

MAT2455 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

AGENDA 5

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Na **seção 1** destas notas vamos expor duas interpretações vetoriais para o **Teorema de Green** no plano, visto na aula anterior. Veremos que é possível calcular a integral de linha de um campo vetorial $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$ ao longo de qualquer curva fechada C de classe C^1 por partes por meio da integral dupla da grandeza $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ no interior da região delimitada por C . Também veremos que é possível calcular o fluxo de um campo vetorial através de uma curva fechada C por meio da integral dupla da grandeza $\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$.

Definimos e interpretamos geometricamente o que é o divergente de um campo vetorial, e usamos esta ferramenta matemática para dar uma interpretação informal das duas primeiras leis de Maxwell. Como aplicação do **Teorema de Green** em sua forma normal, apresentamos um importante resultado da dinâmica de fluidos, o **Crítério de Bendixson**, que poderá ser útil nas mais diversas engenharias.

Introduziremos, na **seção 3**, o conceito de “superfície parametrizada” e veremos como parametrizar gráficos de funções contínuas e de classe C^k , bem como superfícies de revolução. Definiremos o que entendemos por superfície parametrizada *regular*, bem como “vetor tangente” e “vetor normal” a uma tal superfície parametrizada em um ponto, sempre que possível.

Na **Seção 5** definimos a área de uma superfície parametrizada e apresentamos diversos exemplos. Na **Seção 6, subseção 6.1** passamos a abordar as “integrais de superfície de funções escalares”, e na **subseção 6.2**, as integrais de superfície de funções vetoriais.

Munidos da definição de vetor normal, introduzimos na **seção 7** o conceito de “orientabilidade” de uma superfície parametrizada – e damos um exemplo de superfície não orientável. Na **seção 8, subseção 8.1** recordamos o que entendemos pelo rotacional de um campo vetorial,

*jeancb@ime.usp.br

enunciamos e demonstramos o **Teorema de Stokes**, com o auxílio do qual calculamos diversas integrais de linha que, de outro modo, seriam muito difíceis (ou até mesmo impossíveis) de se calcular.

Apresentamos, na **seção 9** uma coletânea de resultados acerca de campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , no que diz respeito à sua conservatividade e outras características mais, com o auxílio do **Teorema de Stokes**. Na **seção 10** apresentamos uma interpretação para o rotacional de um campo vetorial em termos de circulação máxima de um campo vetorial em um ponto.

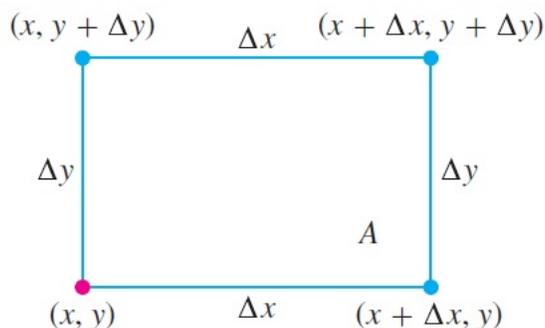
Finalizamos, na **seção 13**, apresentando o **Teorema da Divergência**, que relaciona a integral tripla do divergente de um campo vetorial suficientemente bem comportado com o fluxo deste campo pela superfície que constitui a fronteira do sólido.

1 Densidade de Fluxo em Um Ponto: Divergente

Para interpretar o **Teorema de Green** de forma física, introduziremos um novo conceito: o de densidade de fluxo de um campo vetorial em um ponto, o que denominaremos por **divergente** do campo naquele ponto. Nós o obteremos no contexto apresentado a seguir.

Suponhamos que $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$ seja o campo vetorial das velocidades de escoamento de um fluido no plano e que as derivadas parciais de primeira ordem de M e N sejam contínuas em cada ponto de uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. Sejam $(x, y) \in R$ e A um pequeno retângulo que tem (x, y) como vértice que, juntamente com seu interior, esteja inteiramente contido em R . Suponhamos, ainda, que os lados do retângulo, paralelos aos eixos coordenados, tenham comprimentos Δx e Δy . A taxa à qual o fluido deixa o retângulo através da aresta inferior é aproximadamente:

$$\vec{F}(x, y) \cdot (-\hat{j})\Delta x = (M(x, y), N(x, y)) \cdot (0, -\Delta x) = -N(x, y)\Delta x$$



Essa é a componente escalar da velocidade em (x, y) na direção do vetor normal exterior ao retângulo vezes o comprimento do segmento. Se a velocidade estiver em metros por segundo, por exemplo, a taxa de saída será em metros por segundo vezes metros ou metros quadrados por segundo. As taxas às quais o fluido atravessa os outros três lados nas direções de suas normais exteriores podem ser estimadas de maneira análoga. Assim, temos:

Taxas de Saída:

- Topo: $\vec{F}(x, y + \Delta y) \cdot \hat{j}\Delta x = N(x, y + \Delta y)\Delta x;$
- Fundo: $\vec{F}(x, y) \cdot (-\hat{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x;$
- Direita: $\vec{F}(x + \Delta x, y) \cdot \hat{i}\Delta y = M(x + \Delta x, y)\Delta y;$
- Esquerda: $\vec{F}(x, y) \cdot (-\hat{i})\Delta y = -M(x, y)\Delta y$

Combinando pares opostos, temos:

Topo e fundo: $[N(x, y + \Delta y) - N(x, y)]\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x;$

Direita e esquerda: $[M(x + \Delta x, y) - M(x, y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$

Somando ambos os lados dessas duas equações, temos:

Fluxo através de uma fronteira retangular $\approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$

Agora dividimos por $\Delta x\Delta y$, para estimar o fluxo total por unidade de área, ou seja, a densidade de fluxo para o retângulo:

$$\frac{\text{Fluxo através da fronteira retangular}}{\text{área do retângulo}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

Por fim, fazemos Δx e Δy se aproximarem de zero para definir o que chamamos de *densidade de fluxo de \vec{F} no ponto (x, y)* .

Definição 1. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$ um campo vetorial de classe $C^1(U, \mathbb{R}^2)$. O *divergente de \vec{F} em (x, y)* , denotado por $\text{div } \vec{F}$ ou por $\nabla \cdot \vec{F}$, é:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{1}$$

Intuitivamente, se estiver escoando água para uma região através de um furo pequeno no ponto (x_0, y_0) , as linhas de escoamento *divergirão* dali, e como a água escoar para *fora* de um retângulo pequeno com vértice em (x_0, y_0) , o divergente de \vec{F} em (x_0, y_0) será positivo, e teremos o que chamamos de “brotadouro” ou “fonte” do campo vetorial. Se, no entanto, a água estiver sendo *drenada* por um furo em (x_0, y_0) , o divergente será negativo, e teremos o que chamamos de “sumidouro” do campo em (x_0, y_0) .

Exemplo 2. Encontrar o divergente de $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y)\hat{i} + (xy - y^2)\hat{j}$.

Solução: Usamos a fórmula (1):

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) = 2x + x - 2y = 3x - 2y$$

1.1 Uma Interpretação Vetorial para o Teorema de Green

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região fechada e limitada do plano cuja fronteira, ∂D , é uma curva orientada no sentido anti-horário. Se ∂D é parametrizada por uma função:

$$\begin{aligned} \gamma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

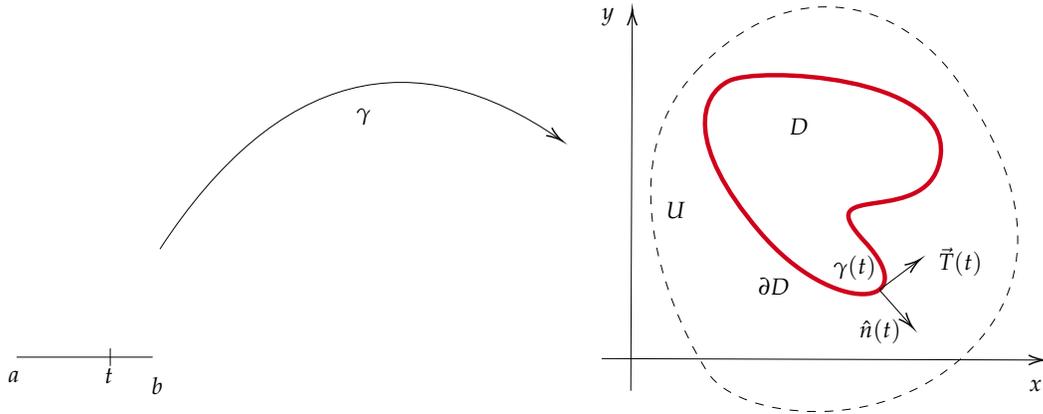
de classe \mathcal{C}^1 , cujo vetor tangente é não-nulo em cada ponto de ∂D , podemos denotar os vetores tangente e normal unitário por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

e:

$$\hat{n}(t) = \left(\frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right),$$

respectivamente.



Se $\vec{F} = (M, N)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido num subconjunto, U , aberto de \mathbb{R}^2 que contém D , então a integral de linha de \vec{F} ao longo de ∂D pode ser escrita em termos do vetor $\vec{T}(t)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Mdx + Ndy &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) d\vec{r} \end{aligned}$$

Neste caso, o **Teorema de Green** assume a forma:

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) d\vec{r}$$

Este resultado é também conhecido como **“forma tangencial do Teorema de Green”**, e é um caso particular do **Teorema de Stokes**, que veremos mais tarde.

Agora, usando o vetor normal unitário, $\hat{n}(t)$, a integral de linha do campo vetorial $\vec{G} = (-N, M)$ ao longo de ∂D é dada por:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} -Ndx + Mdy &= \int_a^b \vec{G}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \hat{n}(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\vec{r} \end{aligned}$$

Aplicando o **Teorema de Green** ao campo $\vec{G} = (-N, M)$, obtemos:

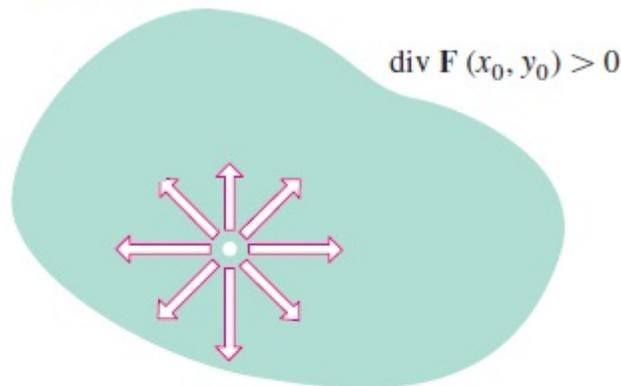
$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\vec{r}$$

que pode ser escrito em termos do divergente do campo \vec{F} como:

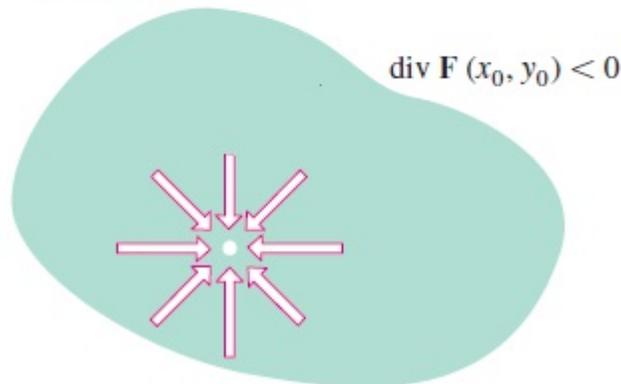
$$\iint_D \nabla \cdot \vec{F}(x, y) dx dy = \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\vec{r} \quad (2)$$

Este resultado é também conhecido como a “forma normal do Teorema de Green”, e é a versão em duas dimensões do **Teorema de Gauss**, que também veremos posteriormente.

Brotadouro



Sumidouro



Com a teoria desenvolvida até aqui, podemos interpretar as duas primeiras leis de Maxwell *no plano*, que regem o Eletromagnetismo.

A primeira destas leis é a **Lei de Gauss** (no plano):

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

onde \vec{E} é um campo elétrico no plano causado por uma distribuição de cargas cuja densidade é ρ (medida em coulombs por metro cúbico) e ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo - uma constante universal - medida em farads por metro. Coloquialmente, esta lei nos diz que a densidade de fluxo de um campo elétrico gerado por uma distribuição plana de cargas

através de qualquer retângulo (na verdade, de qualquer curva simples fechada de classe C^1 por partes) que contenha estas cargas é constante e igual a ρ/ϵ_0 .

A segunda das leis de Maxwell é a **Lei de Gauss para o Magnetismo**:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

onde \vec{B} é um campo magnético no plano. O fato de o divergente de qualquer campo magnético ser zero pode ser interpretado como a inexistência de um “monopolo magnético”, ou seja, de um ímã de um único polo. Não existe, portanto, nem brotadouro sem sumidouro nem vice-versa quando se trata de magnetismo.

2 Aplicação à Dinâmica dos Fluidos: Critério de Bendixson

Uma aplicação interessante do **Teorema de Green** à Mecânica de Fluidos é o **Critério de Bendixson**.

As **linhas de fluxo** de um escoamento laminar de um fluido no plano são as curvas lisas traçadas pelas partículas individuais do fluido. Os vetores $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$ do campo de velocidades do escoamento são os vetores tangentes das linhas de fluxo.

O critério de Bendixson nos diz que, se o escoamento ocorre em uma região plana R simplesmente conexa (ou seja, sem “furos” ou “buracos”) e $\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \nabla \cdot \vec{F}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in R$, então nenhuma das linhas de fluxo em R será fechada. Em outras palavras, nenhuma partícula percorrerá uma trajetória fechada (ciclo) em R .

Vejamos o porquê, raciocinando por redução ao absurdo: se, mantidas as hipóteses, supusermos que o escoamento tem alguma linha de fluxo fechada então concluiremos uma contradição.

Suponha, por absurdo, que $C \subset R$ seja uma curva lisa fechada que é linha de fluxo de alguma partícula do fluido, começando e terminando, portanto, em um mesmo ponto. Como a linha de fluxo C é fechada, o fluxo do campo \vec{F} através desta curva é zero (as partículas da parte interna, D , delimitada pela curva C não saem e as partículas da parte externa da curva, $R \setminus (D \cup C)$ não entram), de modo que pela forma normal do Teorema de Green, vale:

$$\iint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{(2)}{=} \oint_C (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = 0$$

Chegamos a uma contradição: como $\partial M/\partial x$ e $\partial N/\partial y$ são funções contínuas tais que $\frac{\partial M}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial N}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in R$ - e em particular, em D , tem-se ou bem

$(\forall(x, y) \in D)(\nabla \cdot \vec{F}(x, y) > 0)$ ou bem $(\forall(x, y) \in D)(\nabla \cdot \vec{F}(x, y) < 0)$. No primeiro caso, temos:

$$\iint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy > 0$$

e no segundo caso, temos:

$$\iint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy < 0$$

nenhum dos quais é consistente com a $\oint_C (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\vec{r} = 0$ (a conexão entre a integral dupla e a de linha do fluxo é estabelecida pela **forma normal do Teorema de Green**, aplicável neste contexto devido à propriedade de ser R simplesmente conexa). O absurdo vem de supormos a existência de uma trajetória fechada neste escoamento.

Considerações sobre Campos Irrotacionais

Para finalizarmos a discussão sobre a cinemática dos fluidos, consideremos um campo de velocidades **irrotacional**, ou seja, cuja componente \hat{k} do rotacional é zero. Imaginamos uma pequena rolha redonda flutuando neste fluido, com um par de eixos ortogonais desenhados em cima dela. O fluido exerce forças sobre a borda da rolha, que podemos supor proporcionais à velocidade. Como a velocidade angular local desse fluido é zero em torno de cada ponto, o torque exercido pelo fluido sobre a rolha é zero. Assim veremos os eixos sobre a rolha sempre apontando para as mesmas direções.

Assim, se considerarmos o campo de velocidades em regime estacionário (não variando com o tempo), de um fluido viscoso submetido ao efeito de um eixo vertical cilíndrico de raio $r > 0$, rodando em sentido anti-horário, cuja expressão é proporcional a:

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}$$

vemos que globalmente, cada partícula percorre uma circunferência centrada no eixo Oz , mas, como a componente \hat{k} do rotacional deste campo é zero, uma rolha bem pequena colocada no fluido com eixos desenhados em cima sempre os manterá apontando para as mesmas direções. Ou seja, **o rotacional é uma medida local, e não global de rotação de um campo.**

3 Superfícies Parametrizadas

Até agora estudamos integrais de funções escalares e vetoriais ao longo de curvas. De agora em diante veremos as integrais dessas funções sobre superfícies.

Já vimos anteriormente duas maneiras de se descrever uma superfície em \mathbb{R}^3 por fórmulas matemáticas. Uma delas é a **representação implícita**, na qual descrevemos uma superfície como sendo o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a uma equação da forma:

$$F(x, y, z) = 0$$

ou seja, a superfície é o conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Sob certas condições é possível — pelo menos localmente — expressar uma das variáveis da equação $F(x, y, z) = 0$ em termos das outras duas (por exemplo, pelo **Teorema da Função Implícita**, de $F \in \mathcal{C}^1$ for tal que $\partial F / \partial z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então existe uma bola aberta centrada em (x_0, y_0, z_0) restrita à qual a superfície é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$). Quando isto é possível *globalmente*, obtemos uma **representação explícita** da superfície dada por uma ou mais equações da forma $z = f(x, y)$. Como exemplo, considere a esfera de raio 1 centrada na origem, que tem representação implícita:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Quando a equação acima é resolvida para z em termos de x e y , obtemos duas soluções:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

A primeira destas equações dá uma representação explícita do hemisfério superior da esfera, enquanto que a segunda fornece uma representação explícita do hemisfério inferior.

O terceiro modo de se descrever uma superfície - talvez o mais útil no estudo das integrais de superfície - é a **representação paramétrica**, onde as coordenadas x, y e z dos pontos da superfície são expressas em termos de dois parâmetros. Estudaremos este tipo de representação na sequência.

3.1 Parametrização de superfícies

O conceito de superfície parametrizada será introduzido de modo análogo ao de curvas. Consideraremos o sistema de coordenadas cartesianas com os eixos coordenados Ox, Oy e Oz em \mathbb{R}^3 e consideramos uma função:

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Para cada ponto $(u, v) \in U$, $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ determina um ponto no espaço \mathbb{R}^3 . Denotamos por S o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\varphi(u, v)$, ou seja:

$$S = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U\} = \varphi[D] \subset \mathbb{R}^3$$

A fim de que possamos aplicar as técnicas do Cálculo ao estudo de superfícies, vamos exigir a diferenciabilidade (respectivamente, a propriedade de ser de classe $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$) da função φ . Deixamos mais claro o que queremos dizer com isto na seguinte:

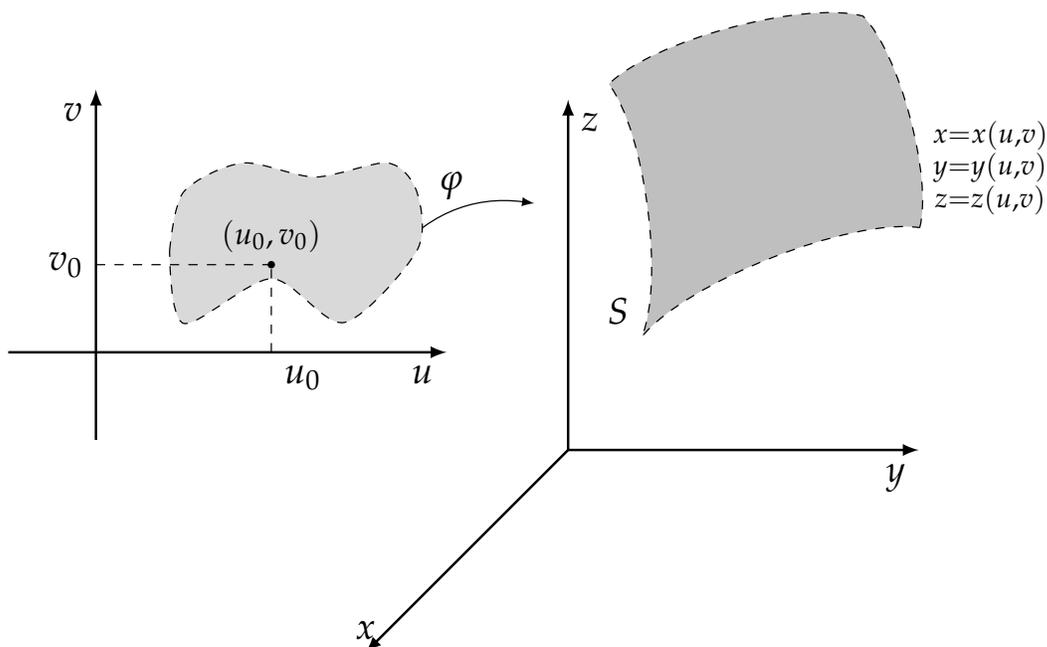
Definição 3. Consideremos uma função $\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Dizemos que ψ é **diferenciável** se $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forem todas diferenciáveis; Dizemos que ψ é de classe $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ se $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forem todas funções de classe $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$.

Estamos agora em condições de dar uma definição formal de superfície parametrizada.

Definição 4. Uma **superfície parametrizada** consiste de um par, $(S, \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$, onde $S \subset \mathbb{R}^3, D \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : D \rightarrow S$ é uma função diferenciável (resp. de classe \mathcal{C}^1) tal que:

$$S = \varphi[D] = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in D\}$$

Denotaremos a superfície parametrizada abreviadamente por (S, φ) ou mesmo por S , quando não houver risco de confusão.



Representação pictórica de uma superfície parametrizada

(3)

Definição 5. Uma superfície parametrizada $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ é **diferenciável** (respectivamente, de classe C^1, \dots, C^k) se $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ for diferenciável (resp., de classe C^1, \dots, C^k).

Definição 6. Uma superfície parametrizada $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ diferenciável é **regular em** $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$ se as colunas da matriz:

$$J\varphi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

forem linearmente independentes.

Quando uma superfície parametrizada é regular em todos os seus pontos, dizemos que se trata de uma **superfície parametrizada regular**.

Exemplo 7. Considere o hemisfério superior da esfera unitária centrada na origem:

$$\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \& (z > 0)\}$$

A fim de descrever \mathbb{H}^2 como uma superfície parametrizada, tomamos:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

e:

$$\varphi : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{array}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}$$

e para qualquer $(u_0, v_0) \in \text{Int}(D) = D$, tem-se:

$$J\varphi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} & -\frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \end{pmatrix}$$

cujas colunas são, evidentemente, linearmente independentes.

Desta forma, $(\mathbb{H}_+^2, \varphi)$ é uma superfície parametrizada regular de classe \mathcal{C}^1 .

Vamos justificar que a condição dada anteriormente garante que a superfície admite plano tangente no ponto $\varphi(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$.

Definição 8. Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a parametrização diferenciável (ou de classe \mathcal{C}^1) de uma superfície S dada, então fixado um ponto $(u_0, v_0) \in \text{int}(D)$, obtemos as curvas:

$$\varphi_{u_0} : \begin{array}{l}]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v \mapsto \varphi(u_0, v) \end{array}$$

e

$$\varphi_{v_0} : \begin{array}{l}]v_0 - \delta, v_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \varphi(u, v_0) \end{array}$$

onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno para que $]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\times]v_0 - \delta, v_0 + \delta[\subset D$.
As curvas φ_{u_0} e φ_{v_0} são chamadas **curvas coordenadas** de φ em $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in S$.

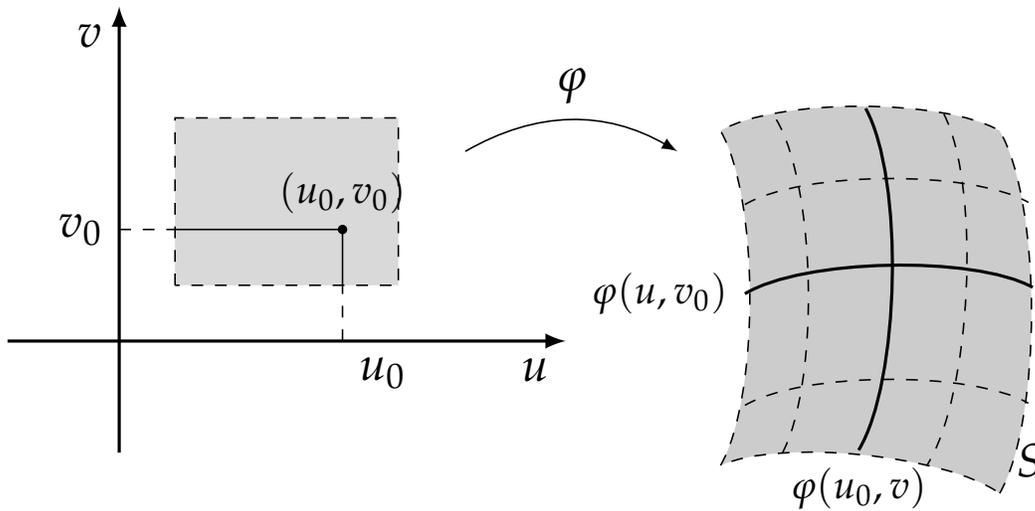
Ainda no contexto da definição acima, se o vetor:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

for não-nulo, então $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ é um vetor tangente à curva φ_{v_0} no ponto $\varphi(u_0, v_0)$. Analogamente, se o vetor:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

for não-nulo, então $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é um vetor tangente à curva φ_{u_0} no ponto $\varphi(u_0, v_0)$.



Note agora que, ao exigirmos que as colunas de $J\varphi(u_0, v_0)$ sejam linearmente independentes, estamos garantindo, na verdade, que os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ são linearmente independentes, de modo que o produto vetorial:

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

é não-nulo e perpendicular, simultaneamente, a cada um de seus “fatores”. Desta forma, $\vec{N}(u_0, v_0)$ é um vetor normal à superfície $S = \varphi[D]$ no ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

Assim, quando $J\varphi(u_0, v_0)$ tem colunas linearmente independentes, o vetor $\vec{N}(u_0, v_0)$ é não-nulo e normal ao plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ — que definiremos como o plano tangente a S em $\varphi(u_0, v_0)$.

Definição 9. Seja $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada. Supondo que $\text{pt } J\varphi(u_0, v_0) \neq 0$ e fixando $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$, o **plano tangente a S em** (x_0, y_0, z_0) é o plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$, contendo o ponto (x_0, y_0, z_0) . Desta forma, o plano tangente a S em (x_0, y_0, z_0) é o plano de equação:

$$\vec{N}(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \cdot (x - x_0) + \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \cdot (y - y_0) + \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \cdot (z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

No **Exemplo 7**, dado um ponto $(u_0, v_0) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, o plano tangente a \mathbb{H}_+^2 no ponto $\varphi(u_0, v_0) = (u_0, v_0, \sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2})$ é o plano de equação:

$$\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot (x - u_0) + \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot (y - v_0) + (z - \sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}) = 0$$

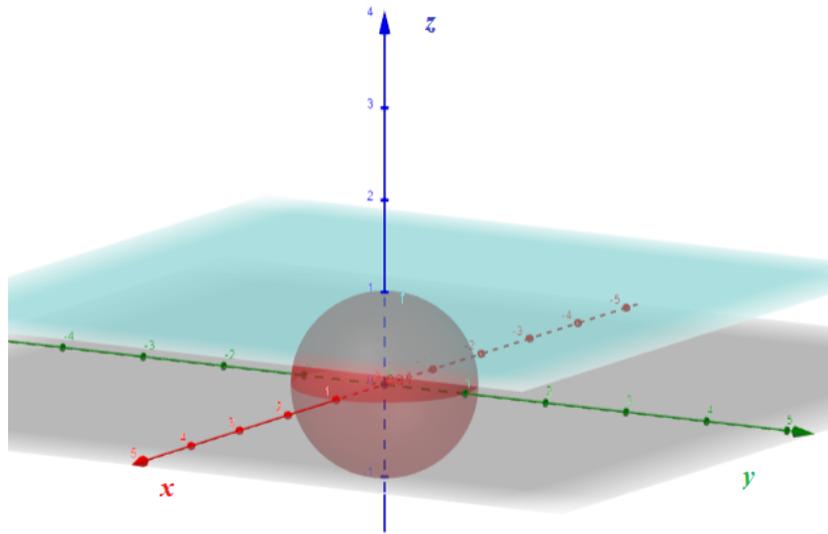
Concretamente, no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ temos o plano:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(y - \frac{1}{2} \right) + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

No ponto $(0, 0, 1)$ temos o plano tangente:

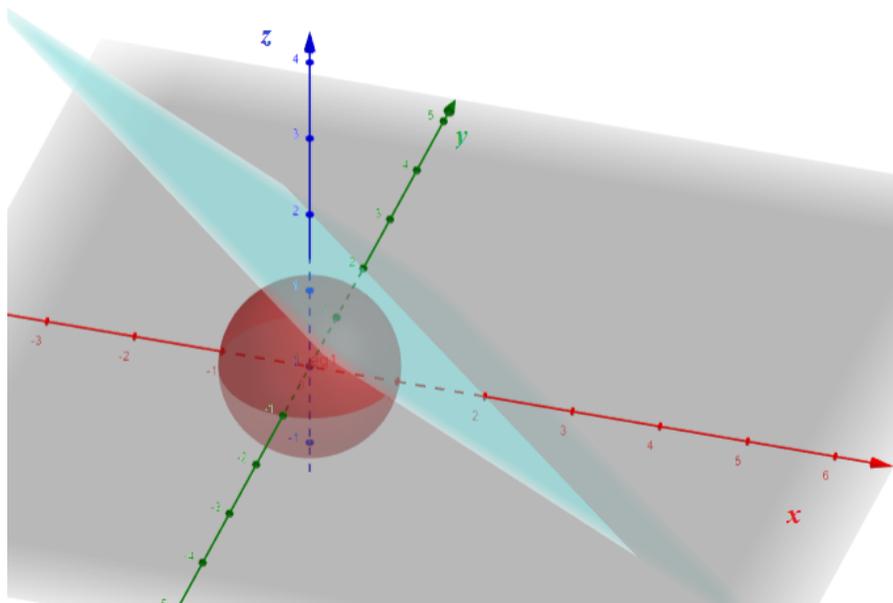
$$0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0$$

$$z = 1$$



Plano tangente ao hemisfério superior no ponto $(0, 0, 1)$

(4)



Plano tangente ao hemisfério superior no ponto $(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$

(5)

Em seguida abordaremos algumas classes de superfícies que podem se expressar como superfícies parametrizadas.

3.2 Superfícies de Revolução

Considere a superfície S , obtida girando-se uma curva C no plano Oxz em torno do eixo Oz . Se C tem equações paramétricas:

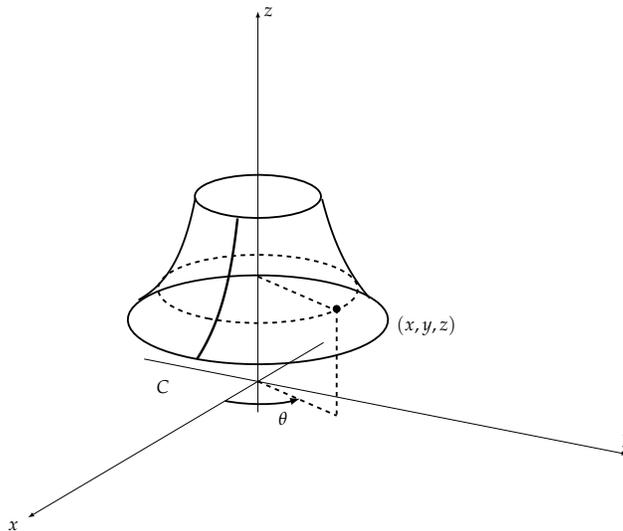
$$\begin{cases} x = x(t), t \in [a, b], \\ z = z(t), t \in [a, b] \end{cases}$$

onde $(\forall t \in [a, b])(x(t) \geq 0)$.

A superfície de revolução S assim gerada tem uma representação paramétrica $(S, \varphi : D \rightarrow S)$, onde $D = [0, 2\pi] \times [a, b]$ e:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), z(t)) \end{aligned}$$

Os parâmetros t e θ podem ser interpretados do seguinte modo: se $P = (x, y, z) \in S$, então P pertence a alguma circunferência de centro no eixo Oz e raio igual a $x(t)$ para algum t , $a \leq t \leq b$, cuja distância ao plano Oxy é $z(t)$. O parâmetro θ representa o ângulo das coordenadas polares da projeção de P no plano Oxy , conforme ilustrado a seguir:



Exemplo 10. Consideremos o toro, obtido pela revolução da circunferência de equação:

$$(x - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

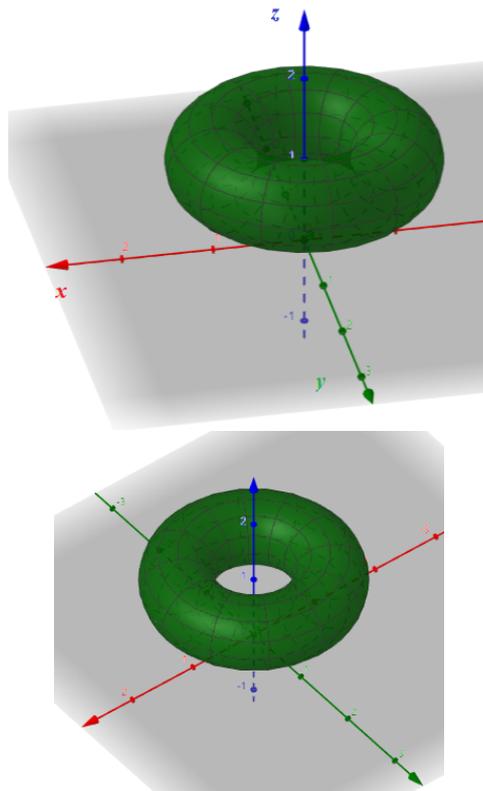
em torno do eixo Oz . Primeiramente parametrizamos a curva do plano Oxz :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t), t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

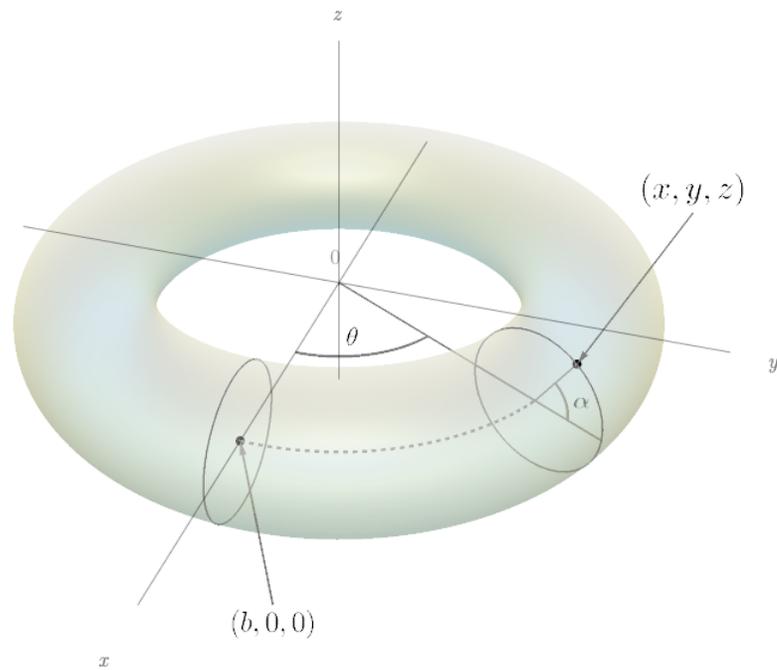
A superfície de revolução obtida ao girar esta curva em torno do eixo Oz pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cos(t)\right) \cos(\theta), \left(1 + \frac{1}{2} \cos(t)\right) \sin(\theta), 1 + \frac{1}{2} \sin(t) \right) \end{aligned}$$

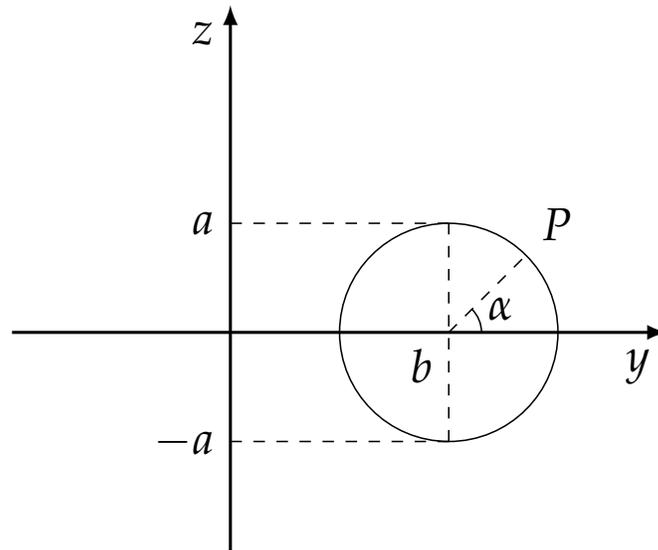
2



Exemplo 11. *Determinemos uma representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo Oz o círculo do plano Oxy com centro em $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [Sugestão: tome como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]*



Solução: Vemos que se trata de uma superfície de revolução obtida da rotação da circunferência de centro em $(b, 0)$ e raio a no plano Oyz , como ilustra a figura:



A circunferência pode ser representada parametricamente por:

$$\begin{cases} y(\alpha) = b + a \cdot \cos(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi], \\ z(\alpha) = a \cdot \sin(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Assim, como se trata de uma superfície de revolução, este toro pode ser parametrizado por:

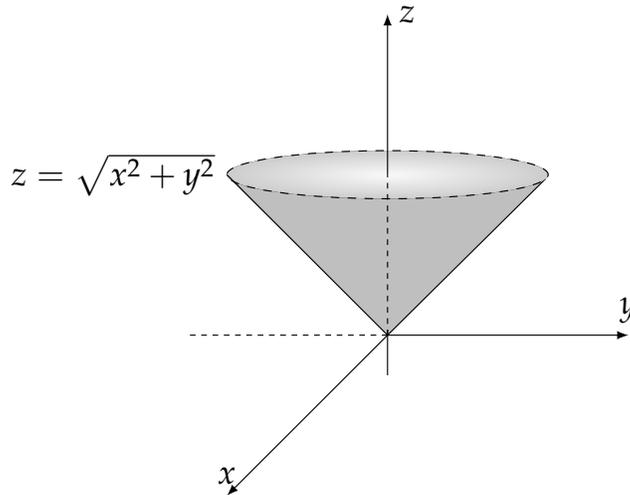
$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \theta) &\mapsto ((b + a \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\theta), (b + a \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\theta), a \cdot \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

ou seja, para cada $(\alpha, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tem-se:

$$\varphi(\alpha, \theta) = (b \cdot \cos(\theta) + a \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta), b \cdot \sin(\theta) + a \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta), a \cdot \sin(\alpha))$$

Exemplo 12. Considere a superfície S do cone $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta superfície pode ser representada parametricamente por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned}$$



De modo que $(S, \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$ é uma superfície parametrizada - que não é derivável em $(0,0,0)$. Note que S não é regular em $(0,0,0)$, pois a função coordenada z de φ , a saber $z(u, v) = \sqrt{x^2 + y^2}$, não possui derivadas parciais em $(0,0)$. Note que, em qualquer ponto da superfície S diferente de $(0,0,0)$ existe plano tangente.

Parametrizemos S usando, agora, o fato de que se trata de uma superfície de revolução, obtida ao girar a semirreta $z = x, x \geq 0$, descrita por:

$$\begin{cases} x = t, t \geq 0 \\ z = t, t \geq 0 \end{cases}$$

em torno do eixo Oz . Temos:

$$\begin{aligned} \psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta), t) \end{aligned}$$

Note que $(S, \psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty[\rightarrow S)$ tampouco é regular em $(0,0,0)$. De fato, o produto vetorial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) \times \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta, t) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -t \sin(\theta) & t \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), -t)$$

é nulo em $(0,0)$, apesar de as funções $x = x(\theta, t), y = y(\theta, t)$ e $z = z(\theta, t)$ serem de classe \mathcal{C}^1 .

Note que, no contexto do exemplo anterior:

- (S, φ) não é uma superfície parametrizada de classe \mathcal{C}^1 ;
- (S, ψ) é uma superfície parametrizada de classe \mathcal{C}^1 ;

- a superfície parametrizada (S, φ) não é regular, pois admite um ponto (a saber, $(0, 0, 0)$) no qual o vetor normal não está sequer definido;
- (S, ψ) é uma superfície parametrizada não-regular, pois admite um ponto (a saber, $(0, 0, 0)$) no qual o vetor normal é nulo;

Observações acerca de Superfícies

Algumas observações importantíssimas para considerar:

- Há que se distinguir entre o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ e a superfície parametrizada $(S, \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$. Uma superfície parametrizada consiste em *um par*, a saber, um conjunto e uma função satisfazendo certas condições (diferenciabilidade etc.), enquanto que S não é mais do que uma coleção de pontos sem nenhuma “estrutura”;
- Um mesmo conjunto S pode corresponder a duas superfícies parametrizadas diferentes, como é o caso do **Exemplo 9**. Neste, a superfície parametrizada (S, φ) não é derivável, mas a superfície (S, ψ) é mesmo de classe \mathcal{C}^1 - note, portanto, que a parametrização é, pelo menos, “metade” da informação quando se trata de superfície parametrizada;
- A regularidade de uma superfície parametrizada (S, φ) pode ser verificada testando se cada ponto de S admite um plano tangente (equivalentemente, um vetor normal não-nulo);
- No caso do conjunto S - o cone - dado no **Exemplo 9**, vimos que nenhuma das estruturas de superfície parametrizada, nem (S, φ) nem (S, ψ) , torna $(0, 0, 0)$ um ponto com vetor normal não nulo. É um fato que, se um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ admite pontos onde não se define plano tangente, então não existe nenhuma parametrização $\sigma : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ que torne a superfície parametrizada “regular”.

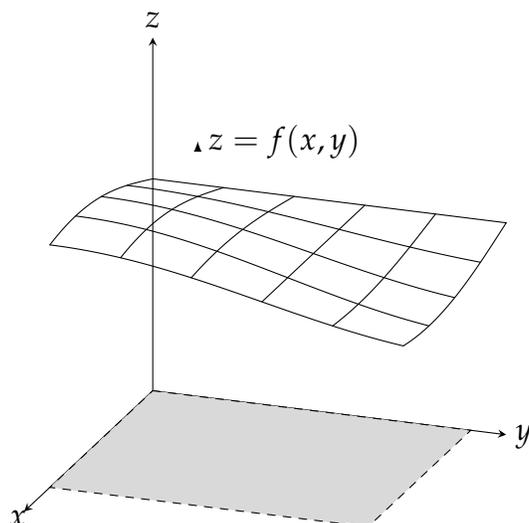
4 Gráficos de Funções *qua* Superfícies

Uma outra classe de superfícies que podem ser parametrizadas de modo bem simples é a dos gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 13. *Seja:*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$$



Uma superfície que é gráfico de uma função com domínio retangular

uma função diferenciável (de classe C^1 etc.)

O conjunto:

$$S = \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$$

pode se tornar uma superfície parametrizada utilizando-se a parametrização:

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

ou seja, $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$ e $z(u, v) = f(u, v)$.

De agora em diante, a menos que expresso em contrário, consideraremos apenas superfícies parametrizadas $(S, \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$ tais que:

- (i) $D \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e limitado (ou seja, compacto);
- (ii) $\varphi : D \rightarrow S$ é injetora, exceto, possivelmente, na fronteira de D , ou seja:

$$\varphi \upharpoonright_{\text{Int}(D)} : \text{Int}(D) \rightarrow S$$

é injetora;

- (iii) A superfície parametrizada $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ é regular, exceto num número finito de pontos.

5 Área de uma Superfície Parametrizada

Nesta seção apresentamos e deduzimos uma fórmula que nos permitirá calcular a área de uma superfície parametrizada (S, φ) .

Definição 14. *Seja $(S, \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada. A área de S é:*

$$\text{Área}(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv \quad (6)$$

onde $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$ é a norma do vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$.

Se S é decomposta como união finita de superfícies S_i , sua área é a soma das áreas das S_i .

Quando S é definida explicitamente pela equação:

$$z = f(x, y), f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

S pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

de modo que:

$$\|\vec{N}\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Logo, a fórmula (6) é escrita na forma:

$$\text{Área}(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1} dx dy \quad (7)$$

Podemos justificar a **Definição 14** analisando a integral:

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

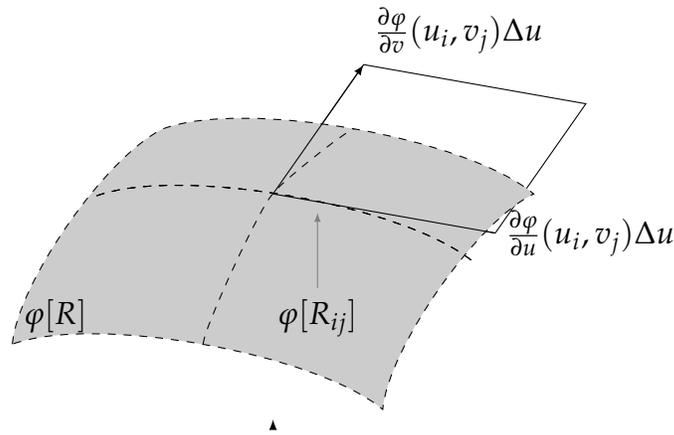
em termos de somas de Riemann.

Por simplicidade, suponhamos que D é um retângulo. Consideremos uma partição regular de ordem n de D , e seja R_{ij} o ij -ésimo retângulo da partição com vértices (u_i, v_j) , (u_{i+1}, v_j) , (u_i, v_{j+1}) e (u_{i+1}, v_{j+1}) , com $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v$ são tangentes à superfície S em $\varphi(u_i, v_j)$, onde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ e $\Delta v = v_{j+1} - v_j$. Estes vetores formam um paralelogramo P_{ij} , situado no plano tangente à superfície em (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) . Para n suficientemente grande, a área de P_{ij} aproxima a área de $\varphi[R_{ij}]$.

Como a área de um paralelogramo determinado por dois vetores v_1 e v_2 é $\|v_1 \times v_2\|$, temos que:

$$\text{Área}(P_{ij}) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \Delta v$$



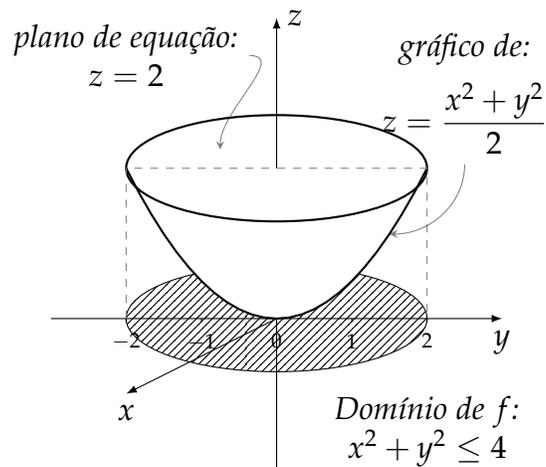
Portanto, a área da superfície é aproximada por:

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Área}(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \Delta v$$

Quando $n \rightarrow \infty$, a sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para Área (S) . Assim, é razoável definir a área de S pela fórmula (6).

Exemplo 15. Calcular a área da superfície que é o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : D((0,0), 2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$



Solução: A superfície é gráfico de uma função. Desta forma, como:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \end{cases}$$

tem-se, aplicando (42):

$$\text{Área}(S) = \iint_{D((0,0),2)} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy.$$

Tal integral se resolve mediante uma conveniente mudança de coordenadas, que neste caso é a polar

$$\begin{aligned} \varphi : \{(0,0)\} \cup]0, \infty[\times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cdot \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Seja $R = \{(r, \theta) \mid (0 \leq r \leq 2) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi)\}$, de modo que $\varphi[R] = \{(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \mid (0 \leq r \leq 2) \& (0 \leq \theta \leq 2\pi)\} = D((0,0), 2)$.

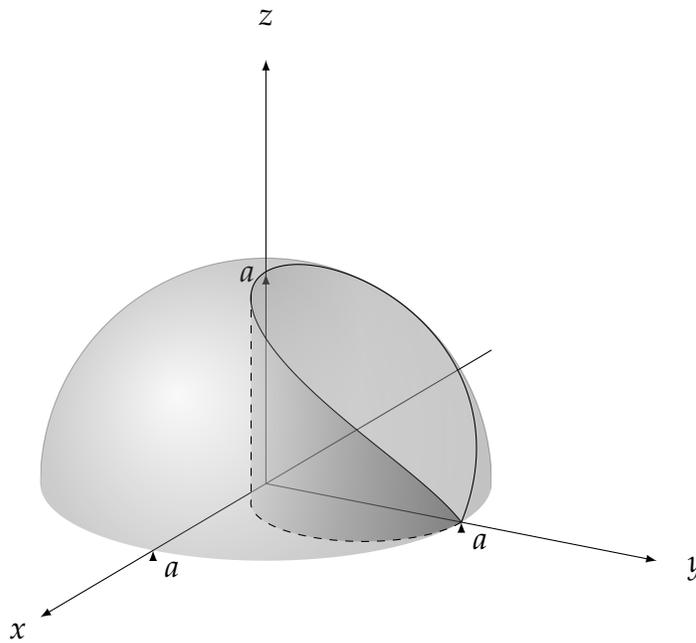
Temos, pela mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi[R]} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy &= \iint_R \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + 1} \cdot \overbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|}^{=r} dr d\theta \\ \iint_{D((0,0),2)} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{r^2 + 1} \cdot r \cdot dr \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3} \right) d\theta = 2\pi \left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \right)$$

Exemplo 16. Calcule a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ay, a > 0$.

Solução: a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada no interior do cilindro é constituída de duas partes de áreas iguais, uma no hemisfério superior (que representamos a seguir) e outra no hemisfério inferior.



Chamemos de S_1 a porção do hemisfério superior da esfera situada no interior do cilindro, cuja representação explícita é dada pelo gráfico de:

$$f \upharpoonright_D: \begin{array}{l} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ay\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{array}$$

A função $f \upharpoonright_D$ possui derivadas parciais contínuas em $D \setminus \{(0, a)\}$. Portanto, S_1 não é regular apenas no ponto $(0, a, 0)$. Como:

$$\|N(x, y)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

por (42), temos:

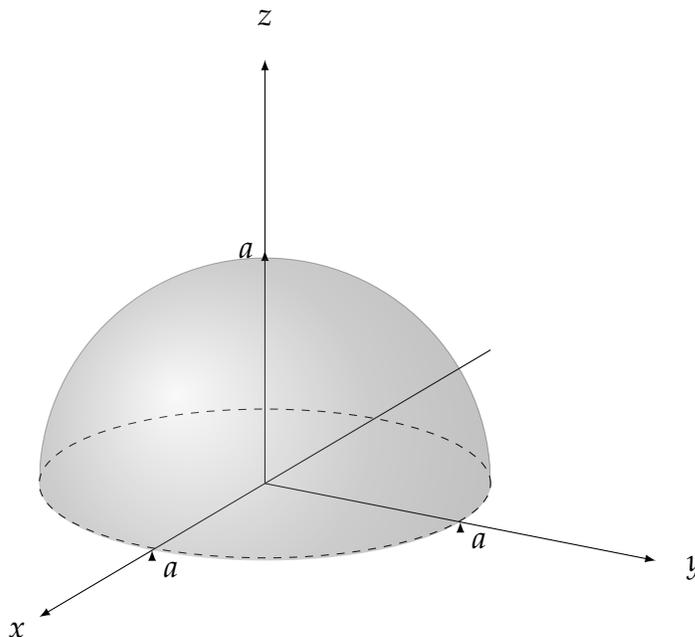
$$\text{Área}(S_1) = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Usando mudança polar na integral dupla, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Área}(S_1) &= \int_0^\pi \int_0^{a \sin(\theta)} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = a \int_0^\pi \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} d\theta = \\ &= a \int_0^\pi (-a|\cos(\theta)| + a) d\theta = a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(\theta) + 1) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\cos(\theta) + 1) d\theta \right) = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(\theta) + 1) d\theta = 2a^2 [-\sin(\theta) + \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = a^2(\pi - 2) \end{aligned}$$

Assim, $\text{Área}(S) = 2 \cdot \text{Área}(S_1) = 2a^2(\pi - 2)$.

Exemplo 17. Calcular a área de todo o hemisfério superior S da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Solução: Note que não podemos usar a representação explícita de S , visto que nesta representação S não é regular em todos os pontos do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Neste caso, convém usarmos a representação paramétrica da esfera, dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, \theta) &\mapsto (a \cos(\theta) \cos(\phi), a \cos(\theta) \sin(\phi), a \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) = (-a \cos(\theta) \sin(\phi), a \cos(\theta) \cos(\phi), 0)$$

e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) = (-a \sin(\theta) \sin(\phi), -a \sin(\theta) \cos(\phi), a \cos(\theta))$$

de modo que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) = (a^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta), a^2 \sin^2(\phi) \sin(\theta), a^2 \sin(\phi) \cos(\phi))$$

se anula se, e somente se $\phi = 0$. Desta forma, a superfície parametrizada $(S, \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \rightarrow S)$ não é regular apenas no ponto $(0, 0, a)$. Como:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) \right\| = a^2 \sin(\phi),$$

segue por (6):

$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = 2\pi a^2 [-\cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = 2\pi a^2$$

6 Integrares de Superfície

Nesta seção abordaremos as noções de integral de superfície de funções escalares e vetoriais - restringindo-nos, tacitamente, ao estudo das superfícies parametrizadas. Daremos uma interpretação física para a integral de um campo vetorial sobre uma superfície, usando o conceito de "fluxo". Apresentamos o conceito de orientabilidade e damos um exemplo de superfície não orientável. Encerramos com a apresentação do conceito de "orientação induzida" no bordo de uma superfície orientada.

6.1 Integral de Superfície de Função Escalar

Para justificar a definição que daremos da integral de superfície, consideremos o seguinte problema:

Seja S uma chapa delgada formando uma superfície no espaço, e seja $\delta(x, y, z)$ a sua densidade superficial, que suporemos contínua. Qual é a massa desta chapa?

Suponha S parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$, injetora.

Como no cálculo da área, vamos subdividir S em regiões, imagens dos retângulos do plano Ouv , de lados paralelos aos eixos.

A massa de uma das regiões S_i é dada por m_i , aproximada por $m_i \approx \delta(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$, onde ΔS_i é a área de S_i e (x_i, y_i, z_i) é um ponto qualquer de S_i (isso é uma aproximação razoável se S_i for pequeno o suficiente para que δ não varie muito).

Já vimos que:

$$\Delta S_i \approx \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u_i \Delta v_i$$

Definição 18. Sejam $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada e $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em S , a **integral de superfície de f sobre S** é:

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv \quad (8)$$

Mostraremos, posteriormente, que a equação (8) independe da parametrização escolhida para representar S .

Se S é decomposta como união finita de superfícies $S_i, i \in \{1, \dots, n\}$, então:

$$\iint_S f \cdot dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f \cdot dS$$

Quando S é definida explicitamente pela equação:

$$(\forall (x, y) \in D)(z = g(x, y))$$

Assim,

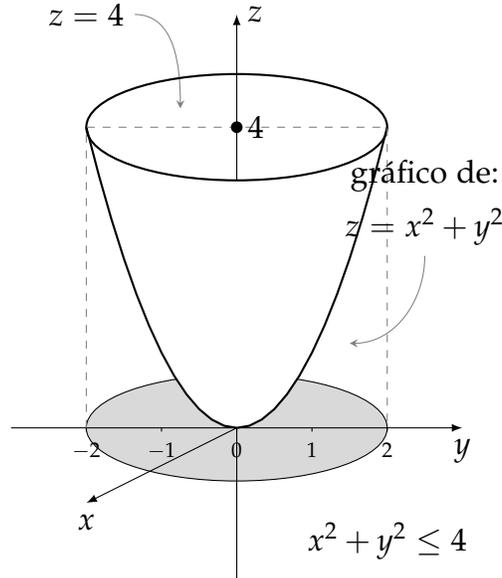
$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1} dx dy$$

Se $(\forall (x, y, z) \in S)(f(x, y, z) = 1)$, a equação (8) se reduz a:

$$\iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \text{Área}(S). \quad (9)$$

Por esta razão, o símbolo dS pode ser interpretado como um “elemento de superfície”, e a integral de superfície $\iint_S f \cdot dS$ é chamada a integral de f com respeito ao elemento de área dS , estendida sobre a superfície S .

Exemplo 19. Considere a superfície S do parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 4$. Se a densidade (massa por unidade de área) em cada ponto $(x, y, z) \in S$ é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo de simetria, calcule a massa total de S .



Solução: Como o eixo de simetria de S é o eixo Oz , a densidade em cada ponto $(x, y, z) \in S$ pode ser representada pela função:

$$\begin{aligned} \delta : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Portanto, a massa total de S é dada, usando (9), por:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) \cdot dS = \iint_S (x^2 + y^2) \cdot dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

Esta integral pode ser resolvida mediante uma mudança para coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 4] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \end{aligned}$$

de modo que:

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3 \cdot \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta$$

Por sua vez,

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3 \cdot \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{16} \left[\frac{(1 + 4r^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{r=0}^{r=2} = \frac{\pi}{60} \cdot (1 + 391\sqrt{17})$$

Exemplo 20. Calcular $\iint_S z \cdot dS$, onde S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

Solução: A superfície S é a união das superfícies S_1, S_2 e S_3 , onde S_1 é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $1 \leq z \leq 4 - x$, S_2 é o plano $z = 1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$, e S_3 é o plano $x + z = 4$ com $x^2 + y^2 \leq 1$.

Portanto,

$$\iint_S z \cdot dS = \iint_{S_1} z \cdot dS + \iint_{S_2} z \cdot dS + \iint_{S_3} z \cdot dS$$

A superfície S_1 é parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : D = [0, 2\pi] \times [1, 4 - \cos(\theta)] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, v) &\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), v) \end{aligned}$$

Temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, v) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\theta, v) = (0, 0, 1)$$

de modo que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\theta, v) = (\cos(\theta), -\sin(\theta), 0)$$

e:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\theta, v) \right\| = 1$$

Por (8),

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z \cdot dS &= \iint_D v dv d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{4-\cos(\theta)} v dv d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v=1}^{v=4-\cos(\theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (15 - 8\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta = \frac{31\pi}{2} \end{aligned}$$

Também,

$$\iint_{S_3} z \cdot dS = \iint_{S_2} dS = \text{Área}(S_2) = \pi$$

Finalmente, como S_3 é o gráfico da função $z = f(x, y) = 4 - x$, então $\|N\| = \sqrt{2}$. Assim, por (9):

$$\iint_{S_3} z \cdot dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{2}(4-x) dx dy$$

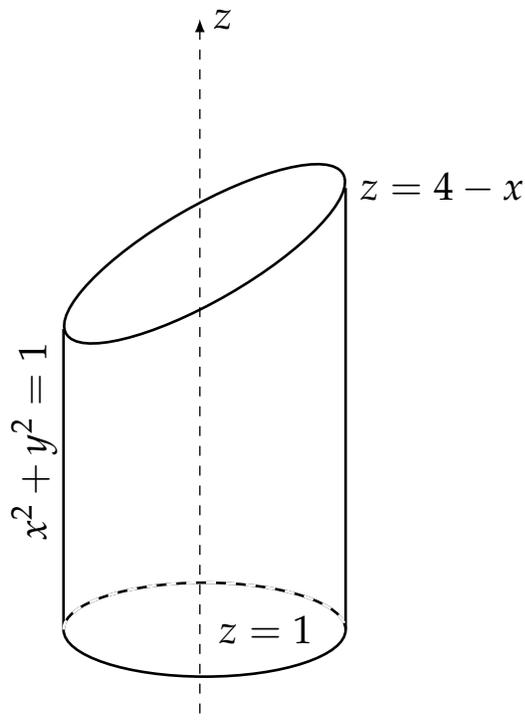
Para resolver esta última integral, podemos fazer uma mudança para variáveis polares:

$$\begin{aligned} \psi: [0, 1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2} \sqrt{2} \cdot (4-x) dx dy &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4-r \cdot \cos(\theta)) \cdot r dr d\theta = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{\cos(\theta)}{3}\right) d\theta = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Então:

$$\iint_S z \cdot dS = \frac{31\pi}{2} + \pi + 4\sqrt{2}\pi = \frac{\pi}{2}(33 + 8\sqrt{2}).$$



6.2 Integral de Superfície de Função Vetorial

Seja $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada. A esta superfície estão associados dois campos contínuos de vetores normais unitários, a saber:

$$\hat{n}_1(\varphi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}, (u, v) \in D$$

e:

$$\hat{n}_2(\varphi(u, v)) = -\hat{n}_1(\varphi(u, v)).$$

Definição 21. *Seja $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície regular parametrizada. Uma orientação para (S, φ) , $\mathcal{O}_{(S, \varphi)}$ é uma escolha de um campo vetorial normal unitário - ou seja, ou \hat{n}_1 ou \hat{n}_2 .*

Se $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial contínuo e \hat{n} um dos campos \hat{n}_1 ou \hat{n}_2 definidos anteriormente, denotamos por $\vec{F}_{\hat{n}} = \vec{F} \cdot \hat{n}$ a função escalar que a cada ponto de S associa a componente do campo \vec{F} na direção do vetor normal, \hat{n} .

Definição 22. *Sejam $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada regular e $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo. A integral de superfície de \vec{F} sobre S é:*

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot dS$$

Segue da definição de integral de superfície que:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \iint_D [\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \hat{n}(\varphi(u, v))] \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \\ &= \iint_D \left[\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) \right] dudv, \quad (10) \end{aligned}$$

se $\hat{n} = \hat{n}_1$.

Observe que esta integral muda de sinal se considerarmos $\hat{n} = \hat{n}_2$.

Quando S é dada explicitamente pela equação:

$$(\forall (x, y) \in D)(z = f(x, y))$$

temos:

$$\hat{n}_1(x, y) = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}}, \quad (x, y) \in D$$

Neste caso,

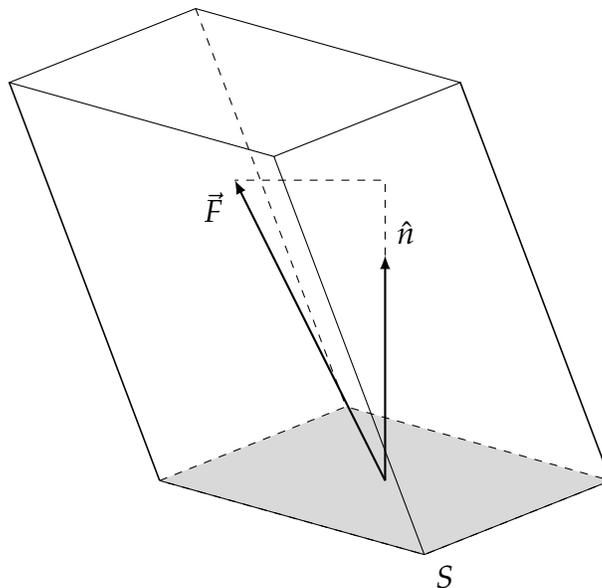
$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_D \left[\vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right) \right] dx dy \quad (11)$$

6.2.1 Uma Interpretação Física da Integral de Superfície de um Campo Vetorial

Suponhamos que um campo vetorial contínuo $\vec{F} : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa um campo de velocidades associado ao escoamento de um fluido em cada ponto da região W . O **fluxo** ou taxa de escoamento por unidade de tempo através de uma superfície S contida em W é dado pela integral de superfície de \vec{F} sobre S .

De fato, se S é plana e \vec{F} é um campo constante, então o volume do fluido que passa através de S na unidade de tempo é $(\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{Área}(S)$. Portanto o fluxo ϕ é dado por:

$$\phi = (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{Área}(S).$$



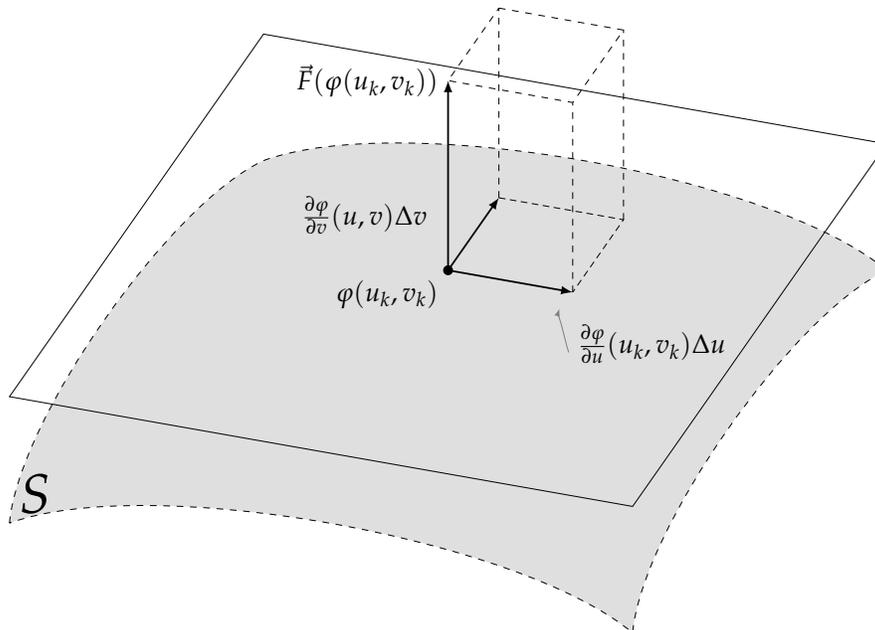
Se S é uma superfície (não plana) contida em W , a decomposmos mediante coordenadas da forma $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, e supomos que \vec{F} é constante em cada parte S_k de S assim formada. Aproximando S por paralelogramos tangentes determinados pelos vetores:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_k, v_k) \Delta u \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_k, v_k) \Delta v$$

obtemos que o fluxo através de uma parte S_k de S é, aproximadamente:

$$\phi_k \approx (\vec{F}(\varphi(u_k, v_k)) \cdot \hat{n}_k) \cdot \text{Área}(S_k) \approx \vec{F}(\varphi(u_k, v_k)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_k, v_k) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_k, v_k) \right) \Delta u \Delta v$$

Ilustramos isto na figura a seguir:



Quando $n \rightarrow \infty$, a sequência das somas:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\varphi(u_k, v_k)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_k, v_k) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_k, v_k) \right) \Delta u \Delta v$$

converge para o fluxo total de \vec{F} através de S . Logo o fluxo ϕ é dado por:

$$\phi = \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dudv = \iint_S \vec{F} \cdot dS.$$

Exemplo 23. Calcular:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

onde:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, x^2z) \end{aligned}$$

e S é a superfície do cilindro $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$, com vetor normal apontando para fora de S .

Solução: O cilindro S tem representação paramétrica:

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 2\pi] \times [0, 4] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, u) &\mapsto (1 + \cos(\theta), \sin(\theta), u) \end{aligned}$$

Um campo de vetores normais que aponta para fora de S em cada ponto é dado por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\theta, u) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0).$$

Logo, por (10),

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \\ &= \iint_S \left[(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), (1 + \cos(\theta))^2 u) \cdot \frac{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)}{1} \right] \cdot dS = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta) + 1) d\theta du = \int_0^4 2\pi du = 8\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 24. Calcule o fluxo do campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, -2z) \end{aligned}$$

através da superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$, com vetor normal apontando para fora de S .

Solução: A superfície S é dada explicitamente por:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Um campo de vetores normais que aponta para fora de S em cada ponto é dado por:

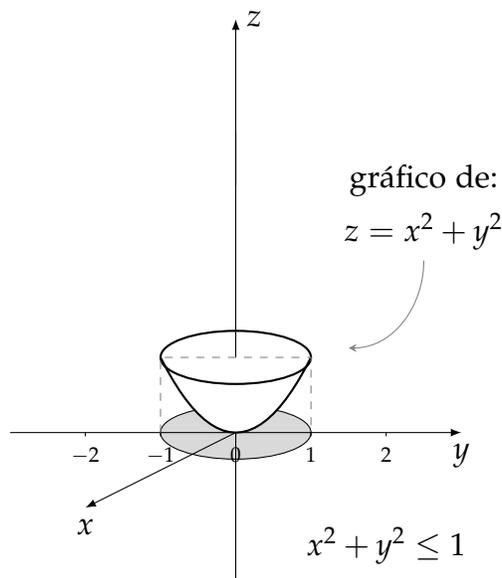
$$N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -1 \right) = (2x, 2y, -1)$$

logo, por (11),

$$\phi = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S \left[(x, y, -2x^2 - 2y^2) \cdot \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \right] dS = \iint_D 4(x^2 + y^2) dx dy$$

Fazendo uma mudança para coordenadas polares para resolver a integral dupla acima, obtemos:

$$\iint_D 4(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^3 dr d\theta = 2\pi.$$



7 Orientabilidade e Orientação de uma Superfície

Como sabemos, a *direção* da integração é importante quando no contexto de funções de uma variável real a valores reais, uma vez que:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

O mesmo ocorre com integrais de linha:

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

onde γ é uma curva em \mathbb{R}^3 . Isto nos remete ao conceito de *orientação*, respectivamente, de intervalos e de curvas, como sendo um dos sentidos nos quais se pode percorrê-los.

Nesta parte apresentamos o conceito de “orientabilidade para superfícies” - um conceito que já foi utilizado tacitamente na definição de fluxo de um campo vetorial através de uma superfície parametrizada.

Definição 25. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada de classe C^1 . A superfície S é **orientável** se, e somente se, existe um campo contínuo de vetores normais:*

$$\begin{aligned} \vec{N} : S \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \vec{N}(x, y, z) \end{aligned}$$

com $(\forall (x, y, z) \in S)(\vec{N}(x, y, z) \neq (0, 0, 0))$.

Equivalentemente, uma superfície é orientável se, e somente se, existir um campo contínuo de vetores normais unitários:

$$\begin{aligned} \hat{n} : S \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \hat{n}(x, y, z) \end{aligned}$$

com $(\forall (x, y, z) \in S)(\|\hat{n}(x, y, z)\| = 1)$.

Trabalhamos, até agora, somente com superfícies parametrizadas orientáveis. Em nossos estudos, uma condição suficiente para que uma superfície parametrizada, $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ ser orientável, é que para todo $(u, v) \in D$ tenhamos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0),$$

uma vez que este produto vetorial em (u, v) sempre é um vetor normal à superfície S no ponto $\varphi(u, v) \in S$.

A seguir enunciaremos e demonstramos um importante resultado que nos permite provar - em sua forma contrapositiva - a não-orientabilidade de superfícies.

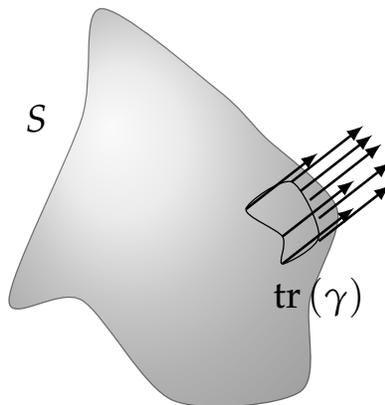
Teorema 26. *Sejam $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada de classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ um caminho contínuo e fechado em S , isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\vec{\mu} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo contínuo de vetores unitários definidos sobre $\text{tr}(\gamma) \subset S$ que são normais, em cada ponto, à superfície S (ou seja, $(\forall t \in [a, b])(\vec{\mu}(t) \perp_{\gamma(t)} S)$). Se (S, φ) é orientável, então $\vec{\mu}(a) = \vec{\mu}(b)$.*

Demonstração. Seja $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo contínuo de vetores normais sobre S , que existe em virtude da orientabilidade de S . A função:

$$\begin{aligned} \hat{n} \circ \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \hat{n}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

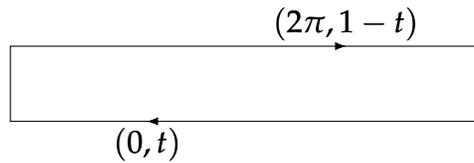
é contínua (pois é composição de funções contínuas). Sendo assim, para qualquer $t \in [a, b]$, $\langle \hat{n} \circ \gamma(t), \vec{\mu}(t) \rangle = \pm 1$, uma vez que tanto $\hat{n} \circ \gamma(t)$ quanto $\vec{\mu}(t)$ são normais à superfície. Note que a função $t \mapsto \langle \hat{n} \circ \gamma(t), \vec{\mu}(t) \rangle$ não muda de sinal em $[a, b]$, uma vez que, por ser contínua, para trocar de sinal deveria se anular em algum ponto de $[a, b]$, o que não é o caso. Desta forma, a função $t \mapsto \langle \hat{n} \circ \gamma(t), \vec{\mu}(t) \rangle$ é constante em $[a, b]$. Em particular, $\langle \hat{n} \circ \gamma(a), \vec{\mu}(a) \rangle = \langle \hat{n} \circ \gamma(b), \vec{\mu}(b) \rangle$. Como, por hipótese, $\gamma(a) = \gamma(b)$, tem-se $\hat{n} \circ \gamma(a) = \hat{n} \circ \gamma(b)$, de modo que $\vec{\mu}(a) = \vec{\mu}(b)$. \square

Observação 27. *O resultado acima, em sua forma contrapositiva, nos diz que se existir algum caminho fechado $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ e um campo vetorial contínuo $\vec{\mu} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores unitários normais à superfície ao longo de $\text{tr}(\gamma)$ com $\vec{\mu}(a) \neq \vec{\mu}(b)$, então S não é orientável.*



7.1 Exemplo de Superfície Não-Orientável

A *faixa de Moebius* é a superfície obtida do retângulo $[0, 2\pi] \times]0, 1[$ pela identificação dos pontos $(0, t)$ e $(2\pi, 1 - t)$, conforme t percorre o intervalo $]0, 1[$.

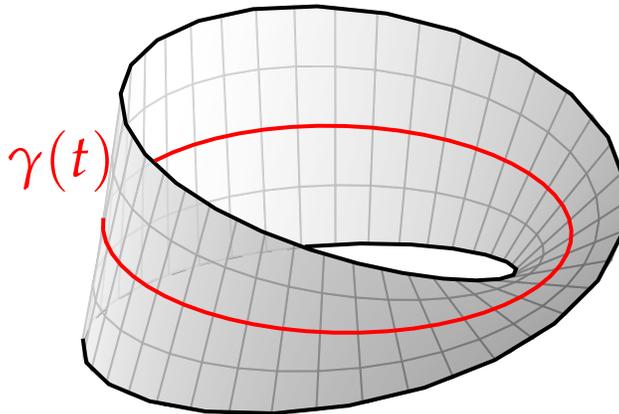


Como superfície em \mathbb{R}^3 , a faixa de Moebius é obtida pela rotação de um segmento de reta aberto, de comprimento 1, cujo centro se apoia num círculo de raio 1. Enquanto o centro do segmento desliza sobre o círculo, o segmento realiza uma rotação de 180° até o final da primeira volta. Uma descrição mais precisa é dada pela aplicação de classe C^∞ :

$$\begin{aligned} \varphi :]0, 1[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \gamma(t) + \left(s - \frac{1}{2}\right) \delta(t) \end{aligned}$$

sendo $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ e $\delta(t) = \cos(t/2) \cdot \gamma(t) + \sin(t/2) \cdot \hat{k}$.

A imagem de φ é a faixa de Moebius, que representamos a seguir, em que a linha vermelha representa o traço da curva γ , a “alma” da faixa:



Vamos constatar que a superfície acima não é, de fato, orientável. Faremos isto exibindo uma curva fechada γ e um campo contínuo de vetores normais, $\vec{\mu}$ sobre esta curva nos termos da **Observação 27**.

Observe que $\gamma(t)$, a “alma” da faixa de Moebius, pode ser parametrizada em termos de φ por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi\left(\frac{1}{2}, t\right) \end{aligned}$$

Considere o campo de vetores normais (por construção) à faixa ao longo da curva $\gamma(t)$ (a “alma” da faixa):

$$\begin{aligned} \vec{\mu} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1/2, t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1/2, t) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{\mu}(t) = \left(-\cos(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right), -\sin(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

Como φ é de classe C^1 (na verdade, é de classe C^∞), tem-se que μ é um campo contínuo de vetores normais à faixa tais que para todo $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \|\vec{\mu}(t)\| &= \sqrt{\left(-\cos(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \left(-\sin(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Note que, em se tratando de campos de vetores normais unitários sobre a faixa de Moebius, esses sempre conterão, forçosamente, o campo $\vec{\mu}$. A fim de provar a não-orientabilidade desta superfície, basta mostrarmos que o campo $\vec{\mu}$ não é , de modo que nenhum campo de vetores normais unitários sobre a faixa será contínuo.

Agora, no mesmo ponto $(1, 0, 0) = \gamma(0) = \gamma(2\pi)$ temos:

$$\vec{\mu}(0) = (0, 0, 1)$$

e:

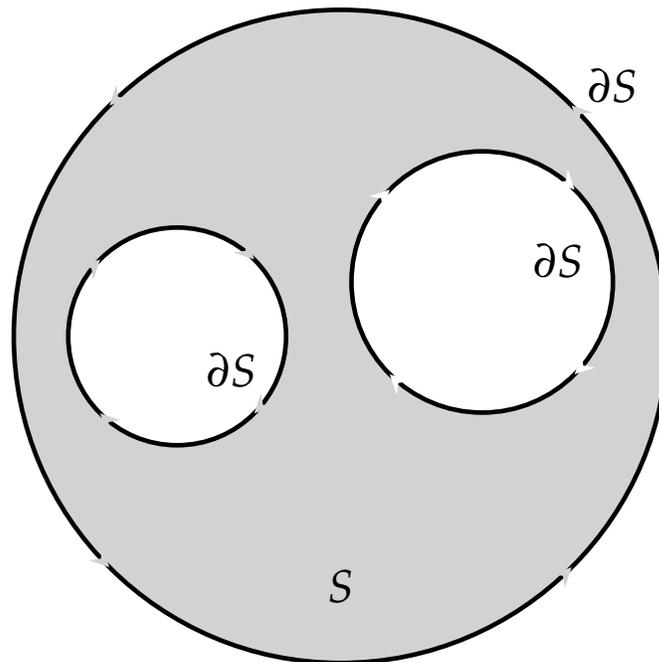
$$\vec{\mu}(2\pi) = (0, 0, -1)$$

Em virtude da **Observação 27**, segue que a faixa de Moebius não é orientável.

7.2 Orientação Induzida no Bordo

Consideremos uma superfície lisa e orientada S por um campo contínuo de vetores normais unitários, \hat{n} . Seja ∂S o bordo desta superfície. Neste contexto, o bordo ∂S tem a *orientação induzida de S* se, ao caminhar ao longo de ∂S com a cabeça no sentido do vetor normal, mantivermos S sempre à nossa esquerda.

Na figura a seguir tem-se uma superfície S , hachurada em cinza, cujo bordo, ∂S , consiste de três circunferências. Tomando S orientada por um campo de vetores normais unitários apontando para fora do papel, na direção do leitor, obtemos a orientação induzida no bordo como se segue:



8 O Teorema de Stokes

Uma extensão importante do **Teorema de Green** é o **Teorema de Stokes**, que relaciona a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 com a integral sobre uma superfície S tal que $\partial S = C$, ou seja, da qual S é fronteira (bordo).

Antes de provar o **Teorema de Stokes** é necessário introduzir alguns conceitos.

8.1 O Rotacional de Um Campo Vetorial

Consideremos um campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

com derivadas parciais definidas no subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. O **campo vetorial rotacional** de \vec{F} , denotado por $\nabla \times \vec{F}$ ou $\text{rot } \vec{F}$ é o campo com domínio U dado, em cada $(x, y, z) \in U$, por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}(x, y, z) &= \text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial N}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial M}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial N}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y, z) \right) \quad (12) \end{aligned}$$

A equação (12) pode ser lembrada mais facilmente se a reescrevermos usando a notação de “operador”. Introduzamos formalmente o símbolo ∇ (“nabla”):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial z'} \right).$$

para denotarmos o operador que aplicado a uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ nos dá o gradiente de f , ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial z'} \right).$$

Denotemos por $\nabla \times$ o operador que aplicado a um campo vetorial $\vec{F} = (M, N, P)$ nos dá o produto vetorial formal de ∇ por \vec{F} , ou seja,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Portanto, $\nabla \times \vec{F}$ é o campo vetorial que já denotamos acima.

Exemplo 28. Calcular o rotacional do campo vetorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) = (xz, xy, 3xz)$$

ou seja, $M(x, y, z) = xz, N(x, y, z) = xy$ e $P(x, y, z) = 3xz$.

Solução:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{F})(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(3xz)}{\partial y} - \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial z} - \frac{\partial(3xz)}{\partial x} \right) \hat{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right) \hat{k} = (x - 3z)\hat{j} + y\hat{k} = (0, x - 3z, y) = (0, x - 3y, y). \end{aligned}$$

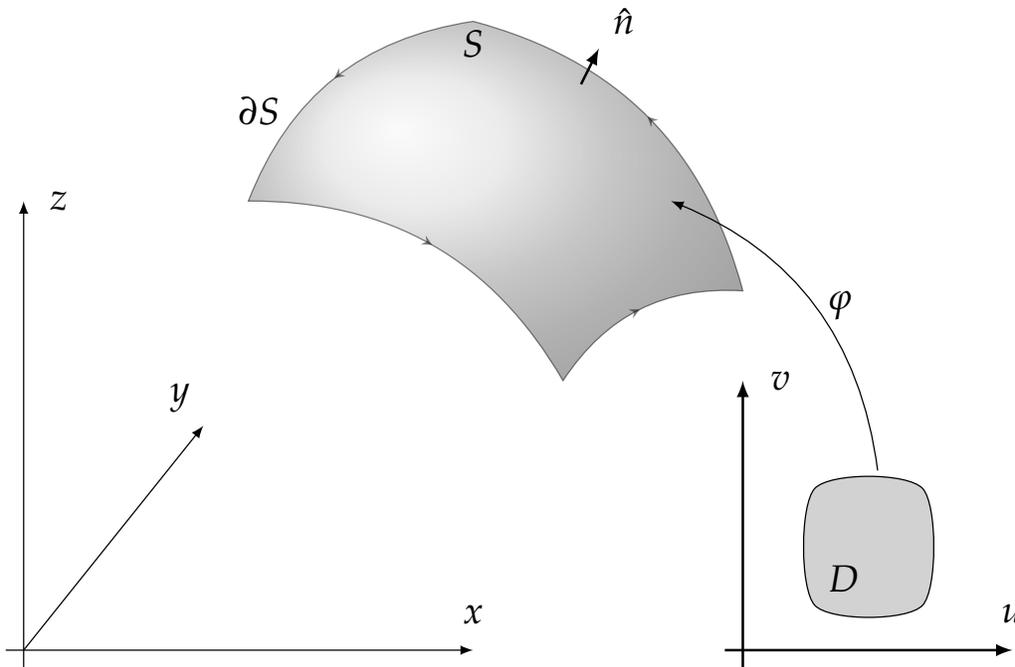
8.2 O Teorema

O teorema de Stokes estabelece uma relação entre uma integral de superfície com uma integral em torno da curva dada pela fronteira da superfície de integração. Ele nos diz que, sob condições normalmente encontradas na prática, a circulação de um campo vetorial ao longo da borda de uma superfície orientada no espaço, no sentido anti-horário, em relação

ao campo \hat{n} de vetores normais à superfície é igual à integral da componente normal do rotacional do campo sobre a superfície.

Teorema 29 (Teorema de Stokes). *Sejam $(S, \varphi : D \rightarrow S)$ uma superfície parametrizada e orientada, onde D é uma região fechada do plano Ouv , limitada por uma curva de classe C^1 por partes e φ é de classe C^2 em algum aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo D . Se $\vec{F} = (M, N, P)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido num subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 que contém S , cujo bordo ∂S tem a orientação induzida da de S , então:*

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (13)$$



Demonstração. Consideremos a superfície parametrizada (S, φ) orientada pelo campo de vetores normais unitários:

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

onde¹:

¹Recorde que $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Por definição de integral de superfície sobre superfície parametrizada, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv \end{aligned}$$

onde o integrando desta integral dupla é calculado em $\varphi(u, v)$.

Para completar a demonstração, basta verificar que:

$$\oint_{\partial S} M dx = \iint_D \left[\frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv, \quad (14)$$

$$\oint_{\partial S} N dx = \iint_D \left[\frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv, \quad (15)$$

e:

$$\oint_{\partial S} P dx = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right] dudv, \quad (16)$$

pois somando estas três equações obtemos a equação (13) do **Teorema de Stokes**. Como as três equações são análogas, provaremos apenas (14).

Suponhamos que a fronteira de D seja parametrizada por:

$$\begin{aligned} h: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

orientada de modo que $\varphi \circ h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma parametrização do bordo, ∂S de S orientado positivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} M dx &= \int_a^b \left[M(\varphi(h(t))) \cdot \frac{d}{dt}(x(h(t))) \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[M(\varphi(h(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u}(h(t))u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(h(t))v'(t) \right) \right] dt = \\ &= \oint_{\partial D} M(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)dv \right) = \\ &= \oint_{\partial D} M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)du + M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)dv. \end{aligned}$$

Como φ é, por hipótese, de classe \mathcal{C}^2 , podemos aplicar o **Teorema de Green** a esta última integral (que está definida sobre uma região plana), obtendo:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} M dx &= \oint_{\partial D} M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(M(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right) \right] dudv \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} \left((M \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((M \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial(M \circ \varphi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + (M \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial(M \circ \varphi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - (M \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial(M \circ \varphi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial(M \circ \varphi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} = \\ &= -\frac{\partial M}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial M}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = -\frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_{\partial S} M dx = \iint_D \left[\frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv,$$

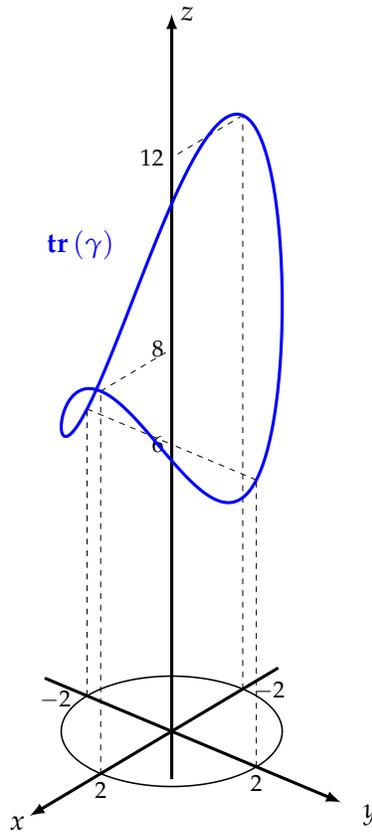
o que prova (14). □

Exemplo 30. Consideremos a curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (2 \cos(t), 2 \sin(t), 10 - 2 \cos(t) - 4 \sin^2(t)) \end{aligned}$$

e calculemos a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\gamma} (z + y^2) dx + (y^2 + 1) dy + [\ln(z^2 + 1) + y] dz$$



Solução: γ é o bordo da superfície S , parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 10 - u - v^2). \end{aligned}$$

Também,

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + y^2 & y^2 + 1 & \ln(z^2 + 1) + y \end{vmatrix} = (1, 1, -2y)$$

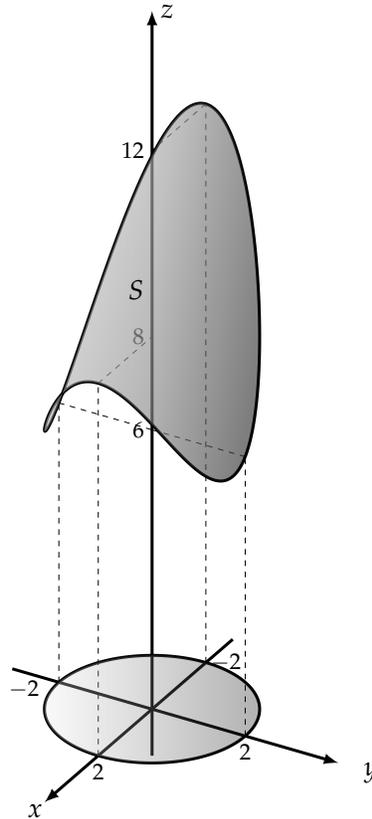
e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -2v) = (1, 2v, 1).$$

Sendo assim, pelo **Teorema de Stokes**, tem-se:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (z + y^2)dx + (y^2 + 1)dy + [\ln(z^2 + 1) + y]dz &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}dS = \\ &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}(u, v, 10 - u - v^2)) \cdot (1, 2v, 1)dudv = \iint_S (1, 1, -2v) \cdot (1, 2v, 1)dudv = \end{aligned}$$

$$= \iint_S dudv = 4\pi.$$



Exemplo 31. Consideremos a curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), \sin(2t)), \end{aligned}$$

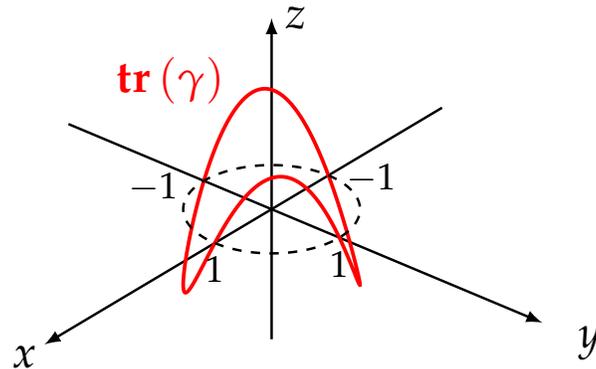
e o campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (y + \sin(x), z^2 + \cos(y), x^3), \end{aligned}$$

Vamos calcular:

$$\oint_{\gamma} (y + \sin(x))dx + (z^2 + \cos(y))dy + x^3 dz.$$

Solução: A curva em apreço tem o seguinte aspecto:

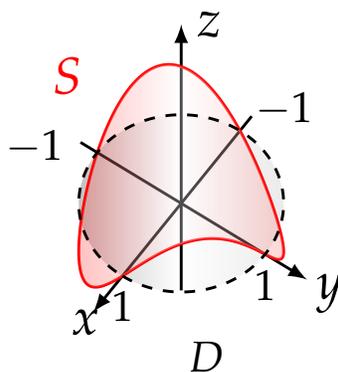


Decompomos o campo vetorial como a soma dos campos $\vec{F}_1(x, y, z) = (y, z^2, x^3)$ e $\vec{F}_2(x, y, z) = (\sin(x), \cos(y), 0)$, ou seja $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Da **linearidade da Integral de Linha** seguirá que:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

Vamos denotar a superfície delimitada por γ por S . Uma parametrização para esta superfície é:

$$\varphi : D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (u, v, 2uv).$$



(a heurística aqui foi fazer $u = \cos(t), v = \sin(t)$ e observar que $\sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t) = 2uv$). Agora podemos aplicar o **Teorema de Stokes** a cada um dos campos, separadamente, de modo que:

$$\oint_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}_1) \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}_2) \cdot \hat{n} dS$$

Vemos que:

$$\nabla \times \vec{F}_1(x, y, z) = (-2z, -3x^2, -1)$$

e que:

$$\nabla \times \vec{F}_2(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

e portanto $\oint_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = 0$. Basta calcularmos, portanto,

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}_1) \cdot \hat{n} dS = \iint_D (-2uv, -3u^2, -1) \cdot \hat{n} dS.$$

Um campo de vetores normais a S é obtido tomando-se, para cada $(u, v) \in D$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 0, 2v) \times (0, 1, 2u) = (-2v, -2u, 1),$$

e assim:

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \vec{F}_1) \cdot \hat{n} dS &= \iint_D (-2uv, -3u^2, -1) \cdot (-2v, -2u, 1) dudv = \iint_D (4uv^2 + 6u^3 - 1) dudv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 6 \sin^3(\theta) - 1) \cdot r dr d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

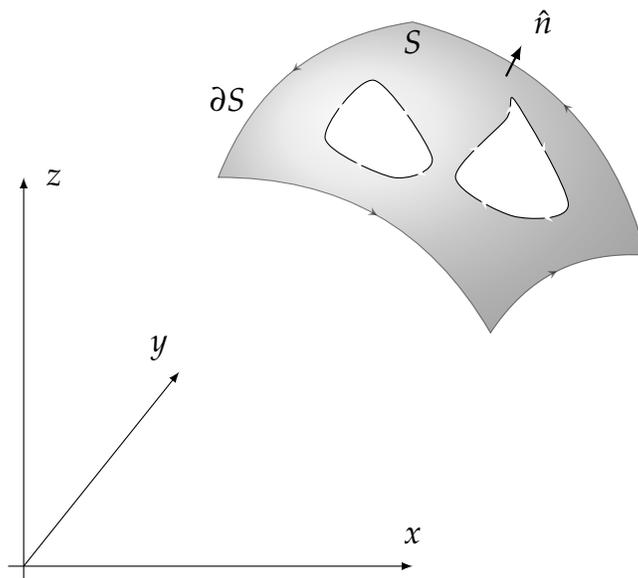
Assim,

$$\oint_{\gamma} (y + \sin(x)) dx + (z^2 + \cos(y)) dy + x^3 dz = \iint_S (\nabla \times \vec{F}_1) \cdot \hat{n} dS = -\pi.$$

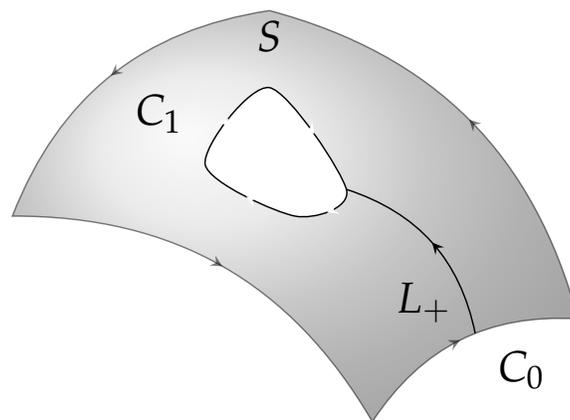
O teorema acima vale para superfícies delimitadas por uma curva de classe \mathcal{C}^1 por partes. Se a superfície tem um bordo que consiste de várias curvas de classe \mathcal{C}^1 por partes, temos a seguinte extensão do teorema:

Teorema 32. *Sejam (S, φ) uma superfície parametrizada e orientada, limitada por $n + 1$ curvas fechadas simples de classe \mathcal{C}^1 , C_0, C_1, \dots, C_n . Se $\vec{F} = (M, N, P)$ é um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 definido num subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 que contém S , cujo bordo $\partial S = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ tem a orientação induzida da de S , então:*

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \sum_{i=0}^n \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Demonstração. Mostraremos o teorema no caso em que a fronteira de S é constituída por duas curvas, C_0 e C_1 . O caso geral segue por indução.



Seja L uma curva qualquer ligando C_0 e C_1 . Denotemos por L_+ a curva L orientada de C_0 a C_1 e por L_- a curva L orientada de C_1 a C_0 .

A curva C , obtida pela justaposição de C_0, L_+, C_1 e L_- é uma curva fechada cujo interior é $S \setminus L$. Segue do **Teorema 32** que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S \setminus L} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS.$$

Como L é uma curva (e portanto tem medida nula), temos que:

$$\iint_{S \setminus L} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS.$$

Também, pela aditividade da integral de linha:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{L_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{L_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $\oint_{L_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{L_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, concluímos que:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=0}^1 \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

□

Observação 33. No caso particular em que S é uma região no plano Oxy e $\hat{n} = (0, 0, 1)$, a fórmula (13) fornece:

$$\oint_{\partial S} Mdx + Ndy = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Isto prova que o **Teorema de Stokes** é uma extensão do **Teorema de Green**.

Observação 34. Se S_1 e S_2 são duas superfícies orientadas com a mesma fronteira orientada sendo a curva $C = \partial S_1 = \partial S_2$ e $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial satisfazendo as hipóteses do **Teorema de Stokes**, então:

$$\iint_{S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

Este fato é útil quando for difícil integrar $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$ sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

9 Campos conservativos no espaço

Analogamente ao que fizemos para campos vetoriais no plano, caracterizaremos campos conservativos no espaço mediante o seguinte:

Teorema 35. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 exceto, possivelmente, em um número finito de pontos. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, qualquer que seja a curva fechada C , de classe C^1 por partes;
- (ii) Para quaisquer pontos A e B em \mathbb{R}^3 , $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe da curva de classe C^1 por partes que os liga;
- (iii) \vec{F} é campo gradiente de alguma função f , isto é, $\nabla f = \vec{F}$;
- (iv) $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

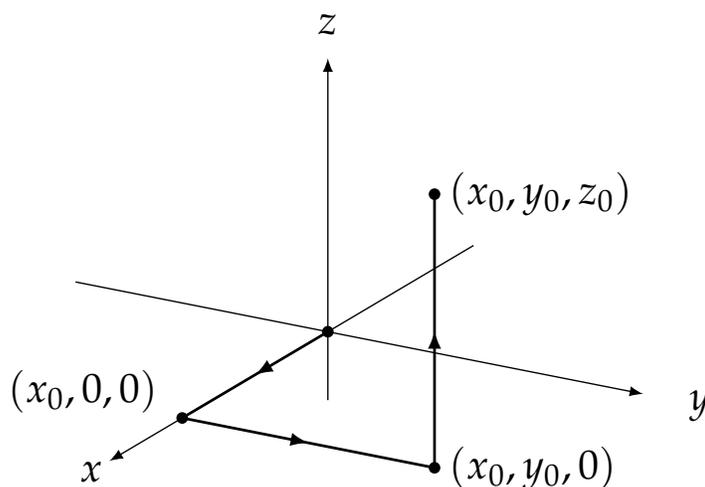
Demonstração. A demonstração de que (i) implica (ii) é análoga à do **Teorema 2** da AULA 12 (**Propriedade do Laço**), de modo que a omitiremos, deixando-a a seu cargo adaptá-la para o presente caso.

Ad (ii) \Rightarrow (iii): seja C uma curva de classe C^1 por partes ligando $(0,0,0)$ a (x_0, y_0, z_0) (se \vec{F} não é de classe C^1 em $(0,0,0)$, o substituímos por um ponto onde \vec{F} seja de classe C^1). Admitindo, como hipótese, (ii), podemos definir:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Escolhendo C como na figura abaixo, temos:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \int_0^{x_0} M(t, 0, 0) dt + \int_0^{y_0} N(x_0, t, 0) dt + \int_0^{z_0} P(x_0, y_0, t) dt$$



onde $\vec{F} = (M, N, P)$.

Segue imediatamente que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0)$. Podemos mostrar, usando a poligonal C acima, que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = M(x_0, y_0, z_0)$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = N(x_0, y_0, z_0)$. Portanto, $\nabla f = \vec{F}$.

Mostremos agora que (iii) \Rightarrow (iv).

Se $\vec{F} = \nabla f$, então $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $P = \frac{\partial f}{\partial z}$. Como \vec{F} é de classe \mathcal{C}^1 , exceto possivelmente, num número finito de pontos, então f é de classe \mathcal{C}^2 exceto, possivelmente, num número finito de pontos. Pela definição do rotacional, temos:

$$(\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

Como f é de classe \mathcal{C}^2 , segue do **Teorema de Schwarz** que $(\nabla \times \vec{F}) = \vec{0}$.

Ad (iv) \Rightarrow (i): seja C uma curva fechada e S uma superfície cujo bordo seja C , escolhida de modo que o campo \vec{F} seja de classe \mathcal{C}^1 em todos os pontos de S . Aplicando a equação (13), temos:

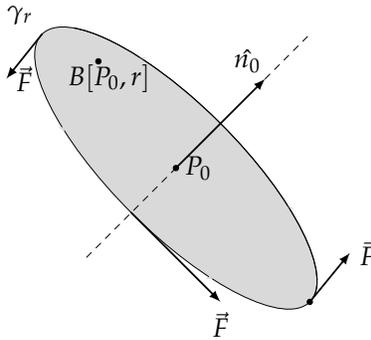
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) dS = 0,$$

pois, por hipótese, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. □

10 Interpretação Vetorial do Rotacional

Usando o **Teorema de Stokes**, podemos deduzir uma interpretação para o campo vetorial $\nabla \times \vec{F}$, que nos dá alguma informação acerca do próprio campo \vec{F} .

Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $P_0 \in U$ e $B[P_0, r]$ uma bola fechada de raio r e centro em P_0 situada no plano perpendicular a \hat{n}_0 , como indicado na figura a seguir:



Aplicando o **Teorema de Stokes** a \vec{F} sobre $B[P_0, r]$ e seu bordo, γ_r , obtemos:

$$\oint_{\gamma_r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{B[P_0, r]} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS.$$

O valor da integral de linha é denominado *circulação* de \vec{F} ao longo de γ_r , e mede a intensidade do campo tangencial a γ_r . Assim, para r pequeno, a circulação ao longo de γ_r mede a intensidade com que o campo \vec{F} perto de P_0 gira em torno do eixo determinado por \hat{n}_0 .

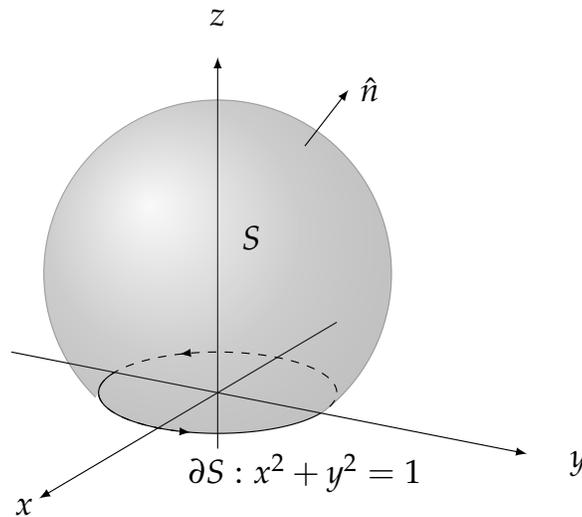
Por outro lado, a integral de superfície é, para r suficientemente pequeno, aproximadamente igual ao produto escalar $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_0$ multiplicado pela área de $B[P_0, r]$. Segue que a circulação ao longo de γ_r tenderá a ser maior se \hat{n}_0 tiver o mesmo sentido de $(\nabla \times \vec{F})(P_0)$. Portanto, podemos interpretar $(\nabla \times \vec{F})(P_0)$ como sendo o *determinador do eixo em torno do qual a circulação de \vec{F} é a maior possível* perto de P_0 .

11 Exemplos

Exemplo 36. Considere S como sendo a figura a seguir e $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$. Calcular $\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$.

Solução: O bordo ∂S de S é a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, orientada no sentido anti-horário. Temos, por (13):

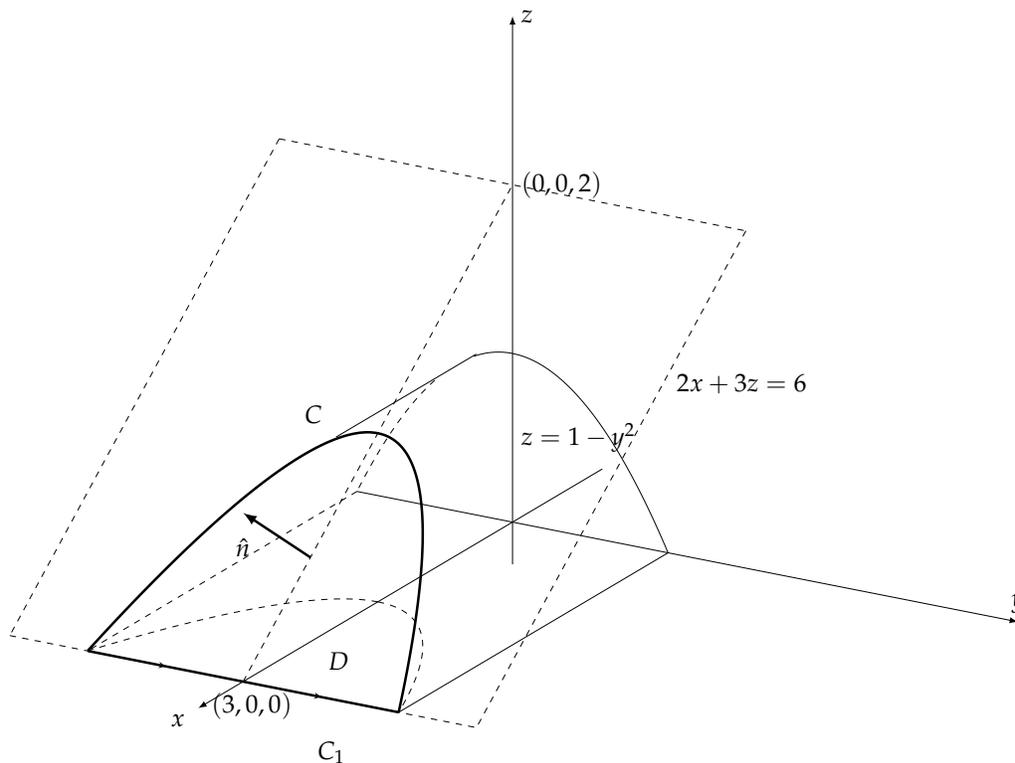
$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} ydx - xdy + e^{xz} dz = \oint_{x^2+y^2=1} ydx - xdy.$$



Pelo **Teorema de Green**, temos:

$$\oint_{x^2+y^2=1} ydx - xdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -2dxdy = -2\pi.$$

Exemplo 37. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, xz, 2xy)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2, z \geq 0$ com o plano $2x + 3z = 6$, orientada no sentido anti-horário.



Solução: A integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não pode ser calculada com o auxílio do **Teorema de Stokes**, uma vez que C não é uma curva fechada. No entanto, se considerarmos a curva fechada $\gamma = C \cup C_1$ (ou seja, C justaposta ao segmento que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(3, 1, 0)$), como na figura acima, onde C_1 é a curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \sigma: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (3, t, 0) \end{aligned}$$

Assim, γ é o bordo da superfície S definida por $z = f(x, y) = 2 - \frac{2}{3}x$, $(x, y) \in D$, onde:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{3 + 3y^2}{2} \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1 \right\},$$

S fica parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(u, v, 2 - \frac{2}{3}u\right) \end{aligned}$$

e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times (0, 1, 0) = \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right).$$

A a fórmula (13) nos fornece:

$$\oint_{\gamma=C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

Como $(\nabla \times \vec{F})(x, y, z) = (x, 2z - x, z)$, tem-se:

$$(\nabla \times \vec{F})(\varphi(u, v)) = (\nabla \times \vec{F}) \left(u, v, 2 - \frac{2}{3}u \right) = \left(u, 4 - \frac{7}{3}u, 2 - \frac{2}{3}u \right)$$

$$(\nabla \times \vec{F})(\varphi(u, v)) \cdot \vec{N} = \frac{2}{3}u + 2 - \frac{2}{3}u = 2$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \iint_D \left(u, 4 - \frac{7}{3}u, 2 - \frac{2}{3}u \right) \cdot \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) dudv = \\ &= \iint_D \left(\frac{2}{3}u + 2 - \frac{2}{3}u \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{\frac{3+3v^2}{2}}^3 dudv = 3 \int_{-1}^1 (1 - v^2) dv = 3 \left[v - \frac{v^3}{3} \right]_{-1}^1 = 4. \end{aligned}$$

Como:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 0 dt = 0,$$

tem-se:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4.$$

Assim, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4$.

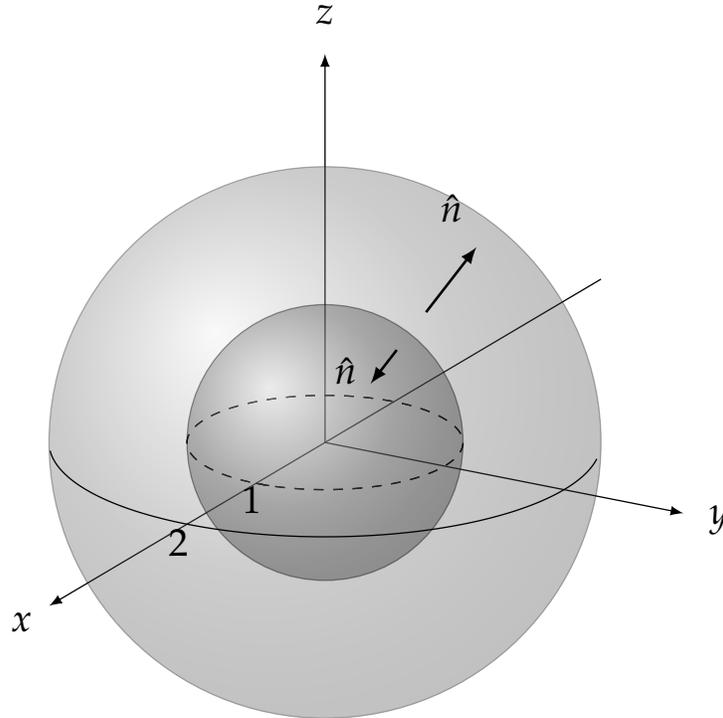
12 Orientação de Superfícies Fechadas

Enquanto o **Teorema de Stokes** expressa uma relação entre a integral sobre uma superfície e a integral de linha sobre a curva que é o bordo desta superfície, o **Teorema de Gauss**, que passamos a expor, relaciona uma integral tripla num sólido de \mathbb{R}^3 com a integral de superfície que é fronteira deste sólido.

Seja W uma região limitada de \mathbb{R}^3 , tendo como fronteira uma superfície ∂W . Diremos que ∂W está **orientada positivamente** se o vetor normal em cada ponto de ∂W aponta para fora de W . Por exemplo, se W é a região de \mathbb{R}^3 definida por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

sua fronteira ∂W é formada por duas esferas concêntricas na origem, de raios 1 e 2. A superfície ∂W está orientada positivamente se os vetores normais à esfera exterior apontarem no sentido contrário à origem, e os vetores normais à esfera interior apontarem para a origem, conforme ilustra a sigura a seguir:



Para enunciar o **Teorema de Gauss**, definiremos primeiramente o **divergente** de um campo vetorial \vec{F} . Para isto, consideremos a seguinte:

Definição 38. Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$$

um campo vetorial com derivadas parciais definidas em U . O **divergente de \vec{F}** , denotado por $\nabla \cdot \vec{F}$ (ou $\text{div } \vec{F}$) é:

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial N}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)$$

Um campo vetorial $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ é dito **incompressível**. Veremos, na seção a seguir, o **Teorema de Gauss**, que nos permitirá dar uma interpretação geométrica para o divergente.

13 O Teorema de Gauss

Finalmente apresentamos o:

Teorema 39 (Teorema de Gauss). *Sejam $W \subset \mathbb{R}^3$ uma região fechada e limitada cuja fronteira, ∂W é uma superfície orientada positivamente e $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto que contém W . Se*

$$\begin{aligned} \vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

é um campo vetorial de classe $C^1(U, \mathbb{R}^3)$, então:

$$\iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dx dy dz \quad (17)$$

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que W seja uma região simples, isto é, uma região de tipo I, II e III simultaneamente (cf. Seção 2 da AULA 5). Se $\vec{F} = (M, N, P)$, podemos escrever o lado direito de (17) na forma:

$$\iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = \iiint_W \frac{\partial M}{\partial x} dx dy dz + \iiint_W \frac{\partial N}{\partial y} dx dy dz + \iiint_W \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$$

Por outro lado, a integral de superfície da equação (17) é dada por:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \iint_{\partial W} [(M, N, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS = \\ &= \iint_{\partial W} [(M, 0, 0) \cdot \hat{n}] \cdot dS + \iint_{\partial W} [(0, N, 0) \cdot \hat{n}] \cdot dS + \iint_{\partial W} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS. \end{aligned}$$

Devido à aditividade das integrais de superfície, a demonstração estará concluída se provarmos as identidades:

$$\iiint_W \frac{\partial M}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial W} [(M, 0, 0) \cdot \hat{n}] \cdot dS \quad (18)$$

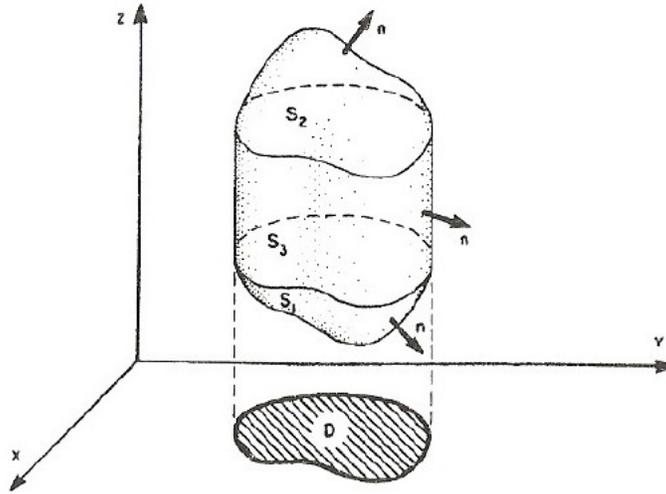
$$\iiint_W \frac{\partial N}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial W} [(0, N, 0) \cdot \hat{n}] \cdot dS \quad (19)$$

$$\iiint_W \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial W} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS \quad (20)$$

Para provar (20), descrevemos W como uma região de tipo I, ou seja,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

Esta região é limitada inferiormente por uma superfície S_1 de equação $z = f_1(x, y), (x, y) \in D$, e limitada superiormente por uma superfície S_2 de equação $z = f_2(x, y), (x, y) \in D$ e, possivelmente por uma superfície S_3 que é uma porção de cilindro gerada por uma reta paralela ao eixo Oz ao longo da fronteira de D , conforme ilustra a figura:



Temos:

$$\iiint_W \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D [P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))] dx dy$$

Por outro lado,

$$\iint_{\partial W} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS = \iint_{S_1} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS + \iint_{S_2} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS + \iint_{S_3} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS$$

Em S_3 , o campo de vetores normais unitários é paralelo ao plano Oxy . Logo, $(0, 0, P) \cdot \hat{n} = 0$, e portanto:

$$\iint_{S_3} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS.$$

Em S_2 , o campo de vetores normais que aponta para fora de W é dado por:

$$N_2 = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right).$$

Então, pela definição de integral de superfície que é gráfico de função,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS &= \iint_D \left[(0, 0, P(x, y, f_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_D P(x, y, f_2(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

Em S_1 , o campo de vetores normais que aponta para fora de W é dado por:

$$N_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right)$$

Novamente, pela definição de integral de superfície que é gráfico de função,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] \cdot dS &= \iint_D \left[(0, 0, P(x, y, f_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_D -P(x, y, f_1(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_{\partial W} [(0, 0, P) \cdot \hat{n}] dS = \iint_D [[P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))]] dx dy,$$

o que prova (20). As demonstrações de (18) e de (19) são análogas.

Quando W não é uma região simples, podemos decompô-la como uma reunião finita de regiões simples, isto é, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ (a região da figura é uma reunião de oito regiões simples, uma em cada octante). Usando a fórmula (17) do **Teorema de Gauss** que acabamos de provar para regiões simples, obtemos:

$$\iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = \iint_{\partial W_1} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS + \dots + \iint_{\partial W_n} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

Observando que os vetores normais exteriores à fronteira comum de duas regiões simples são opostos, concluímos que as integrais de superfície correspondentes são simétricas e, portanto, se cancelam. Assim,

$$\iint_{\partial W_1} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS + \dots + \iint_{\partial W_n} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS,$$

o que completa a demonstração. □

Usando o **Teorema de Gauss**, podemos dar uma interpretação para o divergente de um campo vetorial \vec{F} num ponto P_0 . Para isto, consideremos W_r o sólido limitado pela esfera de raio r e centro no ponto P_0 , contido no subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 no qual \vec{F} é de classe \mathcal{C}^1 .

Aplicando o **Teorema de Gauss** ao campo \vec{F} sobre W_r , obtemos:

$$\iiint_{W_r} (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dS = \iint_{\partial W_r} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS,$$

onde \hat{n} representa o campo de vetores normais unitários exteriores a W_r .

Pelo **Teorema do Valor Médio para Integrais Triplas**, existe algum ponto $P' \in W_r$ tal que:

$$\iiint_{W_r} (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = (\nabla \cdot \vec{F})(P') \cdot \text{Vol.}(W_r) \quad (21)$$

de modo que:

$$(\nabla \cdot \vec{F})(P') = \frac{1}{\text{Vol.}(W_r)} \iint_{W_r} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS.$$

Fazendo o diâmetro de W_r , d_r , tender a zero, obtemos:

$$\lim_{d_r \rightarrow 0} (\nabla \cdot \vec{F})(P') = (\nabla \cdot \vec{F})(P_0),$$

uma vez que $\nabla \cdot \vec{F}$ é contínua em P_0 (pois \vec{F} é de classe C^1 em um aberto que contém W_r) e $d_r \rightarrow 0 \Rightarrow P' \rightarrow P_0$. Assim,

$$(\nabla \cdot \vec{F})(P_0) = \lim_{d_r \rightarrow 0} \iint_{\partial W_r} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS,$$

ou seja, $(\nabla \cdot \vec{F})(P_0)$ nos dá o fluxo do campo \vec{F} por unidade de volume em P_0 .

14 Exemplos

Nesta seção apresentamos diversos exemplos de cálculos referentes ao fluxo de campos vetoriais através de superfícies fechadas.

Exemplo 40. *Seja:*

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

um campo vetorial. Calcular o fluxo de \vec{F} através de S_a , a esfera centrada na origem de raio $a > 0$.

Solução: A esfera é parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, \theta) &\mapsto (a \sin(\phi) \cos(\theta), a \sin(\phi) \sin(\theta), a \cos(\phi)) \end{aligned}$$

e o vetor normal é dado por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) = (a^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta), a^2 \sin^2(\phi) \sin(\theta), a^2 \sin(\phi) \cos(\phi))$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\varphi(\phi, \theta)) &= \vec{F}(a \sin(\phi) \cos(\theta), a \sin(\phi) \sin(\theta), a \cos(\phi)) = \\ &= \left(\frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{a^2}, \frac{\sin(\phi) \sin(\theta)}{a^2}, \frac{\cos(\phi)}{a^2} \right) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\varphi(\phi, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) \right) &= \frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{a^2} \cdot a^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta) + \\ &+ \frac{\sin(\phi) \sin(\theta)}{a^2} a^2 \sin^2(\phi) \sin(\theta) + \frac{\cos(\phi)}{a^2} a^2 \sin(\phi) \cos(\phi) = \sin^3(\phi) \cos^2(\theta) + \\ &+ \sin^3(\phi) \sin^2(\theta) + \sin(\phi) \cos^2(\phi) = \sin^3(\phi) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + \sin(\phi) \cos^2(\phi) = \\ &= \sin^3(\phi) + (1 - \sin^2(\phi)) \sin(\phi) = \sin^3(\phi) + \sin(\phi) - \sin^3(\phi) = \sin(\phi). \end{aligned}$$

e portanto:

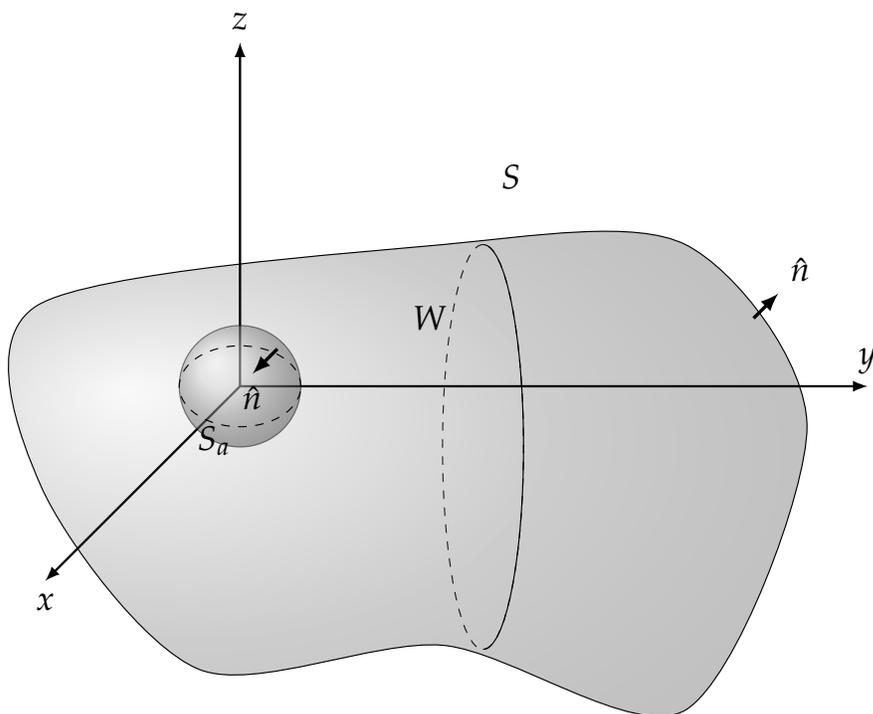
$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS &= \iint_D \left[\vec{F}(\varphi(\phi, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta) \right) \right] d\phi d\theta = \\ &= \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \sin(\phi) d\phi d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\theta d\phi = 4\pi \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo deste campo por S_a é 4π - e portanto independe do raio da esfera.

Exemplo 41. Considere o campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Usando o **Teorema de Gauss**, mostraremos que o fluxo de \vec{F} que sai da superfície fechada S envolvendo a origem é 4π .



Solução: Seja W a região compreendida entre S e S_a - a esfera centrada na origem de raio $a > 0$. A fronteira de W é $\partial W = S \cup S_a$, onde S está orientada com vetor normal apontando para fora de W e S_a tem vetor normal apontando para a origem.

Como $(0,0,0) \notin W$, então \vec{F} é de classe C^1 em W . Aplicando o **Teorema de Gauss** ao campo \vec{F} sobre W , obtemos:

$$\iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = \iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS + \iint_{S_a} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

Um cálculo rotineiro mostra que $(\nabla \cdot \vec{F}) = 0$. Portanto,

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = - \iint_{S_a} (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = 4\pi$$

Observação 42. Se $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial de classe $C^2(U, \mathbb{R}^3)$, então:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0.$$

De fato, sendo $\vec{F} = (M, N, P)$, como $\vec{F} \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ tem-se $M, N, P \in C^2(U, \mathbb{R})$. Assim:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

e portanto:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Pelo **Teorema de Schwarz**, as derivadas parciais mistas de ordem dois de cada uma das componentes M, N e P são iguais, e portanto:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y} = 0$$

Exemplo 43. Calcular:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

onde S é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, com a porção do plano $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com vetor normal exterior, e $\vec{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

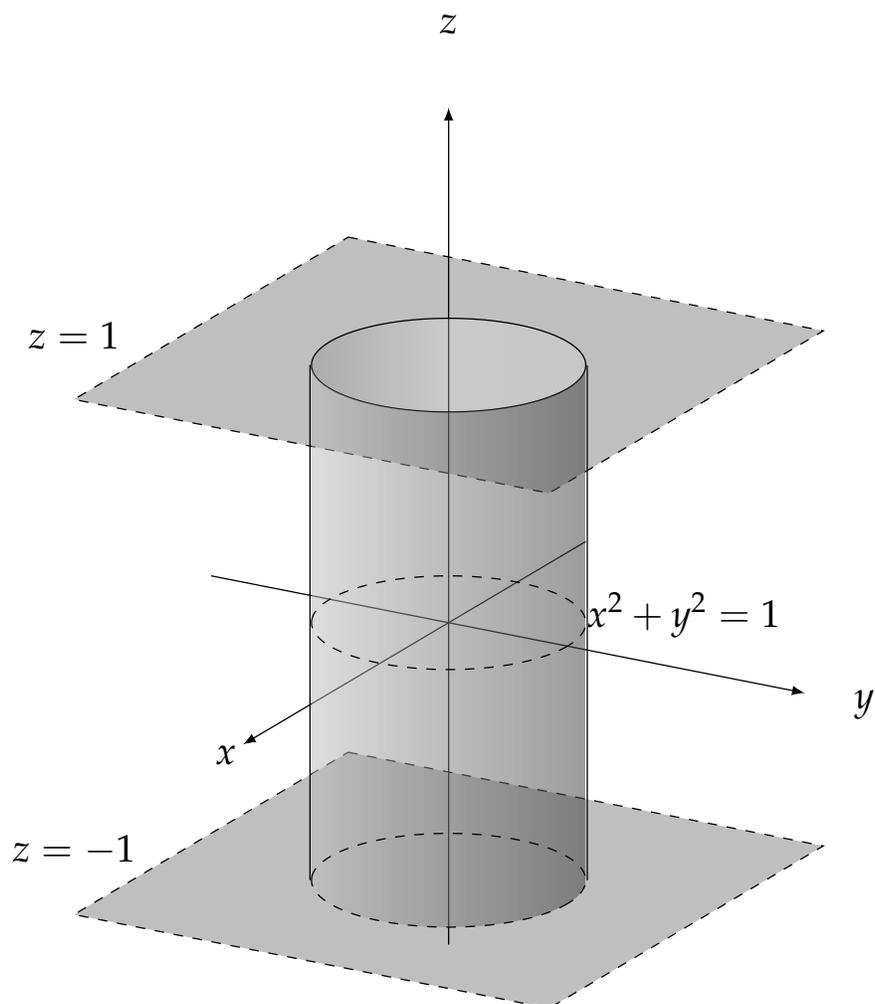
Exemplo 44. Dado o campo vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{F}: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (xy^2, x^2y, y) \end{aligned}$$

calcular:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS,$$

onde S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $z = -1$, com a normal a S apontando para fora do sólido.



Solução: S é uma superfície fechada, fronteira da região:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 \leq 1) \& (-1 \leq z \leq 1)\}.$$

Usando a fórmula (17) do **Teorema de Gauss**, temos:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz.$$

Como $(\nabla \cdot \vec{F})(x, y, z) = y^2 + x^2$, então:

$$\begin{aligned} \iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz &= \iiint_W (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dz \right] dx dy = \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de coordenadas polares para resolver a integral dupla, obtemos:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \cdot dS = \pi.$$

Exemplo 45. *Calcular:*

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

onde S é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, com a porção do plano $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com vetor normal exterior, e $\vec{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$

Solução: A integral

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

pode ser calculada com o auxílio do **Teorema de Stokes**. Neste caso, a igualdade nos dá:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \oint_C \vec{F} \cdot dr,$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 1$, orientada no sentido anti-horário. Deixo a seu cargo calcular esta integral de linha.

Vamos resolver a integral:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

usando o **Teorema de Gauss**. Para isto, considere a região $W \subset \mathbb{R}^3$ limitada por S e pela superfície S_1 que é a porção do plano $z = 1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$, ambas orientadas com vetor normal apontando para fora de W . Então, por (17):

$$\iiint_W \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) dx dy dz = \iint_{S \cup S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS. \quad (22)$$

Pela **Observação 42**, o lado esquerdo de (22) é nulo, de modo que:

$$0 = \iint_{S \cup S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS + \iint_{S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS$$

e portanto:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = - \iint_{S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS \quad (23)$$

Como $\nabla \times \vec{F} = (-3z^2yx, x + 2zy - 2xz^4, z^3y - z^2)$ e o campo de vetores normais unitários a S_1 é $\hat{n} = (0, 0, 1)$, temos:

$$\iint_{S_1} ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y-1) dx dy.$$

Usando mudança polar para resolver esta integral dupla, segue que:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y-1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin(\theta) - r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{2} \right) d\theta = -\pi.$$

Substituindo este resultado em (23), obtemos:

$$\iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) \cdot dS = \pi.$$

Referências

- [1] PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2014. 348 p. ISBN 978-85-7108-219-9.
- [2] CRAIZER, Marcos; TAVARES Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. rev. São Paulo: Ed. PUC-Rio, 2002. 292 p. ISBN 85-15-02441-1.
- [3] FINNEY, ROSS L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.
- [4] <https://academo.org/demos/vector-field-plotter/>, acessado em 29 de abril de 2022.
- [5] <https://www.desmos.com/calculator/eijhparfmd>, acessado em 29 de abril de 2022.
- [6] <http://user.mendelu.cz/marik/EquationExplorer/vectorfield.html>, acessado em 29 de abril de 2022.