

# MAT2455 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

## AGENDA 4

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

### 1 Campos Vetoriais

Quando estudamos fenômenos físicos que são representados por vetores, trocamos integrais sobre intervalos por integrais sobre caminhos através de campos de vetores. Usamos tais integrais para encontrar o trabalho realizado por uma força variável ao mover um objeto ao longo de um caminho (um veículo enviado ao espaço sob a ação do campo gravitacional da Terra, por exemplo [ver FIG 16.9]) ou para encontrar o trabalho realizado por um campo vetorial ao mover um objeto ao longo de um caminho (o trabalho realizado por um acelerador para elevar a energia de uma partícula, por exemplo). Também as usamos para encontrar as taxas nas quais líquidos escoam ao longo e através de curvas.

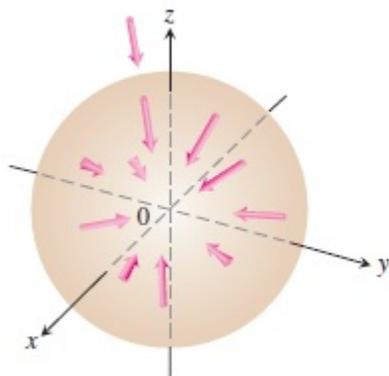


FIG 16.9

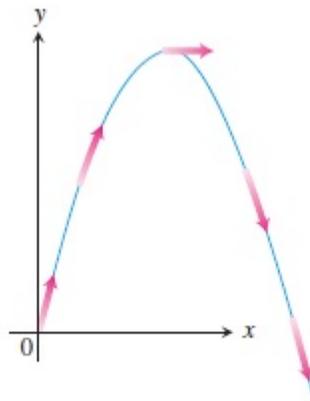


FIG 16.10

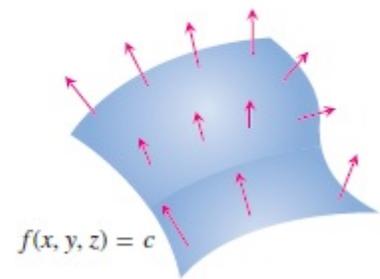


FIG 16.11

---

\*jeancb@ime.usp.br

**Definição 1.** Um *campo vetorial* em uma região do plano,  $D \subset \mathbb{R}^2$  é uma função que associa a cada ponto do domínio um vetor, ou seja, uma função:

$$\begin{aligned} \vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \vec{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y)) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j} \end{aligned}$$

O campo  $\vec{F}$  é **contínuo** se as funções componentes  $M, N : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. O campo é **diferenciável** se  $M, N : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis, e assim por diante.

**Exemplo 2.** Consideremos no plano uma carga de magnitude  $Q$  (coulombs) posicionada na origem do sistema cartesiano. O campo elétrico gerado por esta carga no plano pode ser visto como um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left( \frac{kQx}{(x^2 + y^2)}, \frac{kQy}{(x^2 + y^2)} \right), \end{aligned}$$

onde  $k = 8.99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$  é a constante de Coulomb. Verifica-se, facilmente, que este é um campo vetorial de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R}^2)$ , uma vez que:

$$\begin{aligned} M: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{kQx}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} N: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{kQy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

são funções de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ .

Analogamente,

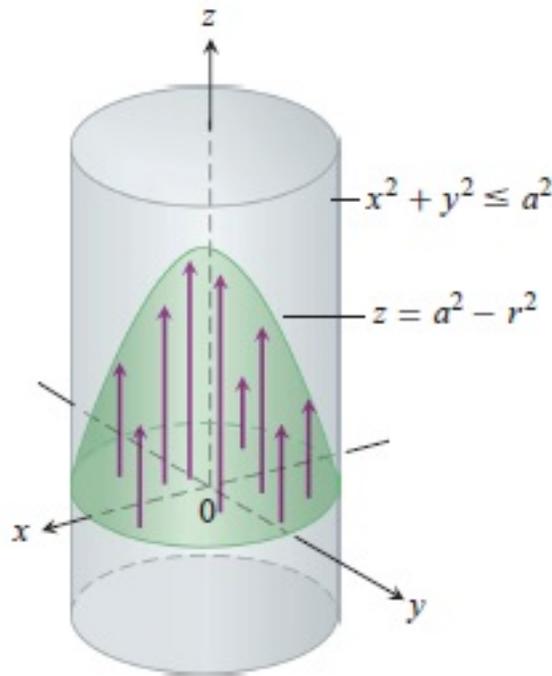
**Definição 3.** Um *campo vetorial* em uma região do espaço,  $D \subset \mathbb{R}^3$  é uma função que associa a cada ponto do domínio um vetor, ou seja, uma função:

$$\begin{aligned} \vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k} \end{aligned}$$

O campo  $\vec{F}$  é **contínuo** se as funções componentes  $M, N, P : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. O campo é **diferenciável** se  $M, N, P : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis, e assim por diante.

**Exemplo 4.** Se anexarmos o vetor velocidade de um projétil a cada ponto de sua trajetória no plano de movimento, teremos um campo bidimensional ao longo da trajetória (veja FIG 16.10). Se anexarmos o vetor gradiente de uma função escalar a cada ponto de uma superfície de nível da função, teremos um campo tridimensional sobre a superfície (veja FIG 16.11). Se anexarmos o vetor velocidade a cada ponto de um fluido que escoar, teremos um campo tridimensional definido em uma região do espaço.

**Exemplo 5.** Considere um fluido escoando permanentemente de forma laminar por um tubo cilíndrico,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a\}$ . Deduz-se, pela Lei de Poiseuille, que o campo de velocidades deste fenômeno tem o aspecto:



**FIG 16.12**

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ .

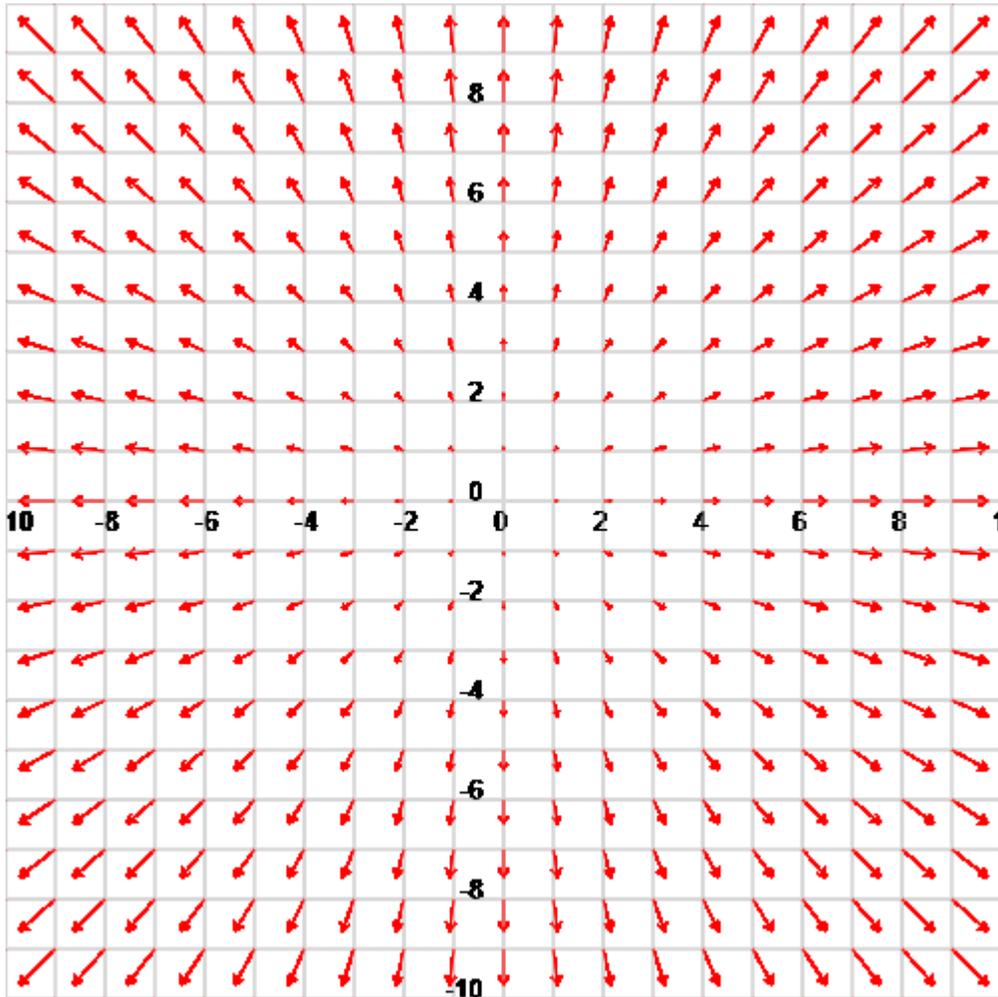
$$\vec{\Phi} : \begin{matrix} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ \mapsto (x, y, a^2 - x^2 - y^2) \end{matrix}$$

**Atenção:** Para esboçarmos os campos que contêm fórmulas, escolhemos uma seleção representativa dos pontos do domínio e esboçamos os vetores anexados a eles. As flechas que representam os vetores são desenhadas com suas caudas - e não suas pontas - nos pontos onde a função vetorial é calculada. Isto é diferente da maneira pela qual desenhamos vetores posição de planetas e projéteis, com a cauda na origem e a ponta no lugar onde estão localizados.

**Exemplo 6.** Vamos esboçar o campo vetorial dado por:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

**Solução:** Primeiramente tomamos uma “malha”, consistindo dos pontos  $(m, n)$  com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Calculamos, em seguida,  $\vec{F}(m, n)$  nestes pontos. Assim, por exemplo,  $\vec{F}(0, 0) = (0, 0)$ ,  $\vec{F}(2, 2) = (2, 2)$ ,  $\vec{F}(-2, 1) = (-2, 1)$  e assim por diante. Ao colocarmos em um gráfico - sempre observando a regra de anexar a cauda de  $\vec{F}(m, n)$  ao ponto  $(m, n)$ , obtemos:



**Exemplo 7 (campo radial).** Seja esboçar o campo dado por:

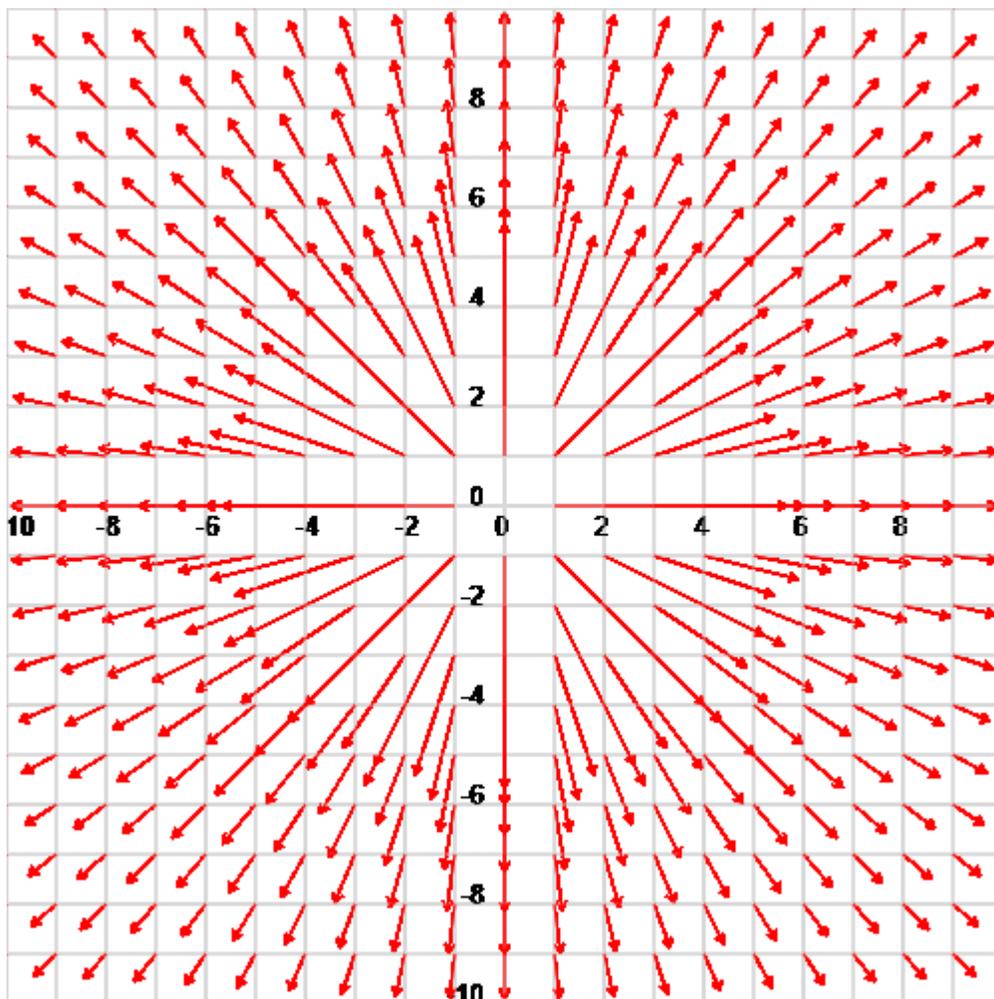
$$\begin{aligned} \vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left( \frac{10x}{x^2 + y^2}, \frac{10y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

**Solução:** Procedemos de forma análoga, computando os valores do campo em pontos da forma  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Fazemos as contas para diversos pontos:

$$\vec{F}(1,1) = (5,5), \vec{F}(-1,1) = (-5,5), \vec{F}(1,-1) = (5,-5), \vec{F}(-1,-1) = (-5,-5)$$

$$\vec{F}(2,1) = (4,2), \vec{F}(2,-1) = (4,-2), \vec{F}(-2,1) = (-4,2), \vec{F}(-2,-1) = (-4,-2)$$

$$\vec{F}(2,2) = (2.5,2.5), \vec{F}(-2,2) = (-2.5,2.5), \vec{F}(-2,-2) = (-2.5,-2.5), \vec{F}(2,-2) = (2.5,-2.5)$$

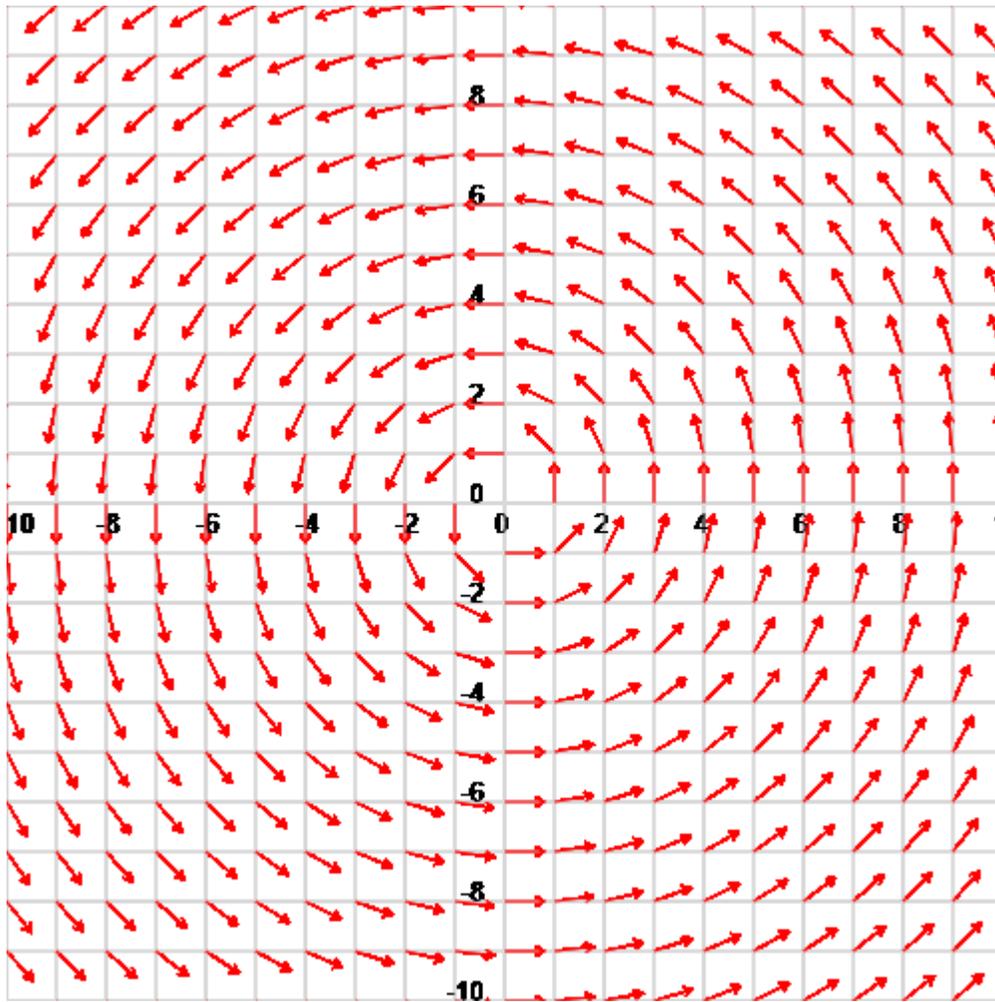


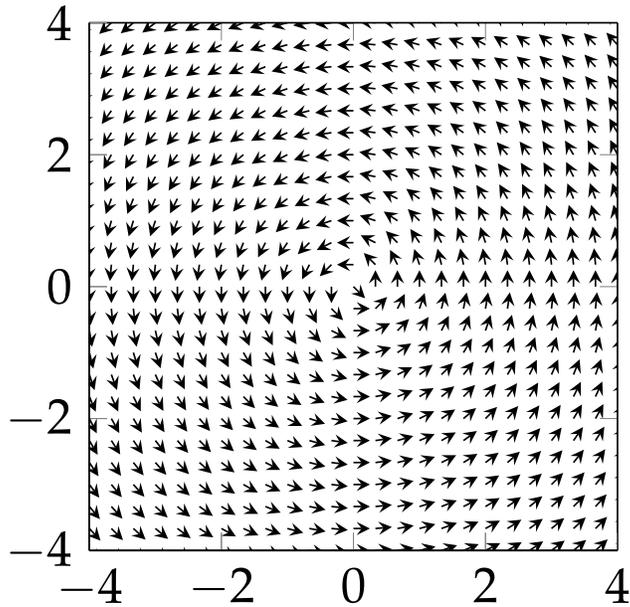
**Exemplo 8 (campo de rotação).** Seja esboçar o campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Calculamos alguns valores do campo em pares de inteiros. Por exemplo,

$$\vec{F}(1,0) = (0,1), \vec{F}(0,1) = (1,0), \vec{F}(-1,0) = (0,-1)$$





**Exemplo 9 (campo gradiente).** O *campo gradiente* de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é o campo de vetores gradientes:

$$\begin{aligned} \nabla f : U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \end{aligned}$$

## 2 Curvas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

Embora existam diversas formulações do conceito de curva em Matemática, vamos nos ater à seguinte definição quando tratarmos de curvas.

Temos a seguinte:

**Definição 10 (Curva em  $\mathbb{R}^2$ ).** Uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$  é um par  $(C, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2)$ , onde  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  é o conjunto imagem de uma função contínua:

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

que, a cada número  $t \in I$  associa um ponto do plano,  $(x_1(t), x_2(t))$ . Ao conjunto:

$$C = \gamma[I] \doteq \{(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

denominamos o **traço da curva**  $\gamma$ . O traço da curva é, intuitivamente, a “curva geométrica”, a “curva desenhada”.

Analogamente, temos a seguinte:

**Definição 11 (Curva em  $\mathbb{R}^3$ ).** Uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^3$  é um par  $(C, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3)$ , onde  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  é o conjunto imagem de uma função contínua:

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

que, a cada número  $t \in I$  associa um ponto do espaço,  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Ao conjunto:

$$C = \gamma[I] \doteq \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I\}$$

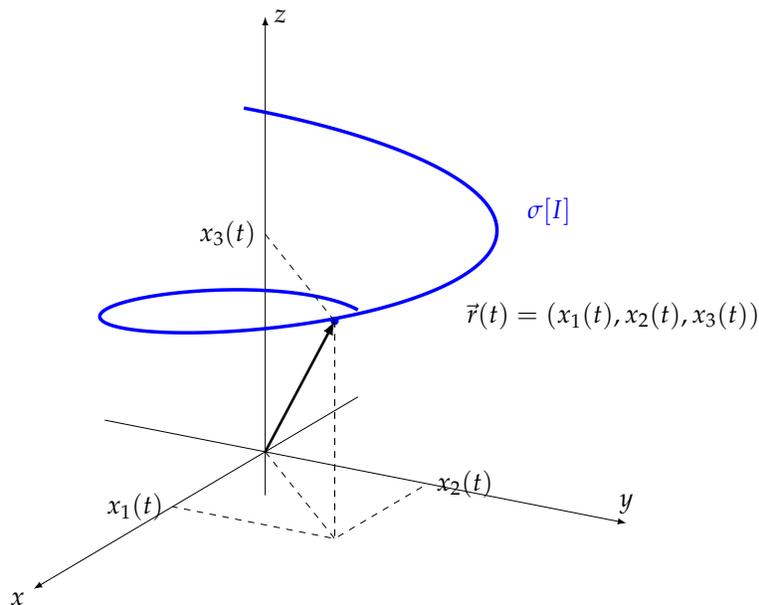
denominamos o **traço da curva**  $\gamma$ . O traço da curva é, intuitivamente, a “curva geométrica”, a “curva desenhada”.

As definições de função vetorial definida em um intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , com valores em  $\mathbb{R}^3$  é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $x_1, x_2, x_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais.

Para cada  $t \in I$ , temos um vetor  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ , dado pelo vetor  $\vec{OP}$ , onde  $O = (0, 0, 0)$  e  $P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ :



**Definição 12.** Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

uma função contínua em  $I$ . Dizemos que:

$$\sigma[I] = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

é uma **curva** – que geralmente denotamos por  $C$ . Dizemos, neste caso, que  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma **parametrização de  $\sigma[I]$** , e que  $(\sigma[I], \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3)$  é uma **curva parametrizada**. As equações:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2)$$

são chamadas as **equações paramétricas da curva  $C$** , e a variável  $t$  é o **parâmetro**.

Se eliminarmos  $t$  no sistema (8), obteremos uma expressão cartesiana da curva  $C$ .

**Exemplo 13.** Considere as seguintes curvas parametrizadas definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$  pelas equações paramétricas:

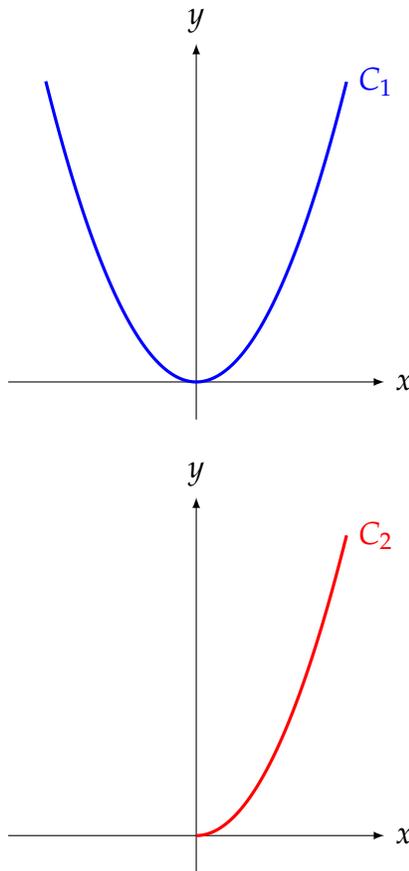
2

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$$

Em ambos os casos observamos que é possível reduzir as duas equações paramétricas à equação cartesiana  $y = t^2$  (bastando substituir na expressão que nos dá  $y$ ,  $t$  por  $x$ ). No entanto, temos curvas bem diferentes, conforme podemos notar abaixo:

2



A diferença está no fato de que, na equação paramétrica que nos dá a coordenada  $x$  de  $C_2$ , aparece  $t^2$ , que é maior ou igual a zero para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 14.** Seja  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e é paralela ao vetor  $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$  com  $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$  e  $v_3 \neq 0$ . Qualquer ponto  $P \in \ell$  desta reta é:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t \cdot \vec{V} \text{ para algum } t \in \mathbb{R}$$

Assim, uma parametrização de  $\ell$  é:

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

e  $\ell$  se expressa em equações paramétricas como:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \cdot v_1 \\ y(t) = y_0 + t \cdot v_2, & t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro  $t$  das equações paramétricas de  $\ell$  ("isolando  $t$ "), obtemos:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = t = \frac{y - y_0}{v_2} = t = \frac{z - z_0}{v_3}$$

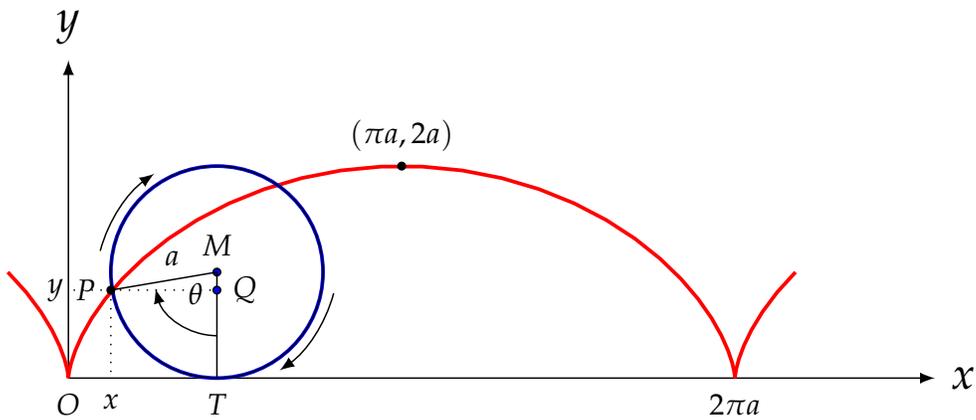
**Exemplo 15.** Seja  $C$  a curva do plano  $Oxy$ , gráfico de uma função contínua  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma parametrização (bem natural) de  $C$  pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação  $2x - y = 1$  ( $\therefore y = 2x - 1$ ), por exemplo, admite como parametrização:

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, 2t - 1) \end{aligned}$$

**Exemplo 16 (ciclóide).** A curva plana descrita por um ponto  $P$  sobre a circunferência quando esta gira ao longo de uma reta é chamada **ciclóide**. Suponhamos que a circunferência tenha raio  $a > 0$  e que o eixo  $Ox$  seja a reta fixa sobre a qual gira a circunferência. Consideremos o ponto  $P$  na origem quando o centro da circunferência está em  $(0, a)$ . A figura abaixo mostra a circunferência depois de o ponto  $P$  ter girado um ângulo de  $\theta$  radianos.



<https://www.geogebra.org/m/E43dxBju>

Na figura acima, tem-se:

$$\begin{cases} OT = \text{comprimento do arco } PT = a \cdot \theta \\ PQ = a \cdot \sin(\theta) \\ MQ = a \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

Portanto, as equações paramétricas de  $C$  são:

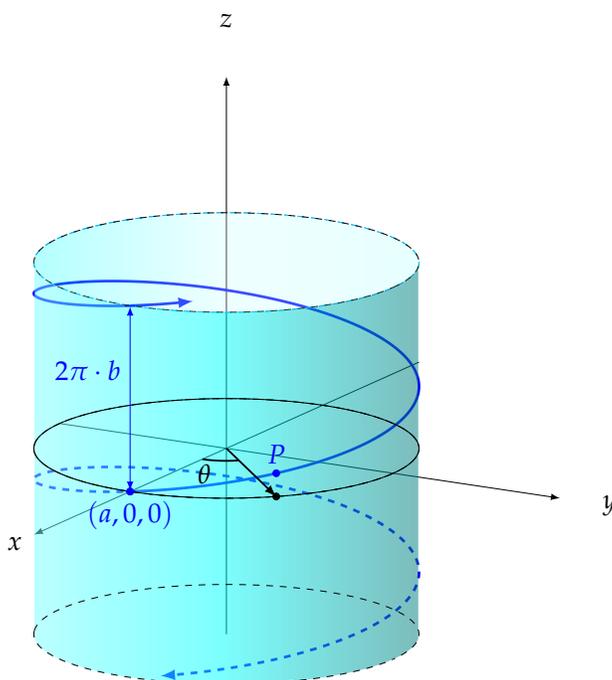
$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot (\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = a \cdot (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

para  $\theta \in \mathbb{R}$ .

A cicloide tem inúmeras aplicações, como na resolução do problema de se projetar um pêndulo cujo período independa da amplitude da oscilação (também conhecido como o problema da curva *tautócrona*).

Agora apresentaremos o exemplo de uma curva no espaço tridimensional.

**Exemplo 17.** Um ponto  $P = (x, y, z)$  se move em torno do eixo  $z$  mantendo uma distância constante  $a > 0$  deste eixo. Simultaneamente, ele se move paralelamente ao eixo  $z$  de modo que sua terceira componente é proporcional ao ângulo de rotação com constante de proporcionalidade  $b \neq 0$ . A curva descrita por este ponto é chamada **hélice circular**. Consideremos, no início do movimento, o ponto  $P$  em  $(a, 0, 0)$ . A figura a seguir mostra o ponto  $P$  após uma rotação de  $\theta$  radianos.



<https://www.geogebra.org/3d/thd7jsxd>

Se  $\theta$  é o ângulo de rotação, temos:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = a \cdot \sin(\theta) \\ z = b \cdot \theta \end{cases}$$

Quando  $\theta$  varia de 0 a  $2\pi$ , as coordenadas de  $x$  e  $y$  voltam ao valor inicial e  $z$  varia de 0 a  $2\pi \cdot b$ .  
Uma parametrização da hélice é:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\mapsto (a \cdot \cos(\theta), a \cdot \sin(\theta), b \cdot \theta) \end{aligned}$$

**Exemplo 18.** A curva:

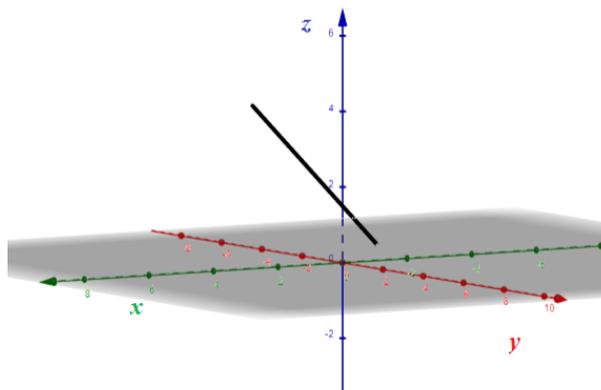
$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) \end{aligned}$$

tem como traço a reta que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e que tem a mesma direção do vetor  $(a, b, c)$ .

**Exemplo 19.** A curva:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (4t - 1, 3t, t + 2) \end{aligned}$$

tem como traço a reta que passa pelo ponto  $(-1, 0, 2)$  e que tem a mesma direção do vetor  $(4, 3, 1)$ :



Insira o código  $(4t - 1, 3t, t + 2)$  na primeira linha à esquerda de [https://www.geogebra.org/3d?](https://www.geogebra.org/3d?lang=pt) para interagir o gráfico e observar a curva sob diversos ângulos.

**Observação 20.** *Recorde, do curso de Cálculo Diferencial e Integral II, MAT 2454, que uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  é contínua, de classe  $C^k$  para  $k \in \mathbb{N}$  ou de classe  $C^\infty$  se cada uma de suas funções coordenadas,  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ ,  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$  e  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto z(t)$  forem, respectivamente, contínuas, de classe  $C^k$  para  $k \in \mathbb{N}$  ou de classe  $C^\infty$ . Deste modo, para verificar se uma curva é de qualquer uma destas classes, basta verificarmos se todas as suas funções coordenadas são das respectivas classes. O mesmo é válido para curvas no plano.*

Nem sempre dispomos de um software para esboçar curvas, de modo que apresentamos, a seguir, algumas técnicas para fazê-lo.

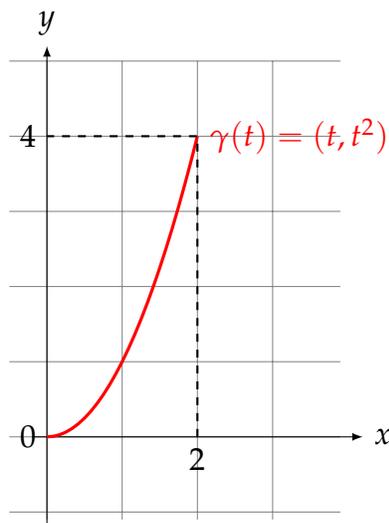
Suponha que desejemos esboçar o traço da curva:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, t^2) \end{aligned}$$

Neste específico exemplo, o traço da curva é o conjunto:

$$\{(t, t^2) \mid t \in [0, 2]\}$$

ou seja, pontos do plano cuja abscissa está entre 0 e 2 e cuja ordenada se exprime como função da abscissa (ou seja, dado  $(x, y) = (t, t^2) \in \text{tr}(\gamma)$ , tem-se  $x = t, y = t^2 = x^2$ ). O traço desta curva coincide, então, com o gráfico da função  $y = x^2$  para  $x \in [0, 2]$ :



**Exemplo 21.** *Esboçar o traço da curva:*

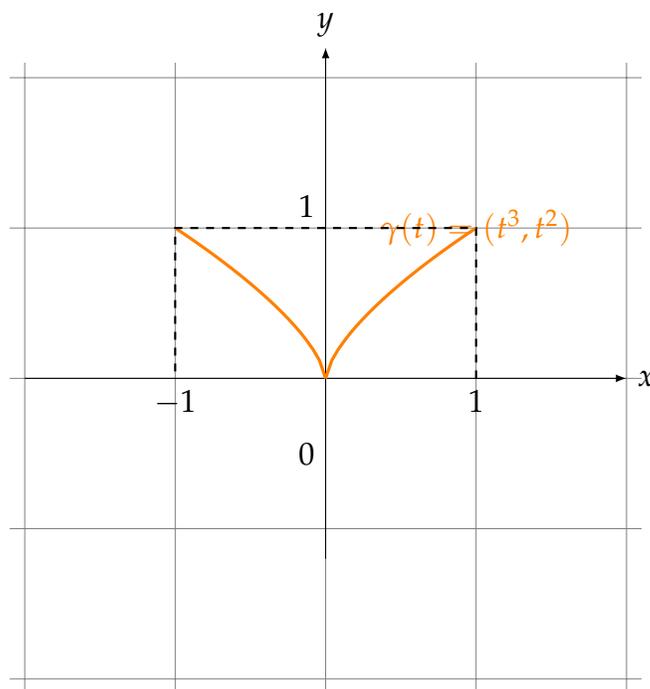
$$\begin{aligned} \gamma : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

**Solução:** Neste específico exemplo, o traço da curva é o conjunto:

$$\{(t^3, t^2) \mid t \in [0, 2]\}$$

ou seja, pontos do plano cuja abscissa está entre  $-1$  e  $1$  e cuja ordenada é  $t^2$  e cuja abscissa é  $t^3$ . Assim, dado  $(x, y) = (t^3, t^2) \in \text{tr}(\gamma)$ , tem-se  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ . Assim,  $t = \sqrt[3]{x}$ , de modo que  $(x, y)$  pertence ao traço da curva se, e somente se  $y = t^3 = (\sqrt[3]{x})^2$ . O traço desta curva coincide, então, com o gráfico da função  $y = x^{\frac{2}{3}}$  para  $x \in [-1, 1]$ :

4



**Exemplo 22.** Algumas fórmulas podem ter traços contra-intuitivos. A curva:

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), 1) \end{aligned}$$

tem como traço os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x(t) = \cos(t)$  para  $t \in \mathbb{R}$  e  $y = 1$ . Conforme  $t \in \mathbb{R}$ , temos  $-1 \leq x = \cos(t) \leq 1$ , de modo que o traço coincide com o conjunto de pontos da forma  $(x, 1)$  com  $-1 \leq x \leq 1$ .

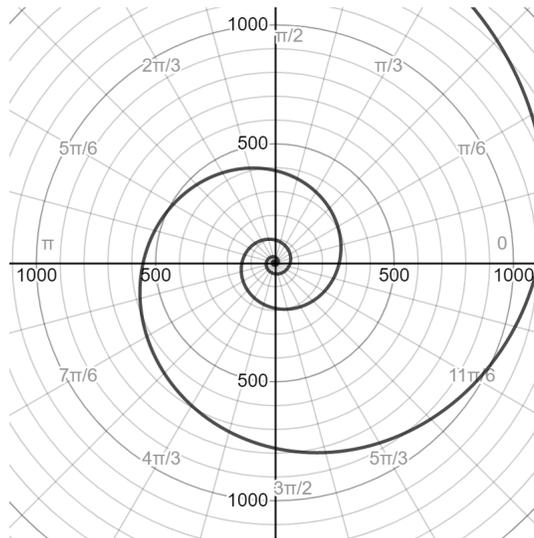
**Exemplo 23.** A espiral logarítmica é a curva dada pelas equações em coordenadas polares:

$$\begin{cases} r = r(t) = e^{bt} \\ \theta = \theta(t) = at \end{cases}$$

com  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0 \neq b$ .

Deduzimos que o  $r$  (distância do ponto da curva à origem) aumenta exponencialmente em termos lineares do ângulo.

No caso em que  $r(t) = e^{\frac{5t}{4}}$ ,  $\theta(t) = t$ , para  $t \in [0, 12\pi]$  temos:



**Exemplo 24.** Este exemplo mostra que curvas diferentes podem ter o mesmo traço. Sejam:

(a)

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \gamma_3 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2t), \sin(2t)) \end{aligned}$$

Observe que as três curvas têm por traço a circunferência de raio 1 centrada na origem. No entanto,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  têm comprimento  $2\pi$  e  $\gamma_3$  tem comprimento  $4\pi$ . O ponto inicial de  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  é  $(1, 0)$ , enquanto que o ponto inicial de  $\gamma_2$  é  $(0, 1)$ . Ademais,  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  são percorridas no sentido anti-horário e  $\gamma_2$  no sentido horário.

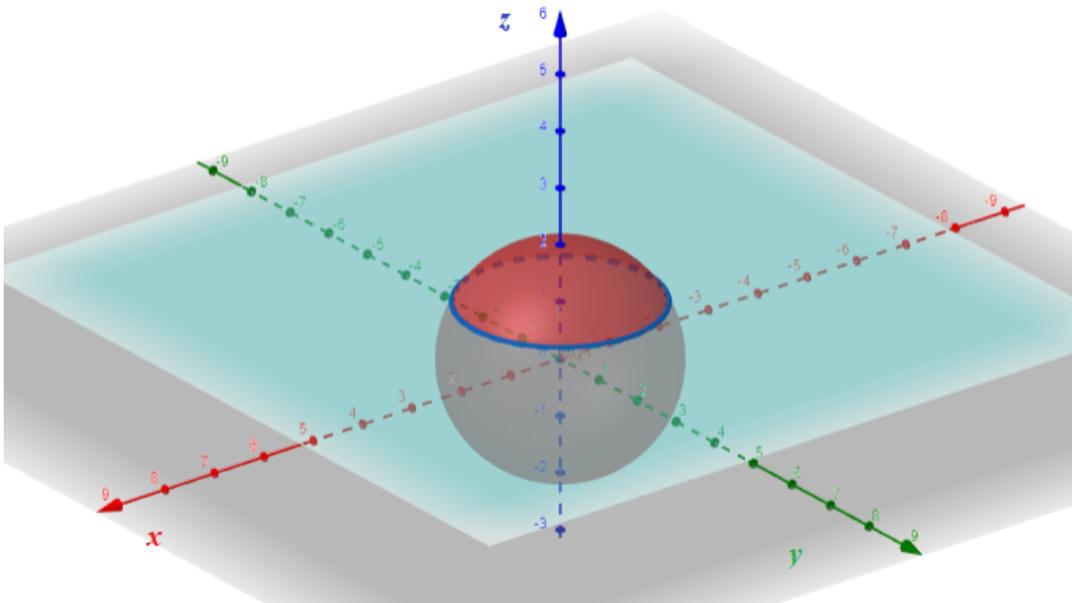
**Exemplo 25.** A curva:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

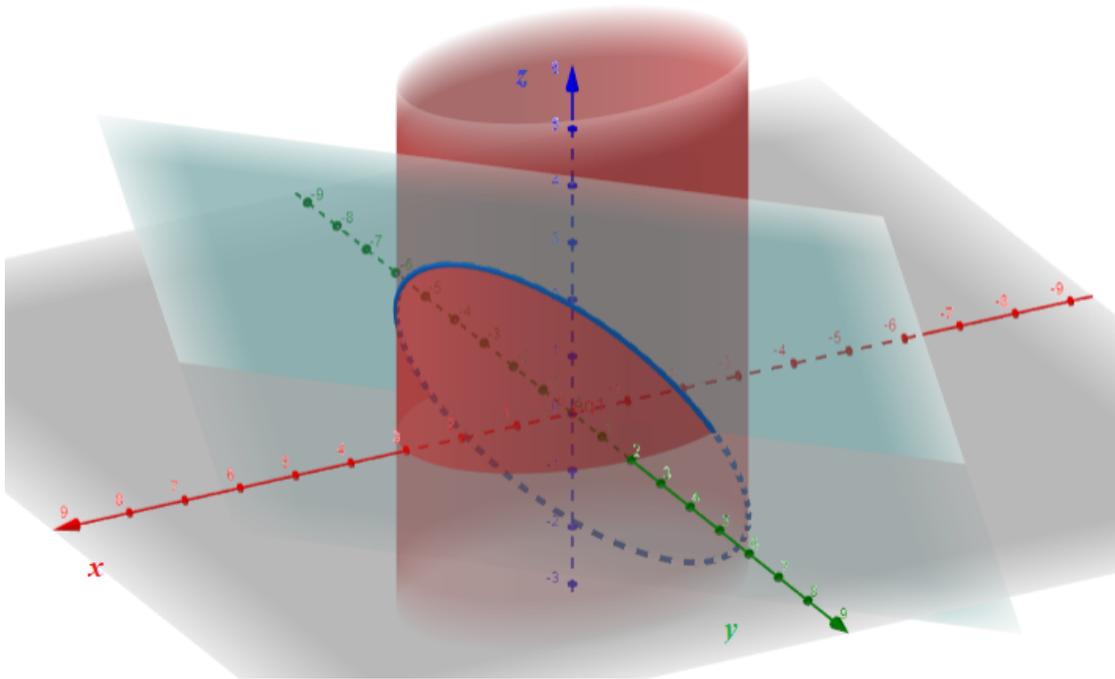
tem por traço a interseção da esfera de raio 2 centrada na origem (representada pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ) com o plano  $z = 1$ . Ela pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\sqrt{3} \cos(t), \sqrt{3} \sin(t), 1) \end{aligned}$$

Com efeito, fazendo  $z = 1$  na primeira equação, obtemos  $x^2 + y^2 + 1^2 = 4$ , donde  $x^2 + y^2 = 3$ . Logo, os pontos do traço são da forma  $(x, y, z)$  com  $x^2 + y^2 = 3$  e  $z = 1$ . Trata-se de uma circunferência centrada em  $(0, 0, 1)$ , de raio  $\sqrt{3}$  contida no plano  $z = 1$ .



**Exemplo 26.** A interseção do cilindro dado por  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  com o plano  $z = x + y$  pode ser visualizada a seguir:



Esta curva pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (3 \cos(t), 2 \sin(t), 3 \cos(t) + 2 \sin(t)) \end{aligned}$$

Fizemos isto como segue:

- primeiramente parametrizamos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

“como se fosse uma curva plana”, por exemplo:

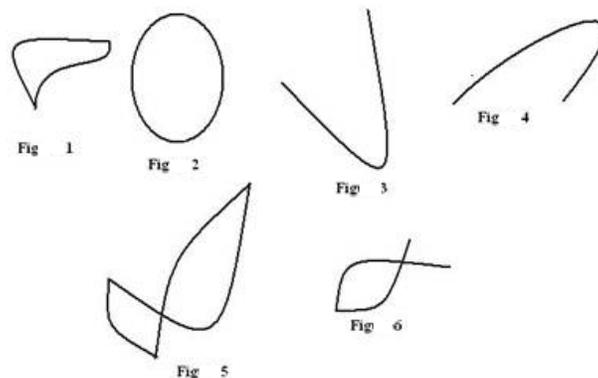
$$\begin{aligned} \delta : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (3 \cos(t), 2 \sin(t)) \end{aligned}$$

- como os pontos do traço da curva são  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $z = x + y$ , basta substituímos  $x = 3 \cos(t)$  e  $y = 2 \sin(t)$  na expressão, ou seja,  $z(t) = 3 \cos(t) + 2 \sin(t)$ . Assim obtemos uma parametrização para a curva.

**Definição 27.** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é **fechada** se seus pontos inicial e final coincidem, isto é, se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ( i.e., começam e terminam no mesmo lugar).

**Definição 28.** Um ponto  $P$  pertencente ao traço de uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamado de **ponto múltiplo** de  $\gamma$  se existirem  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $t_1 \neq t_2$  com  $\{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$  e  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ . Em outras palavras, um ponto  $P \in \text{tr}(\gamma)$  é múltiplo quando é imagem de dois pontos distintos de  $]a, b[$ .

**Definição 29.** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é **simples** se  $\gamma | : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  for injetora, ou seja, se para quaisquer  $t_1, t_2 \in ]a, b[$  com  $t_1 \neq t_2$  tem-se  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ . Isto equivale a dizer que  $\gamma$  é simples se, e somente se  $\gamma$  não tem pontos múltiplos.



- Acima, as curvas das figuras 1, 2 e 5 são fechadas, enquanto que as das figuras 3, 4 e 6 são abertas.
- As curvas das figuras 1, 2, 3 e 4 são todas simples.
- As curvas das figuras 5 e 6 não são simples, pois possuem pontos múltiplos (que são os pontos onde a curva corta a si própria).

Um teorema famoso pela sua sutileza e dificuldade de demonstração <sup>1</sup> é o **Teorema da Curva de Jordan**, conjecturado por Marie-Camille Jordan em 1887 e provado somente em 1905. Este teorema afirma que toda curva fechada simples divide o plano em duas regiões abertas disjuntas, uma limitada e outra ilimitada.

<sup>1</sup>A demonstração deste resultado envolve conceitos avançados de um ramo da Matemática denominado Topologia Algébrica, e usa ferramentas como homologia.

**Teorema 30 (Teorema da Curva de Jordan).** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva simples e fechada em  $\mathbb{R}^2$ . Então  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{tr}(\gamma) = D_1 \cup D_2$  onde  $D_1$  é um subconjunto aberto, conexo e limitado de  $\mathbb{R}^2$  e  $D_2$  é um subconjunto aberto, conexo e ilimitado de  $\mathbb{R}^2$ , com  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , e  $\text{tr}(\gamma)$  é a fronteira comum de  $D_1$  e de  $D_2$ .*

### 3 Integral de Linha de Função Escalar

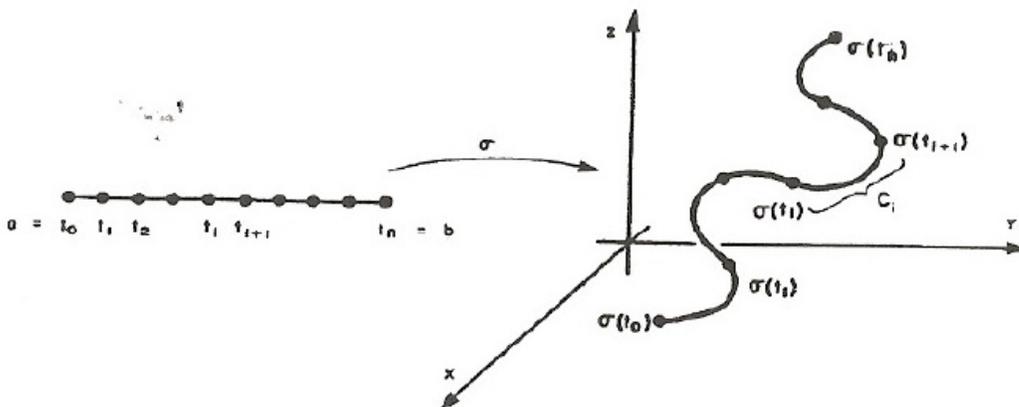
A integral  $\int_a^b f(x)dx$  de uma função real de uma variável real pode ser generalizada de vários modos. Uma generalização que possui diversas aplicações importantes, inclusive na Física, é a integral de linha, a qual descreveremos nestas notas.

Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real e  $C$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , definida pela função:

$$\begin{aligned} \sigma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Para motivar a definição de integral de linha de  $f$  ao longo da curva  $C$ , vamos supor que  $C$  representa um arame e  $f(x, y, z)$  a densidade (massa por unidade de comprimento) em cada ponto  $(x, y, z) \in C$ . Queremos calcular a massa total,  $M$ , do arame.

Para isto, dividamos o intervalo  $I = [a, b]$  por meio da partição regular de ordem  $n$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b$ , obtendo assim uma decomposição da curva  $C$  em curvas  $C_i$  definidas em  $[t_i, t_{i+1}]$  para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , como na figura a seguir:



Supondo  $\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^3)$ , e denotando por  $\Delta s_i$  o comprimento da curva  $C_i$ , tem-se:

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Pelo **Teorema do Valor Médio para Integrais**<sup>2</sup>, para cada  $i$  existe  $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$  tal que  $\Delta s_i = \|\sigma'(u_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i) = \|\sigma'(u_i)\| \Delta t_i$ , onde  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Quando  $n$  é grande,  $\Delta s_i$  é pequeno e  $f(x, y, z)$  pode ser considerada constante em  $C_i$ , igual a  $f(\sigma(u_i))$ . Portanto, a massa total  $M$  é aproximada por:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma(u_i)) \|\sigma'(u_i)\| \Delta t_i.$$

A soma  $S_n$  é uma soma de Riemann da função  $f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|$  no intervalo  $[a, b]$ . Logo, se considerarmos  $f(x, y, z)$  contínua em  $C$ , então:

$$M = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt.$$

**Definição 31.** Consideremos uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

onde  $\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^3)$ . Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C \subset U$  e  $f|_C$  é contínua. A **integral de linha de  $f$  ao longo da curva  $C$**  é:

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt. \quad (3)$$

**Exemplo 32.** Calcular:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

onde  $C$  é a hélice parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), t) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>visto na AULA 1

**Solução:** Temos  $x(t) = \cos(t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$  e  $z(t) = t$ , de modo que:

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\sin(t), \cos(t), 1),$$

de modo que  $\sigma \in \mathcal{C}'([0, 2\pi], \mathbb{R}^3)$  e  $\|(-\sin(t), \cos(t), 1)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$ . Como  $f$  é contínua, de (3) segue que:

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \\ &= \sqrt{2} \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

□

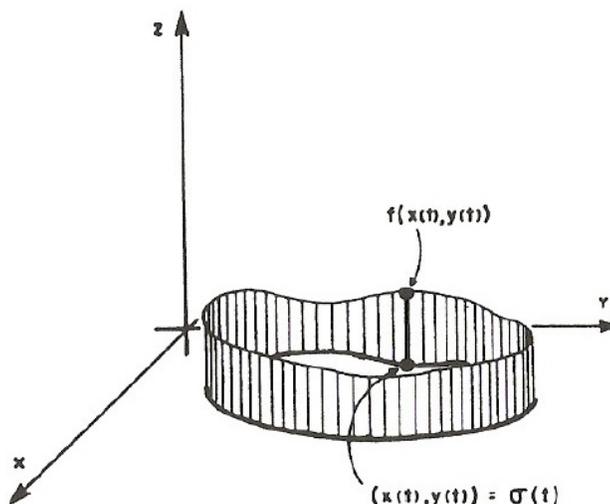
Um caso particular da integral de linha definida em (3) ocorre quando a curva  $C$  é uma curva do plano  $Oxy$  definida por uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ :

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

e  $f = f(x, y)$  é uma função real contínua definida em  $C$ . Neste caso, **a integral de linha de  $f$  ao longo de  $C$**  é:

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt. \quad (4)$$

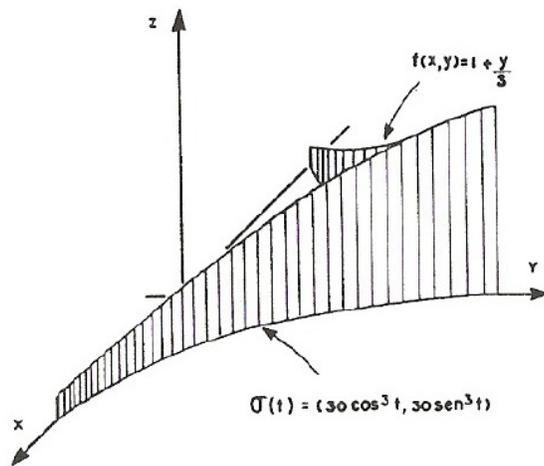
Quando  $f(x, y) \geq 0$  para  $(x, y) \in C$ , a fórmula (4) tem como interpretação geométrica a “área de uma cerca” que tem como base a curva  $C$  e altura  $f(x, y)$  em cada ponto  $(x, y) \in C$ .



**Exemplo 33.** A base de uma lâmina produzida para certo tipo de embarcação é uma curva  $C$  no plano  $Oxy$  definida por:

$$\begin{cases} x(t) = 30 \cos^3(t), & t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = 30 \sin^3(t), & t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

e a altura em cada ponto  $(x, y) \in C$  é dada por  $f(x, y) = 1 + \frac{|y|}{3}$  ( $x$  e  $y$  em metros). Se para revestir cada metro quadrado da peça de tetróxido de chumbo,  $PbO_4$  (zarcão) há um custo de  $p$  reais, qual o custo para se revestir a peça toda?



**Solução:** A base da lâmina no primeiro e segundo quadrantes é a porção de  $C$  dada por  $\sigma(t) = (30 \cos^3(t), 30 \sin^3(t)), 0 \leq t \leq \pi$ , e a altura da peça em cada ponto  $(x, y)$  é  $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$ .

Visto que  $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-90 \cos^2(t) \sin(t), 90 \sin^2(t) \cos(t))$ , então  $\sigma$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e:

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(90)^2 \cos^4(t) \sin^2(t) + (90)^2 \sin^4(t) \cos^2(t)} = \\ &= \sqrt{(90)^2 \sin^2(t) \cos^2(t)} = 90 |\sin(t) \cos(t)| \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua, a fórmula (4) garante que a área da metade da cerca é:

$$\begin{aligned}
\int_C \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds &= 90 \int_0^\pi (1 + 10 \sin^3(t)) |\sin(t) \cos(t)| dt = \\
&= 90 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) + 10 \sin^4(t)) \cos(t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin(t) + 10 \sin^4(t)) \cos(t) dt \right] = \\
&= 180 \left[ \frac{\sin^2(t)}{2} + 2 \sin^5(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 180 \left( \frac{1}{2} + 2 \right) = 450
\end{aligned}$$

A área total da lâmina é  $2 \times 450m^2 = 900m^2$  e, portanto, o custo será de  $900p$  reais.

**Exemplo 34.** Calcular:

$$\int_\gamma xy dx + (x - y) dy$$

onde  $\gamma$  consiste dos segmentos de reta de  $(0,0)$  a  $(2,0)$  e de  $(2,0)$  a  $(3,2)$ .

**Solução:** O segmento que une  $(0,0)$  a  $(2,0)$  pode ser parametrizado por:

$$\begin{aligned}
\alpha : [0,2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto (t,0)
\end{aligned}$$

enquanto o segmento que une  $(2,0)$  a  $(3,2)$  pode ser parametrizado por:

$$\begin{aligned}
\beta : [2,3] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto (t, 2t - 4)
\end{aligned}$$

Assim, a curva  $\gamma$  pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned}
\gamma : [0,3] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto \begin{cases} (t,0) & \text{se } t \in [0,2] \\ (t, 2t - 4), & \text{se } t \in [2,3] \end{cases}
\end{aligned}$$

Pela aditividade da integral de linha, tem-se:

$$\int_\gamma xy dx + (x - y) dy = \int_\alpha xy dx + (x - y) dy + \int_\beta xy dx + (x - y) dy$$

Vamos calcular cada uma destas integrais separadamente.

Para a curva  $\alpha$ ,  $x(t) = t$  e  $y(t) = 0$ , e portanto:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha xy dx + (x - y) dy &= \int_0^2 x(t)y(t) \frac{dx}{dt} dt + (x(t) - y(t)) \frac{dy}{dt} dt = \\
&= \int_0^2 t \cdot 0 dt + (t - 0) \frac{d0}{dt} dt = 0
\end{aligned}$$

Para a curva  $\beta$ , tem-se  $x(t) = t$  e  $y(t) = 2t - 4$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \int_{\beta} xy dx + (x - y) dy &= \int_2^3 x(t)y(t) \frac{dx}{dt} dt + (x(t) - y(t)) \frac{dy}{dt} dt = \\ &= \int_2^3 t(2t - 4) \cdot \underbrace{1}_{=dx/dt} dt + (t - (2t - 4)) \cdot \underbrace{2}_{=dy/dt} dt = \\ &= \int_2^3 (2t^2 - 6t + 8) dt = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_{\gamma} xy dx + (x - y) dy = 0 + \frac{17}{3} = \frac{17}{3}$$

### 3.1 Comprimento de Curvas

Considere uma curva definida por  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$ . Podemos pensar que esta curva é a trajetória descrita por uma partícula se movendo com velocidade escalar  $v = \|\sigma'(t)\|$ . Qual é o comprimento desta curva conforme  $t$  “percorre” o intervalo  $[a, b]$ ?

Intuitivamente, isto nada mais é do que o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo  $[a, b]$ , ou seja,

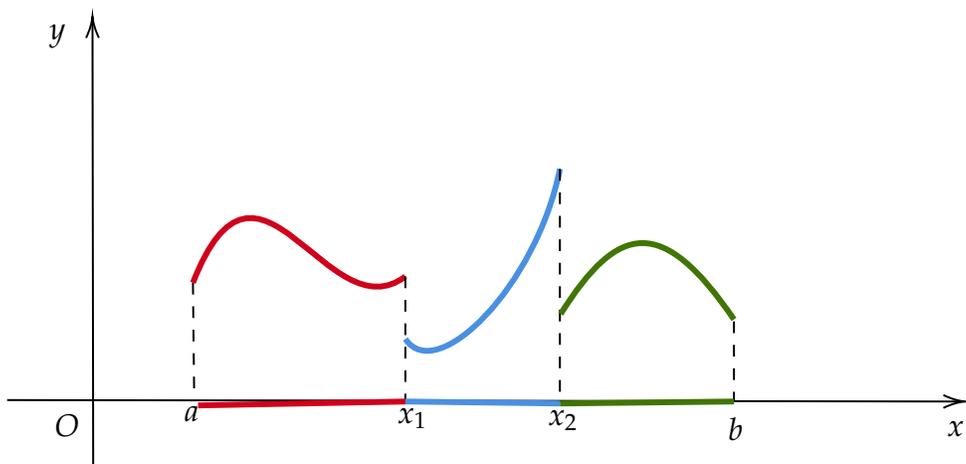
$$\int_a^b v(t) dt$$

Antes de prosseguirmos, recorde a seguinte:

**Definição 35.** Uma função  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  por partes se o intervalo  $[a, b]$  puder ser subdividido em um número finito de intervalos consecutivos e não sobrepostos, digamos:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_n,$$

com  $I_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , da forma  $[x_{i-1}, x_i], [x_{i-1}, x_i[, ]x_{i-1}, x_i[$  ou  $]x_{i-1}, x_i]$ , com  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , restritos aos quais  $\sigma$  é de classe  $C^1$ , ou seja, tais que  $\sigma|_{I_i} \in C^1(I_i, \mathbb{R}^n)$ .



$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, b]$$

**Definição 36.** Seja  $(C, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n), n \in \{2, 3\}$ , uma curva parametrizada com  $\sigma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^3)$ . O **comprimento da curva parametrizada**  $(C, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  é:

$$L(C, \sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (5)$$

Esta fórmula ainda é válida no caso em que  $\sigma$  é de classe  $C^1$  por partes.

No caso de uma curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , temos:

$$L(C, \sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

e no caso de uma curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , temos:

$$L(C, \sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

**Exemplo 37.** Calcular o comprimento da hélice  $(H, \eta : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3)$  onde:

$$\begin{aligned} \eta : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(3t), \sin(3t), 4t) \end{aligned}$$

e  $H = \eta[0, 4\pi]$ .

**Solução:** Temos:

$$\eta'(t) = \left( \frac{d}{dt}(\cos(3t)), \frac{d}{dt}(\sin(3t)), \frac{d}{dt}(4t) \right) = (-3 \cdot \sin(3t), 3 \cdot \cos(3t), 4),$$

de modo que:

$$\|\eta'(t)\| = \sqrt{(-3 \cdot \sin(3t))^2 + (3 \cdot \cos(3t))^2 + 4^2} = \sqrt{9 \sin^2(t) + 9 \cos^2(t) + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$L(H, \eta) = \int_0^{4\pi} \|\eta'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} 5 dt = 20\pi$$

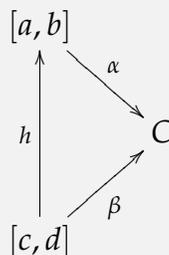
**Definição 38 (parametrizações equivalentes).** Sejam  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  duas funções de classe  $C^1$  tais que:

$$\alpha[a, b] = C = \beta[c, d]$$

ou seja,  $(C, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3)$  e  $(C, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3)$  são curvas parametrizadas de classe  $C^1$ . Dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  são **parametrizações equivalentes** se, e somente se, existir uma bijeção de classe  $C^1$ ,

$$h : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

tal que:



comuta, ou seja, tal que:

$$(\forall t \in [c, d])(\beta(t) = \alpha(h(t))).$$

Neste caso, escrevemos  $\alpha \sim_h \beta$ .

Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  forem parametrizações equivalentes, então  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  relaciona as velocidades com que as partículas se movem sobre  $C$ , pois pela **Regra da Cadeia**:

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t).$$

Se  $(\forall t \in [c, d])(h'(t) > 0)$ , então a partícula com vetor posição dado por  $\beta$  percorre  $C$  no mesmo sentido que a partícula cujo vetor posição é  $\alpha$ . No caso em que  $(\forall t \in [c, d])(h'(t) < 0)$ , elas se movem sobre  $C$  em sentidos contrários.

O seguinte resultado nos garante que o comprimento de uma curva parametrizada independe das parametrizações equivalentes escolhidas.

**Teorema 39.** *Sejam  $(C, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  e  $(C, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3)$  curvas parametrizadas tais que  $\alpha$  e  $\beta$  são parametrizações equivalentes ( $\alpha \sim_h \beta$ ). Então:*

$$L(C, \alpha) = L(C, \beta)$$

*Demonstração.* Como  $\alpha \sim_h \beta$ ,  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma bijeção de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que, se:

$$\begin{aligned} \alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \beta : [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(h(t)), y(h(t)), z(h(t))) \end{aligned}$$

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned} L(C, \beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d |h'(t)| \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt = \\ &= \begin{cases} \int_a^b h'(t) \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt, & \text{se } h \text{ é crescente;} \\ \int_a^b -h'(t) \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt & \text{se } h \text{ é decrescente;} \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = h(t)$ , de modo que  $du = h'(t)dt$ , temos:

$$L(C, \beta) = \begin{cases} \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(u)\| du = L(C, \alpha), & \text{se } h \text{ é crescente;} \\ \int_{h(c)}^{h(d)} -\|\alpha'(u)\| du = L(C, \alpha) & \text{se } h \text{ é decrescente;} \end{cases}$$

Deste modo, segue que:

$$\alpha \sim_h \beta \Rightarrow L(C, \alpha) = L(C, \beta).$$

□

## 4 Integração de Linha de Campos Vetoriais

Sejam:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

um campo vetorial e  $C$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , definida por:

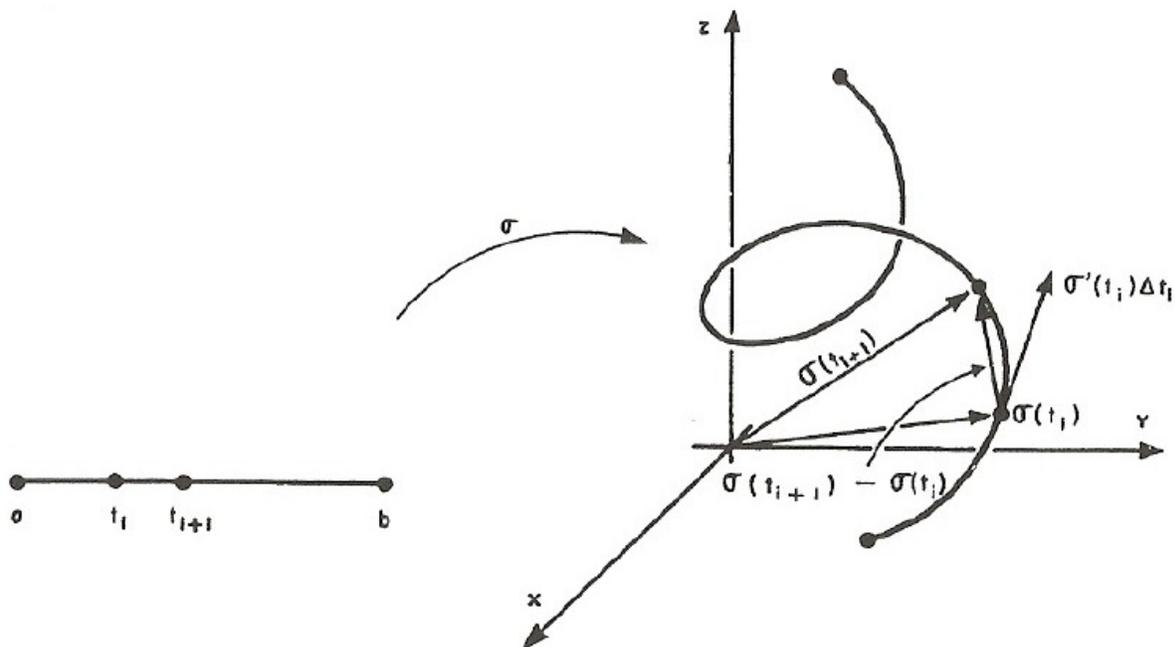
$$\begin{aligned} \sigma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Para motivar a definição de integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$ , suponhamos que  $\vec{F}$  representa um campo de forças e calculemos o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de  $C$

Quando  $C$  é um segmento de reta ligando o ponto  $A$  ao ponto  $B$  e  $\vec{F}$  é uma força constante, sabemos que o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de  $C$  é dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = (\text{força na direção do deslocamento}) \times (\text{deslocamento})$$

Quando  $C$  não é um segmento de reta, podemos aproximá-la por uma linha poligonal com vértices em  $C$  do seguinte modo: dividimos o intervalo  $I = [a, b]$  por meio de uma partição regular de ordem  $n$ ,  $a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$ , obtendo assim uma linha poligonal de vértices  $\sigma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .



Como, para  $n$  grande,  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  é pequeno, o deslocamento da partícula de  $\sigma(t_i)$  até  $\sigma(t_{i+1})$  é aproximado pelo vetor  $\Delta s_i = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)$ , e  $\vec{F}$  pode ser considerada constante e igual a  $\vec{F}(\sigma(t_i))$  no intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Supondo que  $\sigma'(t)$  exista para todo  $t \in [a, b]$ , então, pela definição de derivada, temos que:

$$\Delta s_i \approx \sigma'(t_i) \Delta t_i$$

Portanto, o trabalho realizado para deslocar uma partícula de  $\sigma(t_i)$  até  $\sigma(t_{i+1})$  é aproximadamente:

$$\vec{F}(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx (\vec{F}(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)) \Delta t_i$$

Assim, o trabalho  $W$  realizado pela força  $\vec{F}$  para deslocar uma partícula ao longo de  $C$  é:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (\vec{F}(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)) \Delta t_i \right)$$

Se  $\sigma'$  é contínua em  $[a, b]$  e:

$$\begin{aligned} \vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

é contínuo em  $C$  (ou seja,  $M, N, P : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas) existe e é igual a:

$$W = \int_a^b (\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt$$

**Definição 40.** Consideremos uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

onde  $\sigma$  é de classe  $C^1$  e  $\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$  um campo vetorial contínuo definido em  $C$ . A **integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$**  por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt \quad (6)$$

(no integrando acima  $\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$  denota o produto escalar de  $\vec{F}(\sigma(t))$  por  $\sigma'(t)$ ).

Se a curva  $C$  é fechada, isto é, se  $\sigma(b) = \sigma(a)$ , a integral de linha é denotada por:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como no caso da integral de linha de uma função escalar, a fórmula (6) ainda é válida se  $\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$  é contínua por partes em  $[a, b]$ .

Se usarmos as componentes de  $\vec{F}$  e de  $\sigma$ , a equação (6) se escreve:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b M(\sigma(t))x'(t)dt + N(\sigma(t))y'(t)dt + P(\sigma(t))z'(t)dt$$

Por esta razão, é usual denotar-se a integral de linha por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

Quando  $C$  é uma curva no plano  $Oxy$  parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

a integral de linha de:

$$\begin{aligned} \vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (M(x, y), N(x, y)) \end{aligned}$$

ao longo de  $C$  é dada por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy = \int_a^b M(\sigma(t))x'(t)dt + N(\sigma(t))y'(t)dt \quad (7)$$

**Exemplo 41.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

e  $C$  é a curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\sin(t), \cos(t), t) \end{aligned}$$

**Solução:** Como  $\vec{F}$  é contínua em  $\mathbb{R}^3$  e  $\sigma'(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1)$  é contínua em  $[0, 2\pi]$ , usando (6) temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t), t) \cdot (\cos(t), -\sin(t), 1)dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t)\cos(t) - \sin(t)\cos(t) + t)dt = \int_0^{2\pi} tdt = 2\pi^2 \end{aligned}$$

**Exemplo 42.** Calcular a integral de linha do campo vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{F}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x^2 - 2xy, x^3 + y)\end{aligned}$$

de  $(0,0)$  a  $(1,1)$  ao longo das seguintes curvas:

(a) O segmento de reta  $C_1$  de equações paramétricas  $x(t) = t, y(t) = t, 0 \leq t \leq 1$ .

(b) A curva  $C_2$  de equações paramétricas  $x(t) = t^2, y(t) = t^3, 0 \leq t \leq 1$ .

**Solução:**

Ad (a): temos  $\sigma(t) = (t, t)$ , de modo que  $\sigma'(t) = (1, 1)$  e  $\vec{F}(\sigma(t)) = (-t^2, t^3 + t)$ . Portanto, por (7):

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t^2 + t^3 + t) dt = \left[ -\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

Ad (b): temos  $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ . Então  $\sigma'(t) = (2t, 3t^2)$  e  $\vec{F}(\sigma(t)) = (t^4 - 2t^5, t^6 + t^3)$ . Logo, por (7),

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2t^5 - 4t^6 + 3t^8 + 3t^5) dt = \left[ \frac{5t^6}{6} - \frac{4t^7}{7} + \frac{t^9}{3} \right]_0^1 = \frac{25}{42}$$

O exemplo acima mostra que a integral de linha de um campo vetorial de um ponto a outro depende, em geral, do caminho que liga os dois pontos.

Vamos agora calcular o que foi pedido no item (b) mais uma vez, usando uma representação paramétrica diferente para a curva  $C_2$ . A curva  $C_2$  pode ser descrita pela função:

$$\beta(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}), t \in [0, 1]$$

Como  $\beta'(t) = \left(1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)$  e  $\vec{F}(\beta(t)) = (t^2 - 2t^{5/2}, t^3 + t^{3/2})$ , obtemos, por (7),

$$\int_0^1 \vec{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_0^1 \left( t^2 - 2t^{5/2} + \frac{3}{2}t^{7/2} + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left[ \frac{5t^3}{6} - \frac{4t^{7/2}}{7} + \frac{t^{9/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{25}{42}$$

Acabamos de observar no exemplo acima que o valor da integral  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é o mesmo para duas parametrizações da curva  $C_2$ . Esta é uma propriedade importante das integrais de linha, que provaremos a seguir.

Lembremos, do que foi visto anteriormente, que se  $\sigma(t), t \in [a, b]$  e  $\beta(t), t \in [c, d]$  são duas parametrizações equivalentes da curva  $C$ , então existe uma função  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  bijetora, de classe  $\mathcal{C}^1$ , tal que  $\beta(t) = \sigma(h(t))$ .

Se  $h$  é crescente, dizemos que  $h$  preserva a orientação, isto é, uma partícula que percorre  $C$  com a parametrização  $\beta(t)$  se move no mesmo sentido que a partícula que percorre  $C$  segundo a parametrização  $\sigma(t)$ . Se  $h$  é decrescente, dizemos que  $h$  inverte a orientação.

**Teorema 43.** *Sejam:*

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \sigma(t) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \beta : [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \beta(t) \end{aligned}$$

duas parametrizações  $\mathcal{C}^1$  por partes equivalentes. Se  $h$  preserva a orientação, então:

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se  $h$  inverte a orientação, então:

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

( $C_\beta$  e  $C_\sigma$  denotam a curva  $C$  parametrizada por  $\beta(t)$  e  $\sigma(t)$ , respectivamente).

*Demonstração.* É suficiente provar o teorema para  $\sigma(t)$  e  $\beta(t)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Suponhamos que as parametrizações  $\sigma(t)$  e  $\beta(t)$  são relacionadas como segue:

$$(\forall t \in [c, d])(\beta(t) = \sigma(h(t)))$$

Então,

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c^d \vec{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d \vec{F}(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t)) \cdot h'(t) dt$$

Fazendo a substituição  $u = h(t), du = h'(t)dt$ , obtemos:

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h(c)}^{h(d)} \vec{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du =$$

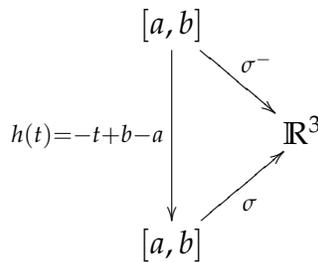
$$= \begin{cases} \int_a^b \vec{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du = \int_{C_\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, & \text{se } h \text{ preserva a orientação;} \\ \int_b^a \vec{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du = -\int_{C_\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, & \text{se } h \text{ inverte a orientação} \end{cases}$$

□

Como caso particular deste teorema, temos que:

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde  $C^-$  é a curva  $C$  com orientação oposta, isto é, sendo  $C$  parametrizada por  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $C^-$  é a curva parametrizada por  $\sigma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada pela composição de  $\sigma$  com  $h(t) = -t + b - a$ , isto é:



$$\sigma^-(t) = \sigma(-t + b - a)$$

No caso de uma função escalar temos que:

$$\int_{C_\beta} f dr = \int_{C_\sigma} f dr,$$

se  $\beta(t)$  e  $\sigma(t)$  são parametrizações  $\mathcal{C}^1$  por partes e equivalentes a curva  $C$ .

Podemos ainda destacar as seguintes propriedades da integral de linha:

- (i) **Linearidade:** Sejam  $C$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes,  $\vec{F}, \vec{G} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos vetoriais contínuos em  $C$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tem-se:

$$\int_C (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

- (ii) **Aditividade:** Se  $C$  admite uma decomposição num número finito de curvas  $C_1, \dots, C_n$ , ou seja,  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ , então:

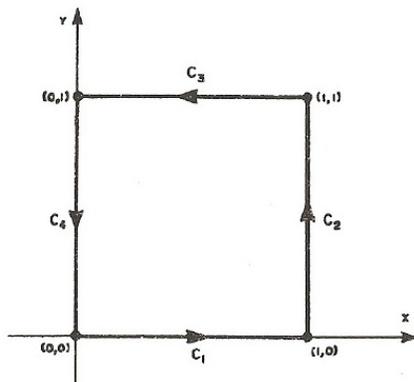
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A prova destas duas propriedades segue imediatamente da definição de integral de linha.

**Exemplo 44.** Considere  $C$  a fronteira do quadrado plano de vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  e  $(0,1)$ , orientada no sentido anti-horário. Calcular a integral de linha:

$$\oint_C x^2 dx + xy dy$$

**Solução:**



**Solução:** Aqui identificamos o campo vetorial:

$$\oint_C x^2 dx + xy dy = \oint_C M(x,y) dx + N(x,y) dy$$

$$\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (x^2, xy)$$

A curva  $C$  é decomposta em quatro segmentos de reta que podem ser parametrizados do seguinte modo:

$$C_1 : \sigma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_2 : \sigma_2(t) = (1, t), 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_3 : \sigma_3(t) = (1 - t, 1), 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_4 : \sigma_4(t) = (0, 1 - t), 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$\sigma_1'(t) = (1, 0), 0 < t < 1$$

$$\sigma_2'(t) = (0, 1), 0 < t < 1$$

$$\sigma_3'(t) = (-1, 0), 0 < t < 1$$

$$\sigma_4'(t) = (0, -1), 0 < t < 1$$

e portanto:

$$\int_{C_1} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 \vec{F}(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{C_2} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 \vec{F}(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(1, t) \cdot (0, 1) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_3} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 \vec{F}(\sigma_3(t)) \cdot \sigma_3'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(1-t, 1) \cdot (-1, 0) dt = \int_0^1 (-t^2 + 2t - 1) dt = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{C_4} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 \vec{F}(\sigma_4(t)) \cdot \sigma_4'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(0, 1-t) \cdot (0, -1) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Logo,

$$\int_C x^2 dx + xy dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

Em geral, a integral de linha de um campo vetorial  $\vec{F}$  ao longo de uma curva  $C$  que liga os pontos  $A$  e  $B$  depende da curva  $C$ . No entanto, para alguns campos vetoriais, a integral depende apenas dos pontos  $A$  e  $B$ , não da curva que os liga. Neste caso, diremos que a integral de linha independe do caminho que liga  $A$  e  $B$ .

Quais campos vetoriais têm integrais de linha que independem do caminho? Estudaremos, na sequência, este tema.

## 5 Campos Conservativos

Em campos gravitacionais e elétricos, o trabalho necessário para mover uma massa ou uma carga de um ponto para outro depende somente das posições inicial e final do objeto e não do caminho entre elas.

Em geral, que campos vetoriais têm integrais de linha que independem do caminho? Nestas notas estudaremos estes campos, denominados de “conservativos”<sup>3</sup>, vendo algumas de suas caracterizações bem como suas principais propriedades.

---

<sup>3</sup>o termo é emprestado da Física, na qual se refere a campos nos quais o princípio da conservação da energia é válido - é válido em campos conservativos

**Definição 45.** Seja  $\vec{F}$  um campo definido em uma região aberta  $U \subset \mathbb{R}^3$ , e suponha que para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  em  $U$ , o trabalho:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

realizado para mover de  $A$  até  $B$  seja o mesmo para todos os caminhos de  $A$  até  $B$ . Então a integral  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é **independente do caminho em  $U$**  e o campo  $\vec{F}$  é **conservativo em  $U$** .

Se  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo conservativo e  $U$  é conexo por caminhos, então dados dois pontos quaisquer de  $U$ ,  $A, B \in U$ , denotaremos por:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

a integral de  $\vec{F}$  ao longo de *qualquer* caminho que comece em  $A$  e termine em  $B$ .

Um potencial elétrico é uma função escalar cujo campo gradiente é um campo elétrico. Um potencial gravitacional é uma função escalar cujo campo gradiente é um campo gravitacional, e assim por diante. Como veremos, uma vez que tenhamos encontrado uma função potencial  $f$  para um campo  $\vec{F}$ , poderemos calcular todas as integrais de trabalho no domínio de  $\vec{F}$  com a fórmula:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Este é o teor do seguinte:

**Teorema 46.** Seja  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial contínuo definido num subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  para o qual existe uma função real  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$(\forall (x, y, z) \in U)(\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z))$$

Se  $C$  é uma curva em  $U$  com ponto inicial  $A$  e ponto final  $B$ , parametrizada por uma função  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes, então:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

*Demonstração.* Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $\sigma(a) = A$  e  $\sigma(b) = B$ . Então, como  $\vec{F} = \nabla f$ , tem-se, por definição da integral de linha de um campo vetorial:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

Considerando a função:

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(\sigma(t))$$

tem-se  $g(a) = f(\sigma(a)) = f(A)$  e  $g(b) = f(\sigma(b)) = f(B)$ , e pela **Regra da Cadeia** (veja a AGENDA 8 de Cálculo II, disponibilizada na página do professor),

$$g'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = f(B) - f(A)$$

□

Sob condições normalmente satisfeitas na prática, um campo vetorial  $\vec{F}$  será conservativo se, e somente se, for gradiente de uma função escalar,  $f$ , isto é, se, e somente se  $\vec{F} = \nabla f$  para alguma função  $f$ . A função  $f$  é chamada então de função potencial para  $\vec{F}$ .

O campo vetorial  $\vec{F}$  do **Teorema 46** é chamado **campo gradiente** ou **campo conservativo**, e a função  $f$ , uma **função potencial**.

**Teorema 47.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  um conjunto aberto conexo por caminhos e*

$$\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$$

*um campo vetorial de classe  $C^1(U, \mathbb{R}^2)$ . Se  $\vec{F}$  é conservativo então existe  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, provaremos o teorema para  $n = 3$ . Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$  um campo conservativo. Fixamos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$  qualquer, e definimos:

$$f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ P = (x, y, z) \mapsto \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Mostraremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = M(x, y, z)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{P_0}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como a integral independe do caminho, podemos escolher o segmento de reta paralelo ao eixo  $Ox$  para calcular esta última integral:

$$\begin{aligned} [(x, y, z), (x + \Delta x, y, z)] &= \{(1 - t) \cdot (x, y, z) + t \cdot (x + \Delta x, y, z) \mid t \in [0, 1]\} = \\ &= \{(x + t \cdot \Delta x, y, z) \mid t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

ou seja, ao longo da curva:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x + t \cdot \Delta x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 (M(x + t \cdot \Delta x, y, z), N(x + t \cdot \Delta x, y, z), P(x + t \cdot \Delta x, y, z)) \cdot (\Delta x, 0, 0) dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \int_0^1 M(x + \Delta x, y, z) dt}{\Delta x} \end{aligned}$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que:

$$\int_0^1 M(x + t \cdot \Delta x, y, z) \cdot dt = M(x + t_0 \cdot \Delta x, y, z) \cdot (1 - 0)$$

e portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x + t_0 \cdot \Delta x, y, z) = M(x, y, z)$$

Similarmente, demonstra-se que  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  e que  $\frac{\partial f}{\partial z} = P$ , e que  $f$  é, portanto, uma função potencial para  $\vec{F}$ .  $\square$

Dos resultados que vimos, temos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} \vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ com } U \text{ conexo por caminhos é conservativo} &\iff \\ (\exists f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})(\vec{F} = \nabla f) & \end{aligned}$$

Na seção a seguir veremos uma condição necessária para que um campo vetorial seja um campo gradiente.

## 5.1 Teste das Componentes

Como já mencionamos, nem sempre um dado campo vetorial admite uma função potencial: na verdade, na maioria dos casos, é impossível encontrar um campo potencial. A menos que esteja explícito que o campo em apreço é gradiente (ou conservativo), antes de buscarmos uma função potencial para o campo devemos garantir que tal função exista. O teste a seguir nos fornece uma condição necessária para que o campo seja conservativo. Isto significa que se o campo não cumprir as condições dadas nas hipóteses do teorema, não adianta nada procurarmos uma função potencial, pois esta não existirá.

**Teorema 48 (Condição Necessária para Campo Conservativo).** *Seja  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  um campo cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então, se  $\vec{F}$  é conservativo, tem-se:*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \end{cases} \quad (8)$$

*Demonstração.* Mostraremos que se  $\vec{F}$  é conservativo, valem as equações (8).

Se existe uma (\*) função  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ , ou seja, tal que:

$$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Assim,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial x}$$

e:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

□

**Corolário 49.** Seja  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  um campo cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então,  $\vec{F}$  é conservativo se, e somente se:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Posteriormente veremos que as condições dadas nos resultados acima também são *suficientes* para que o campo em apreço seja conservativo - ou seja, que se um campo vetorial qualquer satisfizer as hipóteses, então será um campo conservativo.

Os resultados acima motivam a introdução do **rotacional** de um campo vetorial.

**Definição 50.** Seja:

$$\begin{aligned} \vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

um campo vetorial de classe  $C^1$ . O **rotacional** de  $\vec{F}$  é o campo dado por:

$$(\nabla \times \vec{F}) = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Munidos da noção de rotacional, o **Teorema 48** pode ser reformulado como segue:

**Teorema 51.** Se  $\vec{F}$  é conservativo então  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0}$

O resultado acima é frequentemente usado em sua forma contrapositiva, ou seja:

**Teorema 52.** Se  $(\nabla \times \vec{F}) \neq \vec{0}$  então  $\vec{F}$  não é conservativo.

Veremos, posteriormente, que  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0}$  **não garante que  $\vec{F}$  seja conservativo**, ou seja, a recíproca do **Teorema 51** é, neste grau de generalidade, *falsa*.

Um conceito que será necessário posteriormente é o da seguinte:

**Definição 53.** Um subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$  é **simplesmente conexo** se, para toda curva fechada  $C$  em  $U$ , a região limitada por  $C$  está totalmente contida em  $U$ . Intuitivamente, um aberto  $U$  é simplesmente conexo se não tem "buracos".

Formalmente, a "deformação" de uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  em outra,  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é uma função contínua:

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) \mapsto H(t, s)$$

tal que:

$$\begin{cases} (\forall t \in [a, b])(H(t, 0) = \alpha(t)) \\ (\forall t \in [a, b])(H(t, 1) = \beta(t)) \end{cases}$$

Uma função como a dada acima é chamada de **homotopia** entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Exemplo 54.** *Todo subconjunto convexo do plano é simplesmente conexo. De fato, se  $U \subset \mathbb{R}^2$  é convexo, então dados quaisquer dois pontos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in U$ , o segmento  $[(x_0, y_0), (x_1, y_1)] = \{(1-t) \cdot (x_0, y_0) + t \cdot (x_1, y_1) \mid t \in [0, 1]\}$  está inteiramente contido em  $U$ .*

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  um laço qualquer. Vamos considerar a função contínua:

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U \\ (t, s) \mapsto (1-s) \cdot \gamma(t) + s \cdot \gamma(a)$$

e observar que:

$$\begin{cases} (\forall t \in [a, b])(H(t, 0) = \gamma(t)) \\ (\forall t \in [a, b])(H(t, 1) = \gamma(a)) \end{cases}$$

ou seja, o laço  $\gamma$  pode ser deformado no ponto  $\gamma(a)$  sem que precisemos sair de  $U$ . Assim,  $U$  é simplesmente conexo.

## 5.2 Construção de uma função potencial usando integrais indefinidas

Se  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  é um campo vetorial gradiente de uma função potencial  $f$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3 \tag{11}$$

Usando integrais indefinidas e integrando (9) em relação a  $x$  (mantendo  $y$  e  $z$  constantes), obtemos:

$$f(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + A(y, z) \quad (12)$$

onde  $A(y, z)$  é uma “constante de integração” a ser determinada. Analogamente, se integrarmos (10) em relação a  $y$  e (11) em relação a  $z$ , obtemos:

$$f(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + B(x, z) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + C(x, y) \quad (14)$$

onde  $B(x, y)$  e  $C(x, y)$  são funções a serem determinadas. Para encontrar  $f$  devemos determinar  $A(y, z)$ ,  $B(x, z)$  e  $C(x, y)$  de modo que as equações (12), (13) e (14) tenham o mesmo lado direito.

**Exemplo 55.** Considere o campo gradiente  $\vec{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y))$ . Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é qualquer curva  $C^1$  por partes de  $A = (\pi, 0)$  até  $B = (0, \pi)$

**Solução:** Pelo Teorema 46,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0, \pi) - f(\pi, 0),$$

onde  $f$  é uma função potencial de  $\vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$ , que será determinada usando integrais indefinidas. Aqui temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-y} - 2x \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xe^{-y} - \sin(y) \quad (16)$$

Integrando (15) em relação a  $x$  e (16) em relação a  $y$ , obtemos:

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + A(y) \quad (17)$$

e:

$$f(x, y) = xe^{-y} + \cos(y) + B(x) \quad (18)$$

Por inspeção, resulta que  $A(y) = \cos(y)$  e  $B(x) = -x^2$  verificam as equações (17) e (18). Portanto, uma função potencial é  $f(x, y) = xe^{-y} + \cos(y) - x^2$ . Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -1 - (\pi + 1 - \pi^2) = \pi^2 - \pi - 2$$

### 5.3 Propriedades de Campos Conservativos

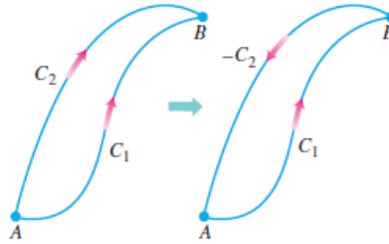
Nesta seção apresentamos um dos resultados que caracterizam campos vetoriais conservativos em termos de integrais ao longo de caminhos fechados (laços).

**Teorema 56 (Propriedade do laço).** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) Se  $C$  é um laço fechado totalmente contido em  $U$ ,  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- (2) O campo  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é conservativo.

*Demonstração.* Ad (1)  $\Rightarrow$  (2): Queremos mostrar que, para quaisquer dois pontos  $A, B \in U$ , a integral de  $\vec{F}$  tem o mesmo valor ao longo de quaisquer dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  que unem  $A$  a  $B$ .

Invertamos a direção em  $C_2$  para formar um caminho  $-C_2$  de  $B$  a  $A$ . Juntos,  $C_1$  e  $-C_2$  formam um laço fechado  $C$ , e:

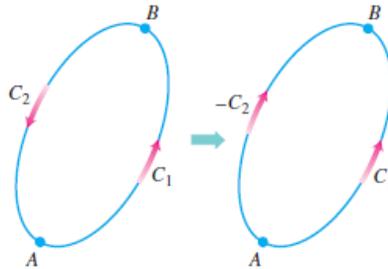


$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Segue, portanto, que:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ad (2)  $\Rightarrow$  (1): Queremos mostrar que  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é zero sobre qualquer caminho fechado  $C$  (laço). Escolhemos dois pontos  $A$  e  $B$  em  $C$  e os usamos para “quebrar”  $C$  em dois pedaços:  $C_1$  de  $A$  a  $B$ , seguido de  $C_2$ , a partir de  $B$  de volta a  $A$ :



Então:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

□

O diagrama a seguir resume os **Teoremas 46 e 56**:

$$\vec{F} = \nabla f \text{ em } U \xLeftrightarrow{\text{Teorema 46}} \vec{F} \text{ é conservativo em } U \xRightarrow{\text{Teorema 56}} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

onde  $C$  é qualquer laço em  $U$ .

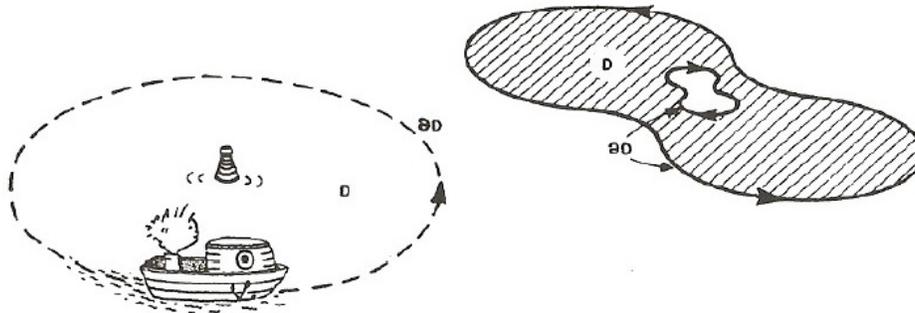
## 5.4 O Teorema de Green

O teorema de Green relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada  $C$  no plano  $Oxy$  com uma integral dupla sobre a região limitada por  $C$ . Este teorema será generalizado para curvas e superfícies no  $\mathbb{R}^3$ , posteriormente.

Antes de enunciar e provar o teorema de Green, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

**Definição 57.** Uma região fechada e limitada do plano,  $D \subset \mathbb{R}^2$  é **simples** se puder ser descrita como uma região de tipo I e de tipo II simultaneamente.

**Definição 58.** Dizemos que a fronteira de uma região limitada  $D$  - que denotamos por  $\partial D$  - **está orientada positivamente** se a região  $D$  fica à esquerda, ao percorrermos  $D$ , conforme ilustra a seguinte figura:



**Teorema 59 (Teorema de Green<sup>a</sup>).** Seja  $D$  uma região fechada e limitada do plano  $Oxy$ , cuja fronteira  $\partial D$  está orientada positivamente e é parametrizada por uma função de classe  $C^1$  por partes, de modo que  $\partial D$  seja percorrida apenas uma vez. Se:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$$

é um campo de classe  $C^1$  em um conjunto aberto que contém  $D$  - ou seja,  $\partial M/\partial x, \partial M/\partial y, \partial N/\partial x$  e  $\partial N/\partial y$  são funções contínuas em  $U$ , sendo  $U$  um aberto que contém  $D$  - então:

$$\oint_{\partial D} Mdx + Ndy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

<sup>a</sup>George Green, 1793-1841

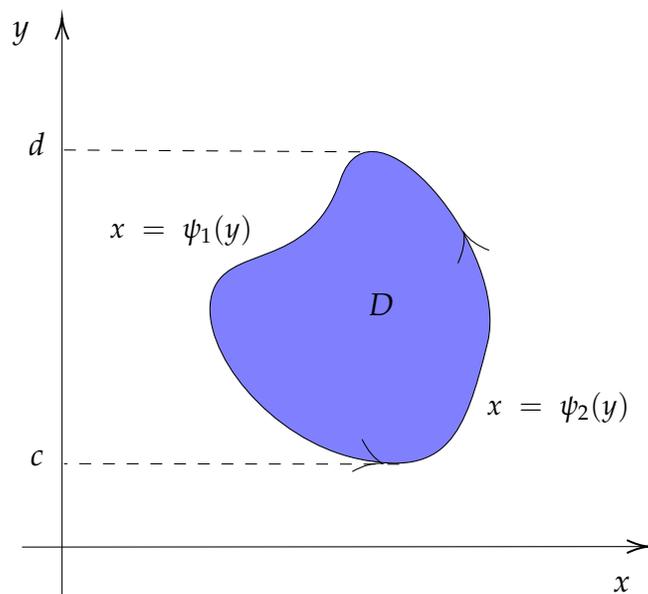
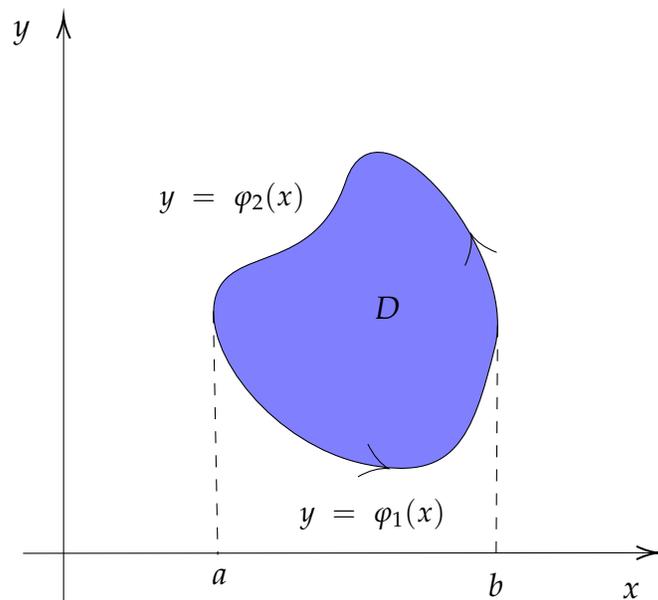
*Demonstração.* Vamos considerar  $D$  uma região simples, ou seja, vamos supor que  $D$  pode ser descrita simultaneamente por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a \leq x \leq b) \& (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\} \quad (19)$$

e:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)) \& (c \leq y \leq d)\} \quad (20)$$

conforme ilustra a figura a seguir:



Pela linearidade da integral dupla, tem-se:

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dx dy + \iint_D \left( -\frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Agora calculamos cada integral dupla do segundo membro utilizando-nos do **Teorema de Fubini**. Usando (19):

$$\begin{aligned}\iint_D \left( -\frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \int_a^b \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} \left( -\frac{\partial M}{\partial y} dy \right) dx \stackrel{*}{=} \int_a^b [M(x, \varphi_1(x)) - M(x, \varphi_2(x))] dx = \\ &= \int_a^b M(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b M(x, \varphi_2(x)) dx = \oint_{\partial D} M dx\end{aligned}$$

onde a igualdade (\*) se deve ao **Teorema Fundamental do Cálculo** aplicado à função de uma variável real  $g(y) = M(\underline{x}, y)$ , sendo  $\underline{x}$  considerado aqui como “constante”. De fato, tem-se:

$$\int_{u_1(\underline{x})}^{\varphi_2(\underline{x})} \left( -\frac{\partial M}{\partial y} \right) dy = \int_{\varphi_2(\underline{x})}^{\varphi_1(\underline{x})} g'(y) dy = g(\varphi_1(\underline{x})) - g(\varphi_2(\underline{x})) = M(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x})) - M(\underline{x}, \varphi_2(\underline{x}))$$

Analogamente, usando (20), tem-se:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} \left( \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [N(\psi_2(y), y) - N(y, \psi_1(y))] dy = \\ &= \int_c^d N(y, \psi_2(y)) dy - \int_c^d N(y, \psi_1(y)) dy = \oint_{\partial D} N dy\end{aligned}$$

Desta forma, se  $D$  é uma região simultaneamente do tipo I e do tipo II (ou seja, simples), tem-se:

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} M dx + N dy$$

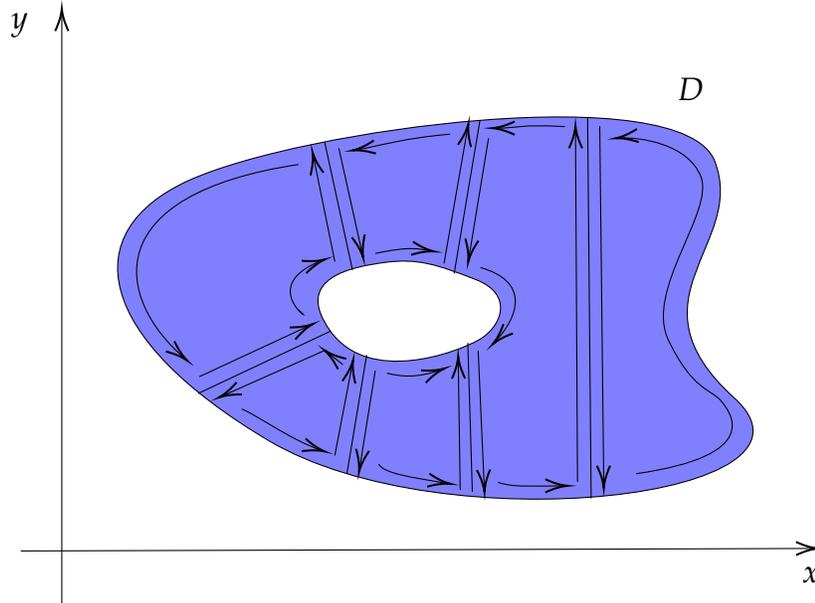
Agora passemos a analisar o caso em que  $D$  não é simples. Neste caso, decomposmos  $D$  como uma reunião finita de regiões simples, digamos  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ , onde cada região simples  $D_k$  tem fronteira  $\partial D_k$  de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ), e aplicamos o **Teorema de Green** a cada região  $D_k$ , obtendo:

$$\iint_{D_k} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D_k} M dx + N dy$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy + \dots + \iint_{D_n} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \\ &\quad \oint_{\partial D_1} M dx + N dy + \oint_{\partial D_2} M dx + N dy + \dots + \oint_{\partial D_n} M dx + N dy\end{aligned}$$

A fronteira de  $D$  é formada por partes das curvas  $\partial D_k$ . As partes de  $\partial D_k$  que não constituem a fronteira de  $D$  atuam como fronteira comum a duas regiões simples, conforme ilustrado na próxima figura:



Uma parte,  $\delta$ , de  $\partial D_k$  que é fronteira comum a duas regiões simples será percorrida duas vezes em sentidos opostos. Pela aditividade da integral de linha:

$$\int_{\delta} Mdx + Ndy + \int_{\delta} Mdx + Ndy = 0$$

Portanto, enquanto as partes das curvas  $\partial D_k$  que formam a fronteira de  $D$  contribuem para  $\oint_{\partial D} Mdx + Ndy$ , as outras partes se cancelam, fornecendo assim:

$$\oint_{\partial D} Mdx + Ndy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

□

**Observação 60.** *Precisamos de dois tipos de hipóteses para o Teorema de Green ser válido. Primeiro, precisamos de condições sobre  $M$  e  $N$  para assegurar a existência das integrais. As suposições usuais são que  $M$  e  $N$ , bem como suas derivadas parciais de primeira ordem, sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha  $\partial D$  e  $D$ . Segundo, a curva  $\partial D$  deve ser **simples, fechada e formada por pedaços ao longo dos quais podemos integrar  $M$  e  $N$** . As hipóteses usuais são que  $\partial D$  seja lisa por partes. A prova que daremos para o Teorema de Green, contudo, faz suposições sobre a forma de  $D$ . Pode-se encontrar provas menos restritivas em textos mais avançados.*

No exemplo a seguir, calcularemos uma integral de linha utilizando o Teorema de Green.

**Exemplo 61.** Calcular a integral:

$$\oint_C xydy - y^2dx,$$

onde  $C$  é o quadrado cortado do primeiro quadrante pelas retas  $x = 1, y = 1$ .

**Solução:** comparando  $xydy - y^2dx$  com  $Mdx + Ndy$ , vemos, de pronto, que  $M = -y^2$  e  $N = xy$ . Como o quadrado, que denotaremos por  $R$ , satisfaz as hipóteses do Teorema de Green (trata-se de uma curva simples, de classe  $C^1$  por partes), temos:

$$\oint_C xydy - y^2dx = \iint_R (y - (-2y))dxdy = \frac{3}{2}$$

**Exemplo 62 (Aplicação ao Cálculo de Áreas).** Se uma curva fechada simples,  $C$ , no plano é fronteira de uma região  $D$  do plano satisfazendo as hipóteses do **Teorema de Green**, a área de  $D$  é dada por:

$$A.(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

O motivo é que, pela equação acima, lida ao contrário:

$$A.(D) = \iint_D 1dydx = \iint_D \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dydx = \oint_C \frac{1}{2}xdy - \frac{1}{2}ydx$$

**Para pensar:** utilize o **Teorema de Green** para mostrar que a área delimitada pela elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde  $a, b > 0$ , é  $\pi \cdot a \cdot b$ .

**Teorema 63.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto simplesmente conexo,  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Se  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  é conservativo.

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma curva qualquer, lisa por partes, simples e fechada de  $U$ . Como  $U$  é simplesmente conexo, a região delimitada por  $\gamma$  está inteiramente contida em  $U$ , que denotaremos por  $D$ . Pelo **Teorema de Green** aplicado à região  $D$ , temos:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k}dxdy = 0$$

Por ter a **propriedade do laço (Teorema 56)**, segue que o campo  $\vec{F}$  é conservativo.  $\square$

A conexidade simples é **necessária** para que  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0}$  implique  $\vec{F}$  conservativo. Observe que o campo:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

**não é conservativo**, uma vez que não possui a propriedade do laço. De fato, se  $C$  é uma circunferência de raio  $\delta > 0$  centrada na origem:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\delta \cdot \cos(t), \delta \cdot \sin(t)) \end{aligned}$$

tem-se:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$$

e, no entanto,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{F})(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \\ &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \left( -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) = \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Temos, assim, um campo vetorial com  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0}$  que **não é conservativo**, ou seja,  $(\nabla \times \vec{F}) \equiv \vec{0} \not\Rightarrow \vec{F}$  conservativo. Neste caso, a implicação não vale exatamente porque o domínio do campo vetorial,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , **não é simplesmente conexo** (nenhum laço em torno da origem pode ser deformado em um ponto).

## 5.5 Uma Interpretação Vetorial para o Teorema de Green

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  uma região fechada e limitada cuja fronteira,  $\partial D$ , é uma curva orientada no sentido anti-horário. Se  $\partial D$  tem uma parametrização:

$$\begin{aligned} \gamma: [a,b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^1$ , cujo vetor tangente é não-nulo em cada ponto de  $\partial D$ . Podemos denotar os vetores tangente e normal unitário por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \left( \frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

e:

$$\hat{n} = \left( \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right),$$

respectivamente. Se  $\vec{F} = (M, N)$  é um campo vetorial de classe  $C^1$  definido num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  que contém  $D$ , então a integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $\partial D$  pode ser escrita em termos do vetor  $\vec{T}(t)$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Mdx + Ndy &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b \left( \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) d\vec{r} \end{aligned}$$

Neste caso, o **Teorema de Green** assume a forma:

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) d\vec{r}$$

Este resultado é um caso particular do **Teorema de Stokes**, que veremos mais tarde.

Agora, usando o vetor normal unitário,  $\hat{n}(t)$ , a integral de linha do campo vetorial  $\vec{G} = (-N, M)$  ao longo de  $\partial D$  é dada por:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} -Ndx + Mdy &= \int_a^b \vec{G}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \hat{n}(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\vec{r} \end{aligned}$$

Este resultado é a versão em duas dimensões do **Teorema de Gauss**, que também veremos posteriormente.

## 5.6 O Rotacional no Plano como Densidade de Circulação

Considere um campo vetorial  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ . Mostraremos, a seguir, que o rotacional de  $\vec{F}$  em um ponto  $(x_0, y_0) \in U$  é dado pela **densidade de circulação** do campo no ponto, isto é, pela razão entre a circulação de  $\vec{F}$  em uma curva em torno de um ponto e a área da região englobada pela curva.

Mais precisamente, consideremos o ponto  $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ . Denote por  $B[P_0, \delta]$  um disco centrado em  $P_0$  com raio igual a  $\delta$  e seja  $C_\delta$  a fronteira de  $B[P_0, \delta]$ , orientada no sentido anti-horário.

**Teorema 64.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ . Denotando por  $B[P_0, \delta]$  um disco centrado em  $P_0$  com raio igual a  $\delta$  e por  $C_\delta$  a fronteira de  $B[P_0, \delta]$ , orientada no sentido anti-horário. Se  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo vetorial de classe  $C^1$ , tem-se:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{A. (B[P_0, \delta])} = (\nabla \times \vec{F})(P_0)$$

*Demonstração.* (esboço) Pelo **Teorema de Green**,

$$\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{B[P_0, \delta]} (\nabla \times \vec{F}) dx dy$$

Sendo  $\delta$  pequeno, temos:

$$\iint_{B[P_0, \delta]} (\nabla \times \vec{F}) dx dy \approx (\nabla \times \vec{F})(P_0) \cdot A. (B[P_0, \delta])$$

e portanto:

$$(\nabla \times \vec{F})(P_0) \approx \frac{\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{A. (B[P_0, \delta])},$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for  $\delta$ . Desta forma,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{A. (B[P_0, \delta])} = (\nabla \times \vec{F})(P_0)$$

□

A interpretação física acima nos permite calcular o rotacional mesmo em alguns pontos onde a fórmula  $(\nabla \times \vec{F})$  não pode ser usada.

**Exemplo 65.** Considere:

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Este campo corresponde, a menos de algumas constantes, ao campo magnético gerado por uma corrente elétrica percorrendo o eixo  $z$  no sentido positivo. Calculando  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ , verificamos que o rotacional de  $\vec{F}$  em qualquer ponto diferente de  $(0,0)$  é 0. Para calcular o rotacional na origem, utilizamos a fórmula descrita acima. Um cálculo direto nos fornece:

$$\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\delta \cdot \cos(t), \delta \cdot \sin(t)) \cdot (-\delta \cdot \sin(t), \delta \cdot \cos(t)) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\delta \cdot \sin(t)}{\delta^2 \cdot \cos^2(t) + \delta^2 \cdot \sin^2(t)}, \frac{\delta \cdot \cos(t)}{\delta^2 \cdot \cos^2(t) + \delta^2 \cdot \sin^2(t)} \right) \cdot (-\delta \cdot \sin(t), \delta \cdot \cos(t)) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 \cdot \sin^2(t) + \delta^2 \cdot \cos^2(t)}{\delta^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi
\end{aligned}$$

onde  $B[(0,0), \delta]$  é o círculo de raio  $\delta$  centrado na origem, orientado no sentido anti-horário. Logo:

$$(\nabla \times \vec{F})(0,0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\pi \cdot \delta^2} = \infty$$

**Exemplo 66.** Considere:

$$\begin{aligned}
\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)
\end{aligned}$$

Calculando  $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ , verificamos que o rotacional de  $\vec{F}$  em qualquer ponto diferente de  $(0,0)$  é 0. Para calcular o rotacional de  $\vec{F}$  na origem, observamos que:

$$\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde  $C_\delta$  é a circunferência de raio  $\delta$  centrada na origem. Logo,

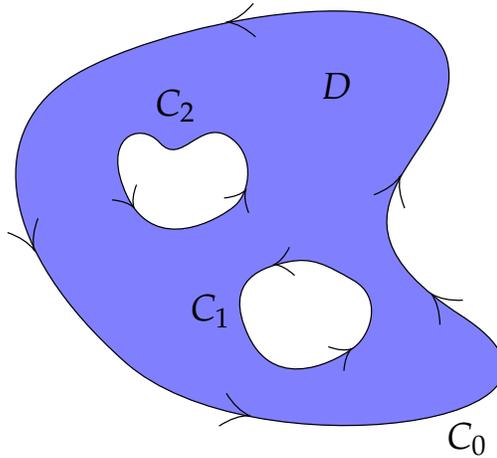
$$(\nabla \times \vec{F})(0,0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\pi \cdot \delta^2} = 0$$

## 6 Teorema de Green para Regiões Delimitadas por Mais de uma Curva

No caso da região  $D$  do plano ter como fronteira mais do que uma curva fechada, o **Teorema de Green** pode ser formulado como segue:

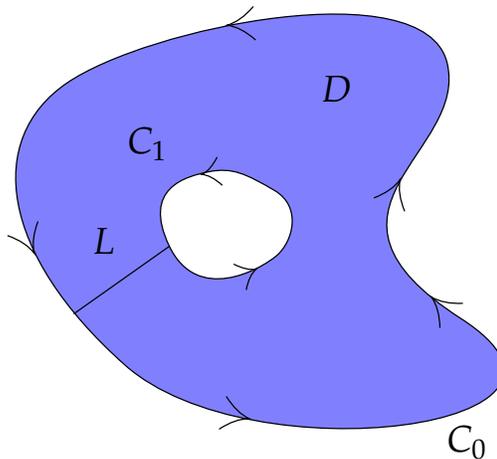
**Teorema 67.** Suponhamos que a região  $D$  seja limitada por  $n + 1$  curvas fechadas simples,  $C_0, C_1, \dots, C_n$ , de modo que  $C_1, \dots, C_n$  estejam contidas na região delimitada por  $C_0$ . Se todas as curvas estão orientadas no sentido anti-horário, então:

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) dx dy = \oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



*Demonstração.* (esboço) Para simplificar o argumento, demonstraremos este teorema no caso em que a fronteira de  $D$  é constituída por duas curvas,  $C_0$  e  $C_1$ , sendo que  $C_1$  está contida na região limitada por  $C_0$ . Seja  $L$  uma curva qualquer ligando  $C_0$  e  $C_1$ . Denotemos por  $L_+$  a curva  $L$  orientada de  $C_0$  a  $C_1$  e por  $L_-$  a curva  $L$  orientada de  $C_1$  a  $C_0$ . Então a curva  $C$ , obtida pela justaposição de  $C_0, L_+, C_1$  e  $L_-$  é uma curva fechada cujo interior é  $D \setminus L$ . Segue do **Teorema de Green** que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R \setminus \{L\}} (\nabla \times \vec{F}) dx dy$$



Como  $L$  é uma curva, temos:

$$\iint_{D \setminus L} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dx dy = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dx dy$$

Pela aditividade da integral, tem-se:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{L_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{L_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como  $\oint_{L_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{L_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , concluímos que:

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dx dy = \oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

□

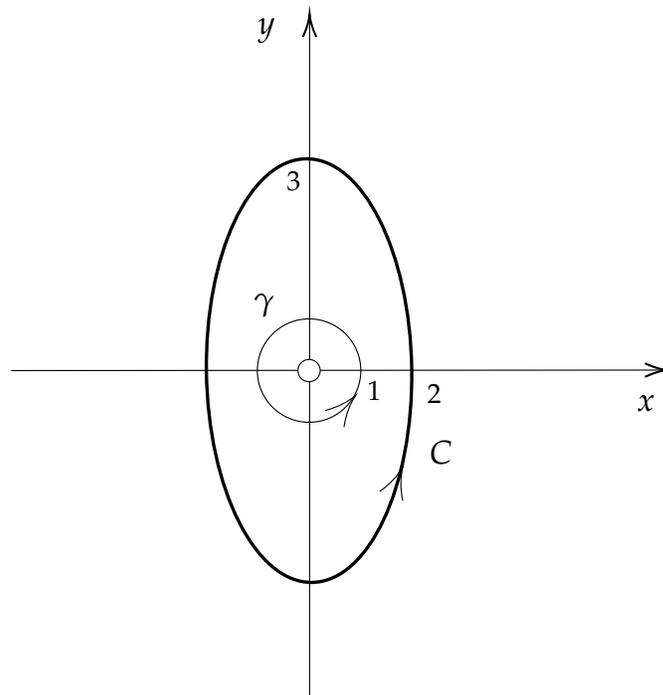
**Exemplo 68.** Calcular a integral de linha do campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2x \right) \end{aligned}$$

ao longo da curva  $C$  de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , orientada no sentido anti-horário.

**Solução:** Como o campo vetorial  $\vec{F}$  não está definido em  $(x,y) = (0,0)$ , o **Teorema de Green** não se aplica à região limitada por  $C$ , e a integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  também não é simples de ser calculada diretamente. No entanto, podemos aplicar o **Teorema de Green** à região  $D$  limitada pela curva  $C$  e pela circunferência  $\gamma$  de raio 1 centrada na origem, parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$



Como  $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2$  e  $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ , o **Teorema de Green** nos dá:

$$\int_{C \vee \gamma^-} Mdx + Ndy = \iint_D 2dxdy = 2 \times \text{área}(D) = 10\pi$$

Logo,

$$\oint_C Mdx + Ndy = 10\pi + \oint_\gamma Mdx + Ndy$$

Esta última integral é calculada diretamente, como segue:

$$\begin{aligned} \int_\gamma Mdx + Ndy &= \int_0^{2\pi} [(-\sin(t))(-\sin(t)) + (\cos(t) + 2\cos(t)) \cdot \cos(t)]dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos^2(t))dt = \left[ 2t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

Assim,

$$\oint_C Mdx + Ndy = 10\pi + 4\pi = 14\pi$$

Resumimos os resultados sobre campos conservativos abaixo:

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \{2, 3\}$ ) um aberto e  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ . Então:

- Existe  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F} = \nabla f \iff \vec{F}$  é conservativo em  $U$ ;
- $\vec{F}$  é conservativo em  $U \iff$  para todo laço  $\gamma$  (curva fechada e simples) tem-se  $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ;
- para todo laço  $\gamma$  (curva fechada e simples) tem-se  $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
- $(\nabla \times \vec{F}) = \vec{0}$  e  **$U$  é simplesmente conexo**  $\Rightarrow \vec{F}$  é conservativo;

## 7 Campos Vetoriais Conservativos no Plano

### Referências

- [1] PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.

- [2] CRAIZER, Marcos; TAVARES Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.
- [3] FINNEY, ROSS L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.
- [4] <https://academo.org/demos/vector-field-plotter/>, acessado em 29 de abril de 2022.
- [5] <https://www.desmos.com/calculator/eijhparfmd>, acessado em 29 de abril de 2022.
- [6] <http://user.mendelu.cz/marik/EquationExplorer/vectorfield.html>, acessado em 29 de abril de 2022.