

“MAT 5697 - Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos” - Aula 01

Jean Cerqueira Berni & Hugo Luiz Mariano

Introdução - O que estuda a Geometria Diferencial?

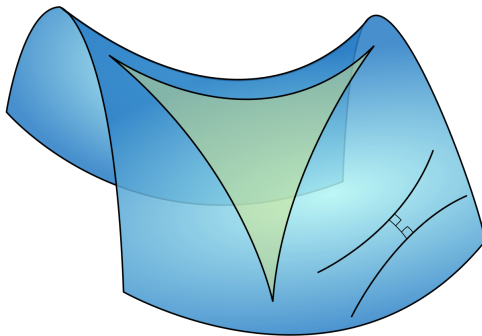


Figura: Uma quantidade n vezes estendida.





Figura: Bernhard Riemann

- “Über die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde Liegen”, 1854.





Figura: Bernhard Riemann

- “Über die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde Liegen”, 1854.
- Noção de “variedade” ([die] Mannigfaltigkeit) ;





Figura: Bernhard Riemann

- “Über die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde Liegen”, 1854.
- Noção de “variedade” ([die] Mannigfaltigkeit) ;
- Originalmente não eram, necessariamente, de dimensão finita;



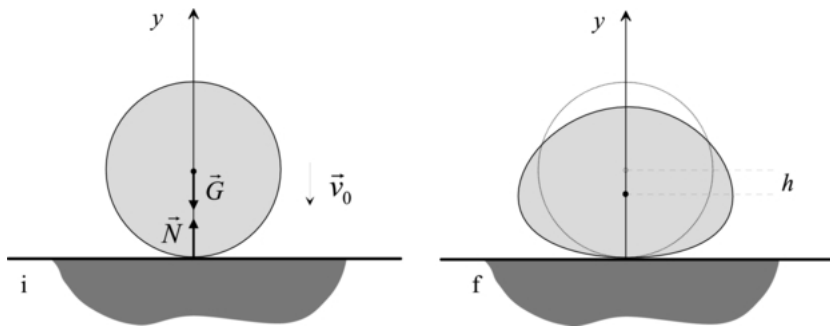


Figura: Formas possíveis de um sólido...



MATHEMATISCHE VORLESUNGEN AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN: V

DIE IDEE DER RIEMANNSCHEN FLÄCHE

VON

DR. HERMANN WEYL
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Figura: 1913 – "A Ideia de Superfície de Riemann", de Hermann Weyl



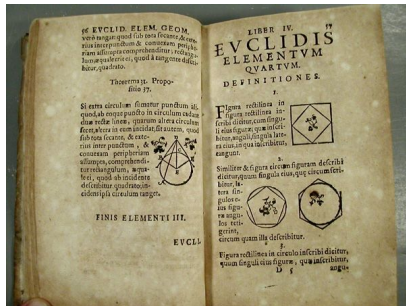


Figura: "Os Elementos"



Figura: Gerard Desargues



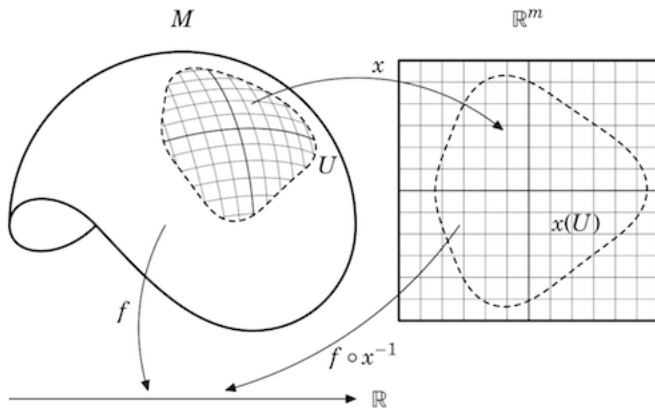


Figura: Sistema de Coordenadas



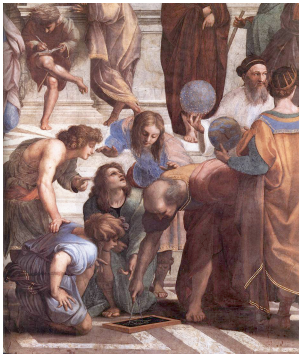


Figura: Axiomas $\vdash$ Fatos





Figura: Anders Kock & Francis W. Lawvere



- A Geometria Diferencial Sintética proposta por Lawvere é formulada no contexto da **Teoria das Categorias**;



- A Geometria Diferencial Sintética proposta por Lawvere é formulada no contexto da **Teoria das Categorias**;
- “Mundos” e estruturas matemáticas de um modo mais geral.



- A Geometria Diferencial Sintética proposta por Lawvere é formulada no contexto da **Teoria das Categorias**;
- “Mundos” e estruturas matemáticas de um modo mais geral.
- um ramo da Matemática corresponde, grosso modo, a um “mundo matemático”, uma **categoria**, composto por objetos e por transformações entre esses objetos.



- Sets



- Sets
- Grp



- Sets
- Grp
- Top



- Sets
- Grp
- Top
- Man

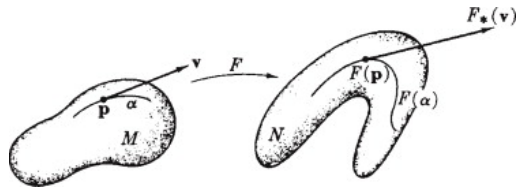


Figura: $M \xrightarrow{f} N$



Geometria Diferencial $\longleftrightarrow$ **Variedades Suaves**



Geometria Diferencial $\longleftrightarrow$ **Variedades Suaves**

$$(M, \mathfrak{A})$$



Geometria Diferencial $\longleftrightarrow$ Variedades Suaves

$$(M, \mathfrak{A})$$

- M é um espaço topológico de Hausdorff;



Geometria Diferencial $\longleftrightarrow$ Variedades Suaves

$$(M, \mathfrak{A})$$

- M é um espaço topológico de Hausdorff;
- M tem base enumerável



Geometria Diferencial $\longleftrightarrow$ Variedades Suaves

$$(M, \mathfrak{A})$$

- M é um espaço topológico de Hausdorff;
- M tem base enumerável
- $\mathfrak{A}$ é um atlas maximal de dimensão n , para algum $n \in \mathbb{N}$ e de classe $\mathcal{C}^\infty$ e cujas transformações são as funções infinitamente diferenciáveis entre essas



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- $M \cup N$ é variedade suave;



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- $M \cup N$ é variedade suave;
- $M \times N$ é variedade suave;



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- $M \cup N$ é variedade suave;
- $M \times N$ é variedade suave;
- $M \cap N$ é variedade suave sempre que $M \pitchfork N$



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- $M \cup N$ é variedade suave;
- $M \times N$ é variedade suave;
- $M \cap N$ é variedade suave sempre que $M \pitchfork N$
- Se $f \pitchfork Z$ então $f^{-1}[Z] \subseteq M$ é variedade suave.



Faltam *pullbacks*!

M, N variedades suaves, Z subvariedad de N



Faltam *pullbacks*!

M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave



Faltam *pullbacks*!

M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}[Z] & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & N \end{array}$$

em geral, *não* é uma variedade diferenciável



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- Quocientes;



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- Quocientes;
- Em geral, $M \cap N$ não é variedade diferenciável;



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- Quocientes;
- Em geral, $M \cap N$ não é variedade diferenciável;
- $f^{-1}[Z] \subseteq M$ não é, em geral, variedade suave.



M, N variedades suaves, Z subvariedade de N

$M \xrightarrow{f} N$ função suave

- Quocientes;
- Em geral, $M \cap N$ não é variedade diferenciável;
- $f^{-1}[Z] \subseteq M$ não é, em geral, variedade suave.
- $N^M = \mathcal{C}^\infty(M, N)$ não é variedade suave.



- B um certo corpo: um sistema 0–dimensional de partículas, uma corda elástica 1–dimensional, uma membrana 2–dimensional ou um sólido 3–dimensional)



Movimento de um Sólido

- B um certo corpo: um sistema 0–dimensional de partículas, uma corda elástica 1–dimensional, uma membrana 2–dimensional ou um sólido 3–dimensional)
- T espaço 1-dimensional, representando os instantes de tempo;



Movimento de um Sólido

- B um certo corpo: um sistema 0–dimensional de partículas, uma corda elástica 1–dimensional, uma membrana 2–dimensional ou um sólido 3–dimensional)
- T espaço 1-dimensional, representando os instantes de tempo;
- E , espaço onde o movimento se dá.



Movimento de um Sólido

- B um certo corpo: um sistema 0–dimensional de partículas, uma corda elástica 1–dimensional, uma membrana 2–dimensional ou um sólido 3–dimensional)
- T espaço 1-dimensional, representando os instantes de tempo;
- E , espaço onde o movimento se dá.

$$\text{Movimento} \rightsquigarrow q : B \times T \rightarrow E,$$

$$(\text{partícula de } B, \text{ instante}) \in B \times T \mapsto \text{posição}$$



$$\text{Movimento} \leftrightarrow \bar{q} : B \rightarrow E^T,$$

partícula de $B \in B \times T \mapsto$ trajetória em E



Relacionando as duas descrições

$$\frac{q : B \times T \rightarrow E}{\bar{q} : B \rightarrow E^T} \quad \left\langle \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right.$$



$$\frac{q : B \times T \rightarrow E}{\bar{q} : B \rightarrow E^T} \quad \left\langle \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

- Categoria Cartesiano-Fechada



Dada $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave, não existe variedade suave, D , tal que:



Dada $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave, não existe variedade suave, D , tal que:

$$TM = M^D$$



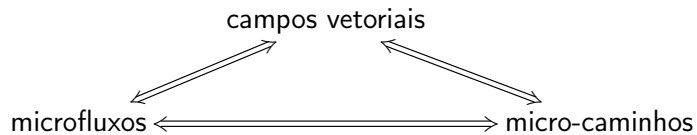
Dada $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave, não existe variedade suave, D , tal que:

$$TM = M^D$$



Figura: D – a “pedra filosofal” da Geometria Diferencial SE **Man** fosse cartesiano-fechada...





$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow M \cap N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow M \cap N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow N^M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow M \cap N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow N^M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;
 - ▶ $M, N, P \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow$



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:

- ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow M \cap N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S});$

- ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow N^M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S});$

- ▶ $M, N, P \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow \frac{M \times N \rightarrow P}{M \rightarrow P^N} \curvearrowright$



$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ “categoria dos espaços suaves e seus morfismos”

- $\mathbf{S}$ contém uma cópia da categoria das variedades suaves;
- $\mathbf{S}$ fechada por diversas construções:
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow M \cap N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;
 - ▶ $M, N \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow N^M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$;
 - ▶ $M, N, P \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S}) \Rightarrow \frac{M \times N \rightarrow P}{M \rightarrow P^N} \leftarrow$
 - ▶ $\mathbf{S}$ contém um modelo, $R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$, da reta geométrica.



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;

- Dois “elementos” especiais, 0 e e , $0 \neq e$;



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;

- Dois “elementos” especiais, 0 e e , $0 \neq e$;
- R admite um subobjeto (não trivial) D :



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;

- Dois “elementos” especiais, 0 e e , $0 \neq e$;
- R admite um subobjeto (não trivial) D :

$$D = \llbracket x \in R \mid x^2 = 0 \rrbracket \hookrightarrow R$$

capaz de representar o fibrado tangente de qualquer espaço suave M :



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;

- Dois “elementos” especiais, 0 e e , $0 \neq e$;
- R admite um subobjeto (não trivial) D :

$$D = \llbracket x \in R \mid x^2 = 0 \rrbracket \hookrightarrow R$$

capaz de representar o fibrado tangente de qualquer espaço suave M :

$$TM = M^D$$



Observe que:

R deve admitir, *no mínimo*, a estrutura de **anel**;

- Dois “elementos” especiais, 0 e e , $0 \neq e$;
- R admite um subobjeto (não trivial) D :

$$D = \llbracket x \in R \mid x^2 = 0 \rrbracket \hookrightarrow R$$

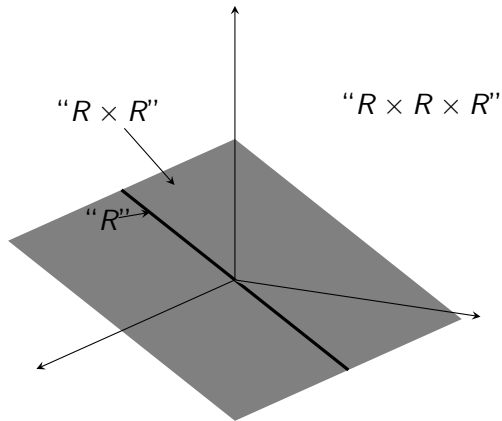
capaz de representar o fibrado tangente de qualquer espaço suave M :

$$TM = M^D$$

- R deve ser uma $\mathbb{Q}$ -álgebra (não necessariamente um corpo).



Retas, Planos e Espaço Tridimensional



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;
- $+$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;
- $+$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $\cdot$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;
- $+$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $\cdot$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $-$: $R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;



Anel Comutativo com Unidade em Uma Categoria Cartesiano-Fechada

Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;
- $+$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $\cdot$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $-$: $R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- 0 : $1 \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;



Definição: Uma **anel comutativo com unidade** em uma categoria cartesiano-fechada, $\mathcal{C}$, consiste de:

- R , objeto de $\mathcal{C}$;
- $+$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $\cdot$: $R \times R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- $-$: $R \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- 0 : $1 \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$;
- e : $1 \rightarrow R$, morfismo de $\mathcal{C}$

Tais que comutem:



Associatividade da Adição e Multiplicação

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{(+, \text{id}_R)} & R \times R \\ (\text{id}_R, +) \downarrow & & \downarrow + \\ R \times R & \xrightarrow{+} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{(\cdot, \text{id}_R)} & R \times R \\ (\text{id}_R, \cdot) \downarrow & & \downarrow \cdot \\ R \times R & \xrightarrow{\cdot} & R \end{array}$$



Comutatividade da Adição e Multiplicação

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{(\pi_2, \pi_1)} & R \times R \\ (\pi_1, \pi_2) \downarrow & & \downarrow + \\ R \times R & \xrightarrow{+} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{(\pi_2, \pi_1)} & R \times R \\ (\pi_1, \pi_2) \downarrow & & \downarrow \cdot \\ R \times R & \xrightarrow{\cdot} & R \end{array}$$



Elemento Neutro da Adição e da Multiplicação

$$\begin{array}{ccc} 1 \times R & \xrightarrow{(0, \text{id}_R)} & R \times R \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow a \\ & & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \times R & \xrightarrow{(e, \text{id}_R)} & R \times R \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow \cdot \\ & & R \end{array}$$

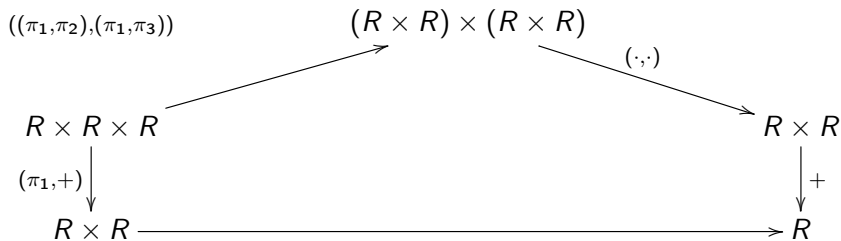


Elemento Simétrico da Adição

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad ! \quad} & \mathbf{1} \\ (\text{id}_R, -) \downarrow & & \downarrow 0 \\ R \times R & \xrightarrow{\quad + \quad} & R \end{array}$$



Distributividade da Multiplicação Sobre a Soma



Anel comutativo com unidade em $\mathcal{C} \rightsquigarrow (R, +, \cdot, -, 0, e)$



Subobjeto de Quadrados Nilpotentes

S tem limites finitos $\Rightarrow$



Subobjeto de Quadrados Nilpotentes

S tem limites finitos $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\cdot)^2 : R &\rightarrow R \\ r &\mapsto r^2 = r \cdot r \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} 0 : R &\rightarrow R \\ r &\mapsto 0 \end{aligned}$$

têm um equalizador, ou seja,



Subobjeto de Quadrados Nilpotentes

S tem limites finitos $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\cdot)^2 : R &\rightarrow R \\ r &\mapsto r^2 = r \cdot r \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} 0 : R &\rightarrow R \\ r &\mapsto 0 \end{aligned}$$

têm um equalizador, ou seja,

$$D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \rightarrowtail R \begin{matrix} \xrightarrow{(\cdot)^2} \\ \xrightarrow{0} \end{matrix} R$$



Como se ...“pertencesse”

Sets $\rightsquigarrow r \in X$;



Como se ...“pertencesse”

Sets $\rightsquigarrow r \in X$;
 $S \rightsquigarrow ?$;



Como se ...“pertencesse”

Sets $\rightsquigarrow r \in X$;

S $\rightsquigarrow ?$;

$X, R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$



Como se ...“pertencesse”

Sets $\rightsquigarrow r \in X$;

S $\rightsquigarrow ?$;

$X, R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$

$$\frac{\vdash r \in_X R}{X \xrightarrow{r} R} \quad \curvearrowright$$

S tem objeto terminal, **1** $\Rightarrow$



Como se ...“pertencesse”

Sets $\rightsquigarrow r \in X$;

S $\rightsquigarrow ?$;

$X, R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{S})$

$$\frac{\vdash r \in_X R}{X \xrightarrow{r} R} \quad \curvearrowright$$

S tem objeto terminal, **1** $\Rightarrow$

$$\frac{\vdash r \in R}{1 \xrightarrow{r} R} \quad \curvearrowright$$



$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$



$S \rightsquigarrow$ categoria com todas as propriedades mencionadas anteriormente (existe?);



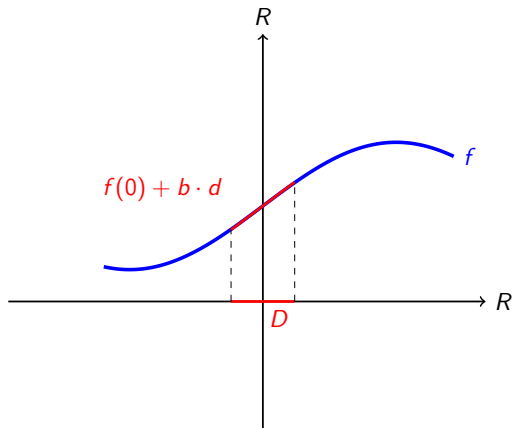
Um Axioma para Derivação

$\mathbf{S} \rightsquigarrow$ categoria com todas as propriedades mencionadas anteriormente (existe?);

Axioma de Kock-Lawvere: Em $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, 0, e))$, para qualquer $f : D \rightarrow R$ existe um único $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$$





“Todo morfismo $f : D \rightarrow R$ é *essencialmente* uma função afim”

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + \textcolor{red}{b} \cdot d)$$



“Todo morfismo $f : D \rightarrow R$ é *essencialmente* uma função afim”

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$$

- b é único.



“Todo morfismo $f : D \rightarrow R$ é *essencialmente* uma função afim”

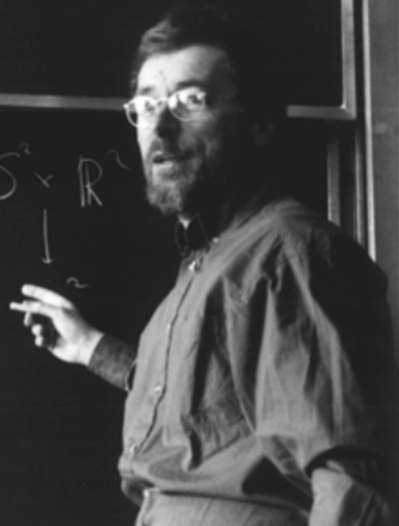
$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$$

- b é único.
- Axioma de Kock-Lawvere $\Leftrightarrow$ Princípio da Microafinidade



oids $\iff$ every arrow is cartesian

D é tão "pequeno" que não se pode distinguir o gráfico de uma função de D em R de um segmento de reta e, ao mesmo tempo, é "grande" o suficiente para que o coeficiente angular desta reta seja unicamente determinado.



(Por incrível que pareça) R é corpo

$(R, +, \cdot, -, 0, e)$ é corpo, ou seja,



(Por incrível que pareça) R é corpo

$(R, +, \cdot, -, 0, e)$ é corpo, ou seja,

$$(\forall x \in R)(x \neq 0 \Rightarrow x \text{ invertível})$$



Proposição: Em $(S, (R, +, \cdot, -, 0, e))$ vale a seguinte dedução, para quaisquer $a, b \in R$:

$$\frac{(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)}{a = b}$$



Proposição: Em $(S, (R, +, \cdot, -, 0, e))$ vale a seguinte dedução, para quaisquer $a, b \in R$:

$$\frac{(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)}{a = b}$$

“ d s quantificados universalmente podem ser cancelados”



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;
- **Hipótese** $\Rightarrow f(d) = b \cdot d$;



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;
- **Hipótese** $\Rightarrow f(d) = b \cdot d$;
- **Axioma de Kock-Lawvere** $\Rightarrow$
 $(\exists! c \in R)(\forall d \in D)(f(d) = a \cdot d = f(0) + c \cdot d = b \cdot d)$



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;
- **Hipótese** $\Rightarrow f(d) = b \cdot d$;
- **Axioma de Kock-Lawvere** $\Rightarrow$
 $(\exists! c \in R)(\forall d \in D)(f(d) = a \cdot d = f(0) + c \cdot d = b \cdot d)$
- c satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + c \cdot d)$;



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;
- **Hipótese** $\Rightarrow f(d) = b \cdot d$;
- **Axioma de Kock-Lawvere** $\Rightarrow$
 $(\exists! c \in R)(\forall d \in D)(f(d) = a \cdot d = f(0) + c \cdot d = b \cdot d)$
- c satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + c \cdot d)$;
- a satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + a \cdot d = a \cdot d)$;



- **Hipótese:** $(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)$
- Considere $f(d) = a \cdot d$;
- **Hipótese** $\Rightarrow f(d) = b \cdot d$;
- **Axioma de Kock-Lawvere** $\Rightarrow$
 $(\exists! c \in R)(\forall d \in D)(f(d) = a \cdot d = f(0) + c \cdot d = b \cdot d)$
- c satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + c \cdot d)$;
- a satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + a \cdot d = a \cdot d)$;
- b satisfaz $(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d = b \cdot d)$;
- **Unicidade de c** $\Rightarrow a = c = b$.



Kock-Lawvere $\Rightarrow D \neq \{0\}$

Proposição: $D \neq \{0\}$.



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:

$$\begin{array}{ll} f : D \rightarrow D & g : D \rightarrow D \\ d \mapsto a + b \cdot d & d \mapsto a + b' \cdot d \end{array}$$



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:

$$\begin{array}{ccc} f : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b \cdot d \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b' \cdot d \end{array}$$

- $D = \{0\} \Rightarrow f = g$



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:

$$\begin{array}{ll} f : D \rightarrow D & g : D \rightarrow D \\ d \mapsto a + b \cdot d & d \mapsto a + b' \cdot d \end{array}$$

- $D = \{0\} \Rightarrow f = g$
- Unicidade em Kock-Lawvere $\Rightarrow b = b'$ (absurdo)



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:

$$\begin{array}{ccc} f : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b \cdot d \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b' \cdot d \end{array}$$

- $D = \{0\} \Rightarrow f = g$
- Unicidade em Kock-Lawvere $\Rightarrow b = b'$ (absurdo)
- $$\frac{(D = \{0\}) \Rightarrow \perp}{D \neq \{0\}}$$



Proposição: $D \neq \{0\}$.

- Para quaisquer $b, b' \in R$, $b \neq b'$, considere:

$$\begin{array}{ccc} f : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b \cdot d \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : D & \rightarrow & D \\ d & \mapsto & a + b' \cdot d \end{array}$$

- $D = \{0\} \Rightarrow f = g$
- Unicidade em Kock-Lawvere $\Rightarrow b = b'$ (absurdo)
- $$\frac{(D = \{0\}) \Rightarrow \perp}{D \neq \{0\}}$$
- $\therefore D \neq \{0\}$.



Peculiaridades de D

- D “absorve” elementos de R , ou seja:

$$(d \in D) \& (b \in R) \Rightarrow b \cdot d \in D$$



Peculiaridades de D

- D “absorve” elementos de R , ou seja:

$$(d \in D) \& (b \in R) \Rightarrow b \cdot d \in D$$

$$\therefore (b \cdot d)^2 = b^2 \cdot d^2 = b^2 \cdot 0 = 0.$$



Peculiaridades de D

- D “absorve” elementos de R , ou seja:

$$(d \in D) \& (b \in R) \Rightarrow b \cdot d \in D$$

$$\therefore (b \cdot d)^2 = b^2 \cdot d^2 = b^2 \cdot 0 = 0.$$

- D **não** chega a ser um ideal, uma vez que:

$$(d_1 \in D) \& (d_2 \in D) \not\Rightarrow (d_1 + d_2) \in D$$



Peculiaridades de D

- D “absorve” elementos de R , ou seja:

$$(d \in D) \& (b \in R) \Rightarrow b \cdot d \in D$$

$$\therefore (b \cdot d)^2 = b^2 \cdot d^2 = b^2 \cdot 0 = 0.$$

- D não chega a ser um ideal, uma vez que:

$$(d_1 \in D) \& (d_2 \in D) \not\Rightarrow (d_1 + d_2) \in D$$

Se D fosse ideal, teríamos, para $d_1 \in D$ qualquer:



Peculiaridades de D

- D “absorve” elementos de R , ou seja:

$$(d \in D) \& (b \in R) \Rightarrow b \cdot d \in D$$

$$\therefore (b \cdot d)^2 = b^2 \cdot d^2 = b^2 \cdot 0 = 0.$$

- D não chega a ser um ideal, uma vez que:

$$(d_1 \in D) \& (d_2 \in D) \not\Rightarrow (d_1 + d_2) \in D$$

Se D fosse ideal, teríamos, para $d_1 \in D$ qualquer:

$$(\forall d_2 \in D)((d_1 + d_2)^2 = \underbrace{d_1^2}_{=0} + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 + \underbrace{d_2^2}_{=0} = 2 \cdot d_1 \cdot d_2 = 0)$$



$$\therefore (\forall d_2 \in D)(2 \cdot d_1 \cdot d_2 = 0)$$



$$\therefore (\forall d_2 \in D)(2 \cdot d_1 \cdot d_2 = 0)$$

$$2 \neq 0 \Rightarrow (\forall d_2 \in D)(d_1 \cdot d_2 = 0)$$

$$(\forall d_2 \in D)(d_1 \cdot d_2 = 0 \cdot d_2) \xRightarrow{\text{micro-Cancelamento}} d_1 = 0$$

$$\therefore D = \{0\}$$



- $(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$



- $(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$
- $f : D \rightarrow R$
 $d \mapsto \begin{cases} e & \text{se } d \neq 0 \\ 0 & \text{se } d = 0 \end{cases}$ é função;



- $(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$
- $f : D \rightarrow R$
 $d \mapsto \begin{cases} e & \text{se } d \neq 0 \\ 0 & \text{se } d = 0 \end{cases}$ é função;
- Kock-Lawvere $\Rightarrow (\exists! b \in R)(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$



- $(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$
- $f : D \rightarrow R$
 $d \mapsto \begin{cases} e & \text{se } d \neq 0 \\ 0 & \text{se } d = 0 \end{cases}$ é função;
- Kock-Lawvere $\Rightarrow (\exists! b \in R)(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$
- $D \neq \{0\} \Rightarrow (\exists d_0 \neq 0) \Rightarrow (e = e^2 = f(d_0)^2 = (b \cdot d_0)^2 = b^2 \cdot d_0^2 = b^2 \cdot 0 = 0)$



- $(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$
 $f : D \rightarrow R$
- $d \mapsto \begin{cases} e & \text{se } d \neq 0 \\ 0 & \text{se } d = 0 \end{cases}$ é função;
- Kock-Lawvere $\Rightarrow (\exists! b \in R)(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$
- $D \neq \{0\} \Rightarrow (\exists d_0 \neq 0) \Rightarrow (e = e^2 = f(d_0)^2 = (b \cdot d_0)^2 = b^2 \cdot d_0^2 = b^2 \cdot 0 = 0)$
- $R = \{0\}$ (absurdo)
-

$$\vdash \neg(\forall d \in D)((d = 0) \vee (d \neq 0))$$



Referências

Principais referências utilizadas

- [1] Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2006.
- [2] Kostecki, R., *Differential Geometry in Toposes*, disponível em <https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/sdg.pdf>
- [3] Pêgas, L., *Um Panorama da Geometria Diferencial Sintética*, disponível em https://www.ime.usp.br/~lhp/main_files/seminario-Luiz-MAT6603.pdf
- [4] Schulman, M., *Synthetic Differential Geometry*, disponível em <https://home.sandiego.edu/~shulman/papers/sdg-pizza-seminar.pdf>

