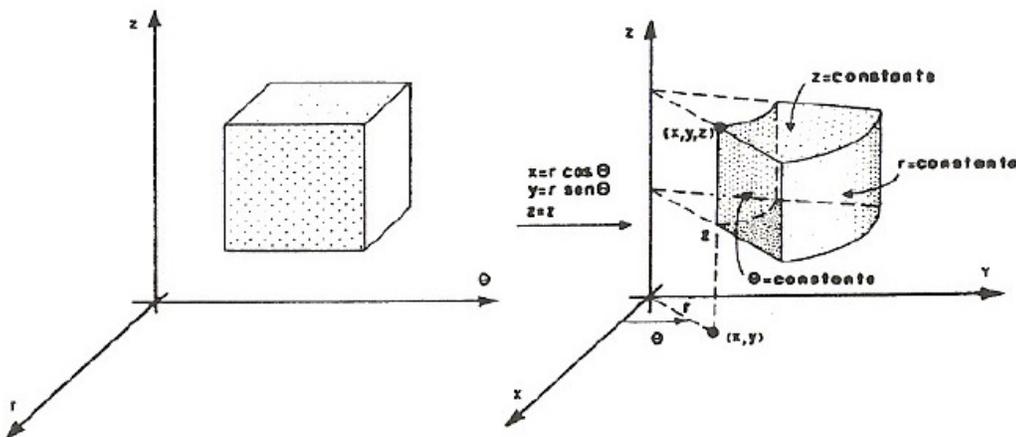
$$\varphi[\{(r, \alpha_0, z) \mid (r > 0) \& (z \in \mathbb{R})\}] = \{(r \cos(\alpha_0), r \sin(\alpha_0), z) \mid (r > 0) \& (z \in \mathbb{R})\}$$

Finalmente, dado  $z_0 \in \mathbb{R}$ , a imagem de  $\{(r, \theta, z) \in ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mid (r > 0) \& (\theta \in [0, 2\pi[)\} = \{(r, \theta, z_0) \mid (r > 0) \& (\theta \in [0, 2\pi[)\}$  é um plano paralelo ao plano  $Oxy$ . De fato,

$$\varphi[\{(r, \theta, z_0) \mid (r > 0) \& (\theta \in [0, 2\pi[)\}] = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z_0) \mid (r > 0) \& (\theta \in [0, 2\pi[)\}.$$

Na figura abaixo ilustra-se como  $\varphi$  deforma o paralelepípedo de arestas paralelas aos eixos coordenados,  $[r_0, r_0 + \Delta r] \times [0, \Delta\theta] \times [z_0, z_0 + \Delta z]$ :





Vejamos, agora, o que seria o “fator de escala local” da transformação para coordenadas cilíndricas,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{A.(g[B(r_0, \theta_0, z_0), r])}{A.(B((r_0, \theta_0, z_0), r))}$$

Calculamos o determinante jacobiano:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$$

Podemos interpretar este jacobiano geometricamente, como segue: quanto mais distante um ponto  $(r_0, \theta_0, z_0)$  estiver do eixo  $z$ , maior será o volume da imagem do retângulo com este vértice.

Neste caso, a fórmula (4) se escreve:

$$\iiint_{\varphi[Q]} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz \quad (6)$$

Tal fórmula é válida se  $Q$  estiver contido em  $]0, \infty[ \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[ \times \mathbb{R}$ .

**Exemplo 13.** Calcular a massa da região acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  dentro da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, a > 0$  com  $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Solução:** Primeiramente fazemos um esboço da região.

A fim de “enxergar” melhor a superfície dada pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ , completamos quadrados:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 - a^2 = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - a^2$$

logo,

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

é uma esfera centrada em  $(0, 0, a)$  e de raio  $a$ .

Esta esfera intercepta o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  nos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2az \end{cases}$$

Combinando estas duas condições ao substituir qualquer uma das variáveis de uma das equações em outra - por exemplo, substituindo  $z$  por  $\sqrt{x^2 + y^2}$  na segunda equação, tem-se no primeiro membro:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2x^2 + 2y^2$$

e no segundo membro:

$$2az = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

de modo que a segunda equação se torna:

$$2(x^2 + y^2) = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a$$

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

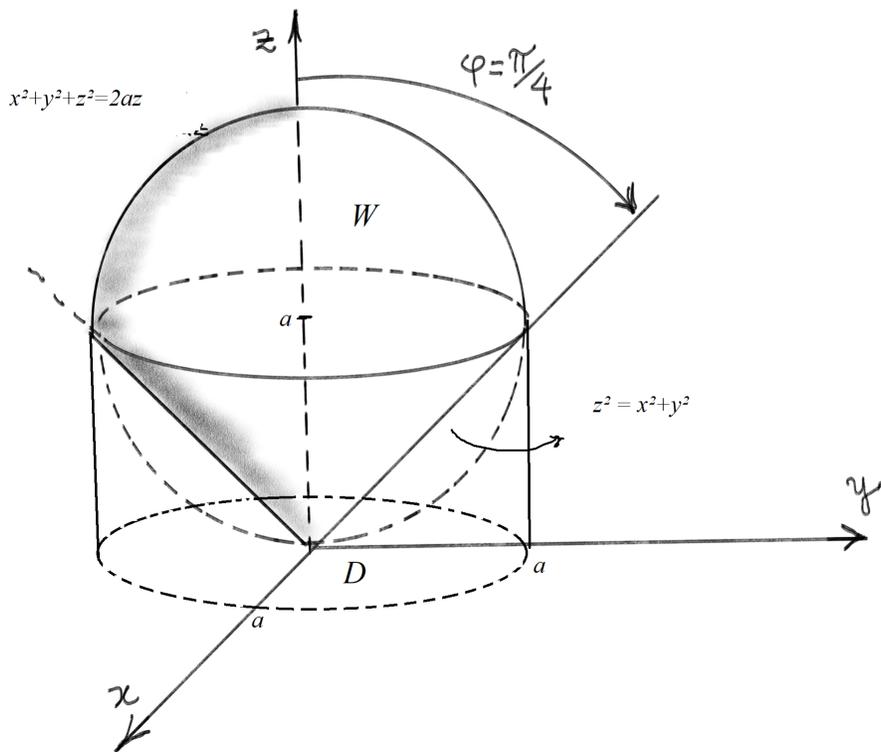
que prontamente reconhecemos como sendo uma circunferência de raio  $a$  centrada em  $(0, 0, a)$  (pois  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$ ).

A região de integração se assemelha, portanto, a um "pião", e tem simetria com respeito ao eixo  $Oz$  - portanto, simetria cilíndrica.

Podemos decompor a região de integração em duas: uma sendo  $R_1$ , o hemisfério superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ , e outra,  $R_2$ , sendo o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

Assim,

$$R_1 = \{(r, \theta, z) \mid (0 \leq r \leq \sqrt{2az}) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi) \& (a \leq z \leq 2a)\}$$



e

$$R_2 = \{(r, \theta, z) \mid (0 \leq r \leq z) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi) \& (0 \leq z \leq a)\}$$

Desta forma temos, pela aditividade da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_R \delta(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz &= \iiint_{R_1} \delta(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz \\ &+ \iiint_{R_2} \delta(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

Temos:

$$\iiint_{R_1} \delta(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r^2 \cdot r dr dz d\theta = \frac{48\pi a^5}{5}$$

e

$$\iiint_{R_2} \delta(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^z r^2 \cdot r dr dz d\theta = \frac{\pi a^5}{10}$$

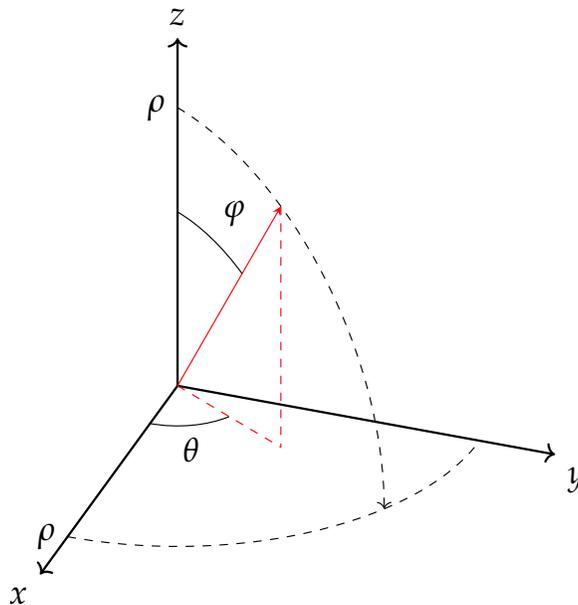
e portanto a massa será  $\frac{97\pi a^5}{10}$ .

### 3.1.2 Mudança de Variáveis Esféricas

Um ponto  $P$  de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$  tem coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$ , onde  $\rho$  é a distância do ponto  $P$  à origem,  $\theta$  é o ângulo formado pelo eixo positivos dos  $xx$  e o segmento de reta que liga  $(0, 0)$  a  $(x, y)$ , e  $\varphi$  é o ângulo formado pelo eixo positivo dos  $zz$  e o segmento de reta que liga  $P$  à origem. As coordenadas retangulares e esféricas do ponto  $P$  estão relacionadas por:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  e  $\theta$  varia num intervalo da forma  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ .



As equações (7) definem uma transformação de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\sigma : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que é injetora quando restrita ao conjunto:

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\rho > 0) \& (\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi) \& (0 \leq \varphi \leq \pi)\}$$

Note que a superfície no espaço  $xyz$  imagem  $\rho = k$ ,  $k$  constante positiva,

$$K_{\rho=k} = \{(k, \theta, \varphi) \mid (\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[) \& (\varphi \in [0, \pi])\}$$

é uma esfera centrada na origem,

$$g[K_{\rho=k}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = k^2\}.$$

A superfície imagem de  $\theta = \theta_0$ ,  $\theta_0$  constante,

$$T_{\theta=\theta_0} = \{(\rho, \theta_0, \varphi) \mid (\rho > 0) \& (\varphi \in [0, \pi])\}$$

é um semiplano que contém o eixo  $Oz$ ,

$$\sigma[T_{\theta=\theta_0}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y = x \tan(\theta_0))\}$$

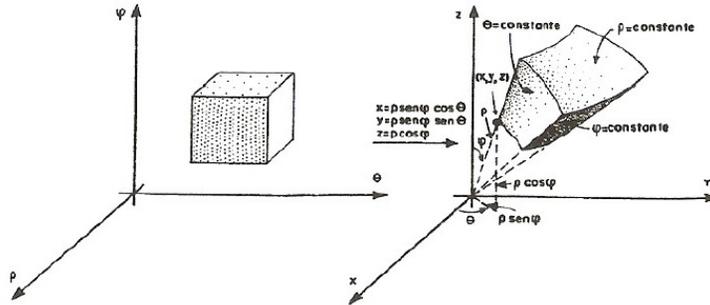
Finalmente, a superfície imagem de  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\varphi_0$  constante:

$$F_{\varphi=\varphi_0} = \{(\rho, \theta, \varphi_0) \mid (\rho > 0) \& (\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[)\}$$

é um cone circular cujo eixo coincide com o eixo  $Oz$

$$\sigma[F_{\varphi=\varphi_0}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (z = \cot(\varphi_0) \cdot \sqrt{x^2 + y^2})\}$$

Desta forma, a imagem de uma caixa retangular  $[\rho_1, \rho_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ , onde  $0 < \rho_1 < \rho_2$ ,  $\theta_0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_0 + 2\pi$  e  $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \pi$  é dado na figura a seguir:



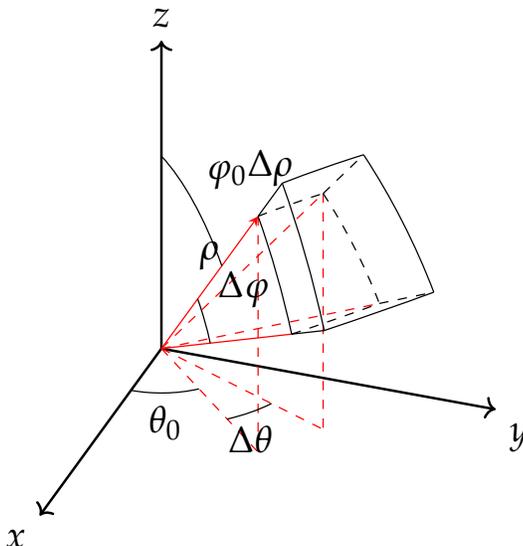
O determinante jacobiano desta transformação é:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & \rho \sin \varphi \end{bmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi$$

Como para todo  $\varphi \in [0, \pi]$  tem-se  $\sin \varphi \geq 0$ , então  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$ . Assim, a fórmula (4) se escreve:

$$\iiint_{\mathcal{S}[Q]} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \quad (8)$$

Vejamons onde o sistema de coordenadas esféricas aplica o paralelepípedo  $[\rho_0, \rho_0 + \Delta\rho] \times [\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta] \times [\varphi_0, \varphi_0 + \Delta\varphi]$ :



Esta fórmula é válida se  $Q$  estiver contido num conjunto da forma:

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \mid (\rho \geq 0) \& (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi) \& (0 \leq \varphi \leq \pi)\}$$

**Exemplo 14.** Calcular  $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  onde  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

**Solução:** Fazendo uma mudança esférica de coordenadas:

$$\begin{aligned} \sigma : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, \varphi) &\mapsto (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \end{aligned}$$

obtemos para  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  a função  $f(\sigma(\rho, \theta, \varphi)) = f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2$  e:

$$\sigma^{-1}[B] = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid (0 \leq \rho \leq 1) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi) \& (0 \leq \varphi \leq \pi)\} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

e portanto:

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{\sigma^{-1}[B]} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^4 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^\pi [\theta]_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{5} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{5}$$

**Exemplo 15.** Calcular:

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

onde  $E$  é a região interior ao cone  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  e à esfera  $\rho = 2$ .

**Solução:** Fazendo uma mudança esférica de coordenadas:

$$\sigma : ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

obtemos para  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  a função  $f(\sigma(\rho, \theta, \varphi)) = f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) = \rho$  e:

$$\sigma^{-1}[E] = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid (0 \leq \rho \leq 2) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi) \& (0 \leq \varphi \leq \pi/6)\} = [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/6]$$

Assim,

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho = \int_0^2 \int_0^{\pi/6} [\theta]_0^{2\pi} \rho^3 \sin \varphi d\varphi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \int_0^{\pi/6} \rho^3 \sin \varphi d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^2 [\cos(\varphi)]_0^{\pi/6} d\rho = 2\pi \cdot \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_0^2 d\rho = 4\pi(2 - \sqrt{3})$$

## Referências

[1] Pinto, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.

[2] Craizer, Marcos; TAVARES Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.

- [3] Finney, Ross L.; WEIR Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: George B. Thomas Jr.**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. 570 p. v. 2. ISBN 978-85-88639362.
- [4] Spivak, Michael. **Cálculo en Variedades**. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1988. 134 p. ISBN 978-84-291-5142-8.