Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

"MAT 5697 - Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos" - Aula 02

Jean Cerqueira Berni & Hugo Luiz Mariano

Axioma de Kock-Lawvere

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

Axioma de Kock-Lawvere

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + r(h) \;\text{ com }\; \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|} = 0$$

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + b\cdot d)$$

Como definir a derivada em um ponto?

Definição: Sejam $f : R \to R$ uma função e $a \in R$ qualquer. A **derivada de f em a** é o único elemento $b \in R$ tal que:

Como definir a derivada em um ponto?

Definição: Sejam $f : R \to R$ uma função e $a \in R$ qualquer. A **derivada de f em a** é o único elemento $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + b \cdot d)$$

Como definir a derivada em um ponto?

Definição: Sejam $f : R \to R$ uma função e $a \in R$ qualquer. A **derivada de f em a** é o único elemento $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + b \cdot d)$$

Escrevemos:

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + f'(a) \cdot d)$$

Exemplo

$$
\begin{array}{rccc}
f: & R & \to & R \\
 & x & \mapsto & x^3
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\begin{array}{rccc}
f: & R & \to & R \\
 & x & \mapsto & x^3
\end{array}
$$

-

$$
\begin{array}{rccc}
g_a: & D & \to & R \\
 & d & \mapsto & (a+d)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot d + 3 \cdot a \cdot d^2 + d^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot d
\end{array}
$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rccc} g_a: & D & \to & R \\ & d & \mapsto & (a+d)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot d + 3\cdot a\cdot d^2 + d^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot d \end{array}$$
- $\therefore f'(a) = 3\cdot a^2$

Função Derivada

Definição: Em $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$, dada qualquer $f : R \to R$, a **função derivada de** f é a função:

$$\begin{array}{rccc} f' : & R & \to & R \\ & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

Exemplo

$$
\begin{array}{rccc}
f: & R & \to & R \\
 & x & \mapsto & x^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
f': & R & \to & R \\
 & x & \mapsto & 3 \cdot x^2
\end{array}
$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f': & R & \to & R \\ & x & \mapsto & 3 \cdot x^2 \end{array}$$

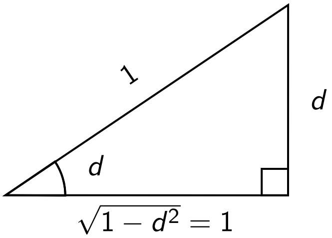
"Tudo como dantes no quartel de Abrantes ..."

Exemplo

- $$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

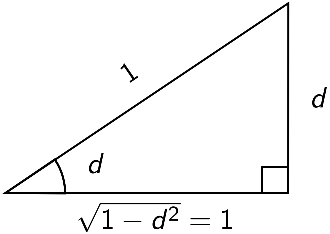
Exemplo

- $$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$



Exemplo

- $$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & R \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(d) = d \\ \cos(d) = 1 \end{cases}$$

Exemplo

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a)\cdot\overbrace{\cos(d)}^{=1} + \overbrace{\sin(d)}^{=d}\cdot\cos(a))$$

Exemplo

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) \cdot \overbrace{\cos(d)}^{=1} + \overbrace{\sin(d)}^{=d} \cdot \cos(a))$$

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) + \cos(a) \cdot d)$$

Exemplo

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) \cdot \overbrace{\cos(d)}^{=1} + \overbrace{\sin(d)}^{=d} \cdot \cos(a))$$

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) + \cos(a) \cdot d)$$

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) + [\sin]'(a) \cdot d)$$

Exemplo

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a)\cdot \overbrace{\cos(d)}^{=1} + \overbrace{\sin(d)}^{=d}\cdot \cos(a))$$

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) + \cos(a)\cdot d)$$

$$(\forall d \in D)(\sin(a+d) = \sin(a) + [\sin]'(a)\cdot d)$$

$$\therefore f'(a) = [\sin]'(a) = \cos(a)$$

Derivada da Soma

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Derivada da Soma

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Prova:

- $(f+g)'(a) \in R$ é **único** tal que
  $(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$

Derivada da Soma

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Prova:

- $(f+g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$
- $f'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + f'(a) \cdot d)$

Derivada da Soma

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Prova:

- $(f+g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$
- $f'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + f'(a) \cdot d)$
- $g'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(g(a+d) = g(a) + g'(a) \cdot d)$

Derivada da Soma

- $(\forall a \in R)((f+g) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)+g(a))$

Derivada da Soma

- $(\forall a \in R)((f + g) \stackrel{\text{def}}{=} f(a) + g(a))$
- $(\forall a \in R)((f' + g')(a) \stackrel{\text{def}}{=} f'(a) + g'(a))$

Derivada da Soma

- $(\forall a \in R)((f+g) \overset{\text{def}}{=} f(a)+g(a))$
- $(\forall a \in R)((f'+g')(a) \overset{\text{def}}{=} f'(a)+g'(a))$

$$(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$$

Derivada da Soma

- $(\forall a \in R)((f+g) \overset{\text{def}}{=} f(a)+g(a))$
- $(\forall a \in R)((f'+g')(a) \overset{\text{def}}{=} f'(a)+g'(a))$

$$(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$$

$$(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + [f'(a)+g'(a)] \cdot d)$$

Derivada da Soma

- $(\forall a \in R)((f+g) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)+g(a))$
- $(\forall a \in R)((f'+g')(a) \stackrel{\text{def}}{=} f'(a)+g'(a))$

$$(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + (f+g)'(a) \cdot d)$$

$$(\forall d \in D)((f+g)(a+d) = (f+g)(a) + [f'(a)+g'(a)] \cdot d)$$

Unicidade de $(f+g)'(a) \Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$. $\square$

Derivada do Produto

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f'(a) \cdot g'(a)$$

Derivada do Produto

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f'(a) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $(f \cdot g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$

Derivada do Produto

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f'(a) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $(f \cdot g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$
- $f'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(f(a + d) = f(a) + f'(a) \cdot d)$

> Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:
>
> $$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f'(a) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $(f \cdot g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$
- $f'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)({\color{blue} f(a + d) = f(a) + f'(a) \cdot d})$
- $g'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)({\color{red} g(a + d) = g(a) + g'(a) \cdot d})$

Derivada do Produto

Para todo $d \in D$, temos:

Derivada do Produto

Para todo $d \in D$, temos:

$$(f \cdot g)(a + d) = f(a + d) \cdot g(a + d) =$$

$$= (f(a) + f'(a) \cdot d) \cdot (g(a) + g'(a) \cdot d) =$$

$$= \overbrace{f(a) \cdot g(a)}^{1} + \overbrace{f(a) \cdot g'(a) \cdot d}^{2} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g(a)}^{3} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g'(a) \cdot d}^{4} =$$

$$= (f \cdot g)(a + d) + f(a) \cdot g'(a) \cdot d + f'(a) \cdot g(a) \cdot d + f'(a) \cdot g'(a) \cdot \underbrace{d^2}_{=0} =$$

Para todo $d \in D$, temos:

$$(f \cdot g)(a+d) = f(a+d) \cdot g(a+d) =$$

$$= (f(a) + f'(a) \cdot d) \cdot (g(a) + g'(a) \cdot d) =$$

1 2 3 4

Derivada do Produto

Para todo $d \in D$, temos:

$$(f \cdot g)(a + d) = f(a + d) \cdot g(a + d) =$$

$$= (f(a) + f'(a) \cdot d) \cdot (g(a) + g'(a) \cdot d) =$$

$$= \overbrace{f(a) \cdot g(a)}^{1} + \overbrace{f(a) \cdot g'(a) \cdot d}^{2} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g(a)}^{3} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g'(a) \cdot d}^{4} =$$

Derivada do Produto

Para todo $d \in D$, temos:

$$(f \cdot g)(a+d) = f(a+d) \cdot g(a+d) =$$

$$= (f(a) + f'(a) \cdot d) \cdot (g(a) + g'(a) \cdot d) =$$

$$= \overbrace{f(a) \cdot g(a)}^{1} + \overbrace{f(a) \cdot g'(a) \cdot d}^{2} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g(a)}^{3} + \overbrace{f'(a) \cdot d \cdot g'(a) \cdot d}^{4} =$$

$$= (f \cdot g)(a+d) + f(a) \cdot g'(a) \cdot d + f'(a) \cdot g(a) \cdot d + f'(a) \cdot g'(a) \cdot \underbrace{d^2}_{=0} =$$

Derivada do Produto

$$= (f \cdot g)(a) + [f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)] \cdot d + 0$$

Derivada do Produto

$$= (f \cdot g)(a) + [f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)] \cdot d + 0$$

$$= (f \cdot g)(a) + [f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)] \cdot d$$

Derivada do Produto

$$(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$$

Derivada do Produto

$$(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$$

$$(\forall d \in D)((f \cdot g)(a + d) = (f \cdot g)(a) + [f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)] \cdot d)$$

Derivada do Produto

$$(\forall d \in D)((f \cdot g)(a+d) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)'(a) \cdot d)$$

$$(\forall d \in D)((f \cdot g)(a+d) = (f \cdot g)(a) + [f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)] \cdot d)$$

Unicidade de $(f \cdot g)'(a) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. $\square$

A Regra da Cadeia

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

A Regra da Cadeia

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $g'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(g(a+d) = g(a) + g'(a) \cdot d)$.

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $g'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(g(a+d) = g(a) + g'(a) \cdot d)$.
- $(\forall d \in D)(f(g(a+d)) = f(g(a) + g'(a) \cdot d) = f(g(a)) + f'(g(a)) \cdot [g'(a) \cdot d]) =$
  $= (f \circ g)(a) + [f'(g(a)) \cdot g'(a)] \cdot d$

A Regra da Cadeia

Dados $f, g : R \to R$, $a \in R$ quaisquer, tem-se:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Prova:

- $g'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)(g(a+d) = g(a) + g'(a) \cdot d)$.
- $(\forall d \in D)(f(g(a+d)) = f(g(a) + g'(a) \cdot d) = f(g(a)) + f'(g(a)) \cdot [g'(a) \cdot d]) =$
  $= (f \circ g)(a) + [f'(g(a)) \cdot g'(a)] \cdot d$
- $\therefore (\forall d \in D)((f \circ g)(a+d) = (f \circ g)(a) + f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot d)$

A Regra da Cadeia

- $(f \circ g)'(a) \in R$ é **único** tal que
  $(\forall d \in D)((f \circ g)(a + d) = (f \circ g)(a) + (f \circ g)'(a) \cdot d)$

A Regra da Cadeia

- $(f \circ g)'(a) \in R$ é **único** tal que
  $(\forall d \in D)((f \circ g)(a + d) = (f \circ g)(a) + (f \circ g)'(a) \cdot d)$
- $(\forall d \in D)((f \circ g)(a + d) = (f \circ g)(a) + f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot d)$

A Regra da Cadeia

- $(f \circ g)'(a) \in R$ é **único** tal que $(\forall d \in D)((f \circ g)(a + d) = (f \circ g)(a) + (f \circ g)'(a) \cdot d)$
- $(\forall d \in D)((f \circ g)(a + d) = (f \circ g)(a) + f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot d)$

Unicidade de $(f \circ g)'(a)$ $\Rightarrow (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$. $\square$

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ **(Exercício 1)**

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ **(Exercício 1)**
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ **(Exercício 1)**
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$ **(Exercício 2)**

Regras de Derivação

Sejam $f, g : R \to R$ e $a \in R$. Valem:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ **(Exercício 1)**
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$ **(Exercício 2)**
- $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;
- Espaços tangentes;

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;
- Espaços tangentes;
- Campo vetorial tangente;

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;
- Espaços tangentes;
- Campo vetorial tangente;
- $k-$formas diferenciais;

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;
- Espaços tangentes;
- Campo vetorial tangente;
- $k-$formas diferenciais;
- Conexão afim;

Conceitos da Geometria Diferencial sob a luz de Kock-Lawvere

$$(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$$

- Vetores tangentes;
- Fibrado tangente;
- Espaços tangentes;
- Campo vetorial tangente;
- $k-$formas diferenciais;
- Conexão afim;
- Integração.

Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;
- $x \in M$

Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;
- $x \in M$

Definição:

- $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ carta com $x \in U$;

Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;
- $x \in M$

Definição:

- $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ carta com $x \in U$;
- $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ com $\gamma_1(0) = x = \gamma_2(0)$;

Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;
- $x \in M$

Definição:

- $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ carta com $x \in U$;
- $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ com $\gamma_1(0) = x = \gamma_2(0)$;
- $(\gamma_1 \sim \gamma_2) \iff ((\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0))$

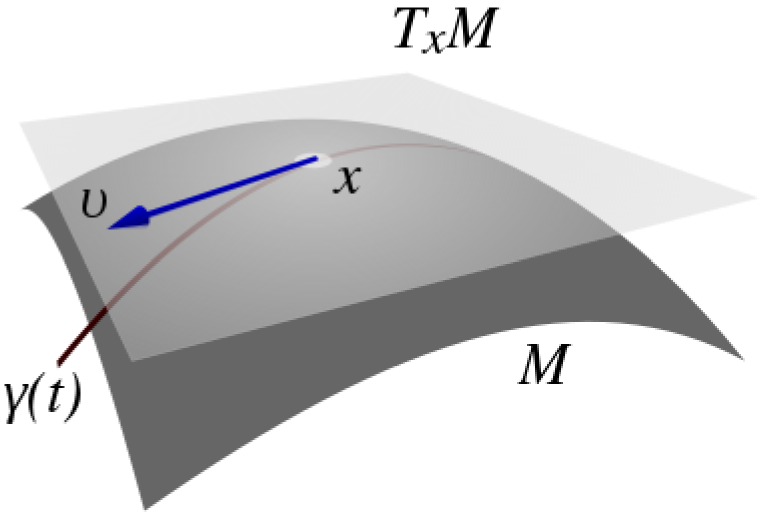
Vetor Tangente - Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;
- $x \in M$

Definição:

- $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ carta com $x \in U$;
- $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ com $\gamma_1(0) = x = \gamma_2(0)$;
- $(\gamma_1 \sim \gamma_2) \iff ((\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0))$
- **Vetor tangente a M em x:** classe de equivalência, $[\gamma'(0)]$.

Vetor Tangente



Vetor Tangente no Contexto Sintético

- M espaço suave;

Vetor Tangente no Contexto Sintético

- M espaço suave;
- $x \in M$;

Vetor Tangente no Contexto Sintético

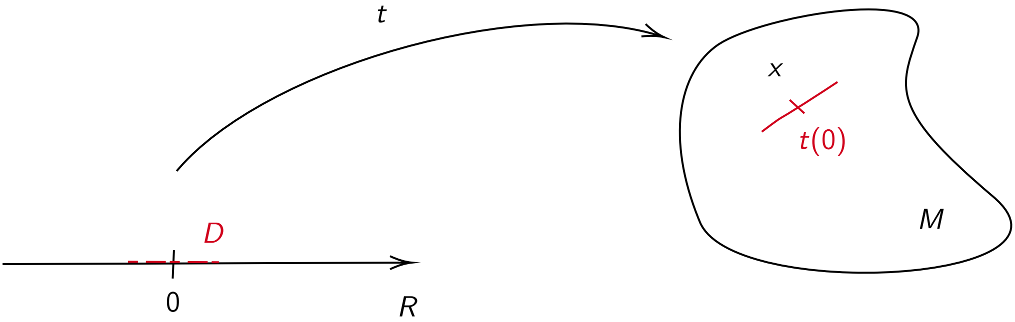
- M espaço suave;
- $x \in M$;
- **Vetor tangente a M em x:**

Vetor Tangente no Contexto Sintético

- M espaço suave;
- $x \in M$;
- **Vetor tangente a M em x:** morfismo $t : D \to M$ tal que $t(0) = x$

Vetor Tangente no Contexto Sintético

- M espaço suave;
- $x \in M$;
- **Vetor tangente a M em x:** morfismo $t : D \to M$ tal que $t(0) = x$



Fibrado Tangente no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Definição:

- $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x M = \{(x, y) \mid (x \in M) \& (y \in T_x M)\}$;

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Definição:

- $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x M = \{(x, y) \mid (x \in M) \& (y \in T_x M)\}$;
- $$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Definição:

- $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x M = \{(x, y) \mid (x \in M) \& (y \in T_x M)\}$;
- $\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$
- $(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \overset{\text{difeo}}{\to} \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{A} \Rightarrow \widetilde{\phi_\alpha} : \pi^{\dashv}[U_\alpha] \to \mathbb{R}^{2n} \quad \therefore \widetilde{\mathfrak{A}}$

- $(M, \mathfrak{A})$ variedade suave de dimensão n;

Definição:

- $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x M = \{(x, y) \mid (x \in M) \& (y \in T_x M)\}$;
- $$\begin{array}{cccc} \pi : & TM & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$
- $(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \overset{\text{difeo}}{\to} \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{A} \Rightarrow \widetilde{\phi_\alpha} : \pi^{\dashv}[U_\alpha] \to \mathbb{R}^{2n} \quad \therefore \widetilde{\mathfrak{A}}$
- $U \subseteq TM$ aberto $\iff (\forall \alpha \in \Lambda)(\widetilde{\phi_\alpha}[U \cap \pi^{\dashv}[U_\alpha]] \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ é aberto$)$

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

$$(TM, \widetilde{\mathfrak{A}})$$

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

$$(TM, \widetilde{\mathfrak{A}})$$

- TM é variedade de dimensão $2n$;

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

$$(TM, \widetilde{\mathfrak{A}})$$

- TM é variedade de dimensão $2n$;
- $U \subseteq M$ aberto contrátil $\Rightarrow TU \overset{\text{difeo}}{\to} U \times \mathbb{R}^n$

Fibrado Tangente no Contexto Analítico

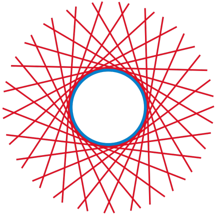
$$(TM, \widetilde{\mathfrak{A}})$$

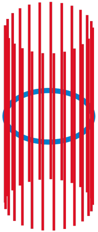
- TM é variedade de dimensão $2n$;
- $U \subseteq M$ aberto contrátil $\Rightarrow TU \overset{\text{difeo}}{\to} U \times \mathbb{R}^n$
- Em geral, $\cancel{TM \overset{\text{difeo}}{\cong} M \times \mathbb{R}^n}$

$$(TM, \widetilde{\mathfrak{A}})$$

- TM é variedade de dimensão $2n$;
- $U \subseteq M$ aberto contrátil $\Rightarrow TU \overset{\text{difeo}}{\to} U \times \mathbb{R}^n$
- Em geral, $\cancel{TM \overset{\text{difeo}}{\cong} M \times \mathbb{R}^n}$
- $(M \overset{f}{\to} N) \in \mathbf{Mor}\,(\mathbf{Man}) \Rightarrow (TM \overset{Df}{\to} TN) \in \mathbf{Mor}\,(\mathbf{Man})$

Fibrado Tangente no Contexto Analítico





Fibrado Tangente no Contexto Sintético

Fibrado tangente de M:

Observação: $T(TM) = T(M^D) = (M^D)^D \cong M^{D\times D}$

Fibrado Tangente no Contexto Sintético

Fibrado tangente de M:

$$TM = M^D = \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}\left(D, M\right)$$

Fibrado Tangente no Contexto Sintético

Fibrado tangente de M:

$$TM = M^D = \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(D, M)$$

Observação: $T(TM) = T(M^D) = (M^D)^D \cong M^{D\times D}$

Fibrado Tangente é uma Construção Funtorial

$$
\begin{array}{rccc}
T: & \mathbf{S} & \to & \mathbf{S} \\
 & M & \mapsto & TM = M^D \\
 & M \xrightarrow{f} N & \mapsto & \begin{array}{rccc} T(f): & M^D & \to & N^D \\ & t & \mapsto & (f \circ t)(0) \end{array}
\end{array}
$$

Morfismo Ponto-Base

Morfismo ponto-base de TM:

Morfismo Ponto-Base

Morfismo ponto-base de TM:

$$\begin{aligned}\pi: \quad TM \quad &\rightarrow \quad M \\ D \xrightarrow{t} R \quad &\mapsto \quad t(0) = x,\end{aligned}$$

Espaço Tangente

espaço tangente a M em x $\leftrightsquigarrow T_xM = \pi^{\dashv}[\{x\}]$

Campo Vetorial Tangente a Uma Variedade

- $(M, \mathfrak{A})$;

Campo Vetorial Tangente a Uma Variedade

- $(M, \mathfrak{A})$;
- $$\begin{array}{rccc} X: & M & \to & TM \\ & x & \mapsto & (x, y(x)) \end{array}$$
- $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Campo Vetorial Tangente

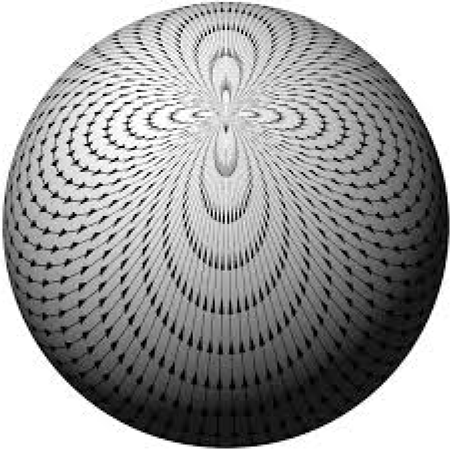


Figura: Campo Vetorial Tangente à esfera $\mathbb{S}^2$

Campo Vetorial Tangente a M

Compo vetorial tangente a M: é um morfismo $\tau : M \to TM$ tal que:

Campo Vetorial Tangente a M

Compo vetorial tangente a M: é um morfismo $\tau : M \to TM$ tal que:

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "id_M"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] & M \end{tikzcd}$$

k-Formas em $\mathbb{R}^n$ no Contexto Analítico

- $x \in \mathbb{R}^n$

k-Formas em $\mathbb{R}^n$ no Contexto Analítico

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \overbrace{T_x\mathbb{R}^n \times \cdots \times T_x\mathbb{R}^n}^{k \text{ vezes}} \to \mathbb{R}\ k - \text{linear alternada}\}$

k-Formas em $\mathbb{R}^n$ no Contexto Analítico

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \overbrace{T_x\mathbb{R}^n \times \cdots \times T_x\mathbb{R}^n}^{k \text{ vezes}} \to \mathbb{R} \ k - \text{linear alternada}\}$
- $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n)^*$

$k-$Formas no Contexto Sintético

$k-$Forma Diferencial em M é um morfismo:

$k-$Formas no Contexto Sintético

$k-$Forma Diferencial em M é um morfismo:

$$\omega : \overbrace{M^D \times_M M^D \times_M \cdots \times_M M^D}^{k \text{ fatores}} \to R,$$

$k-$Formas no Contexto Sintético

$k-$**Forma Diferencial em** M é um morfismo:

$$\omega : \overbrace{M^D \times_M M^D \times_M \cdots \times_M M^D}^{k \text{ fatores}} \to R,$$

$$M^D \times_M M^D \times_M \cdots \times_M M^D =$$

$$= [\![(t_1, \cdots, t_k) \mid t_1, \cdots, t_n \in M^D, \overbrace{t_1(0) = t_2(0) = \cdots = t_k(0)}^{\text{mesmo ponto-base}}]\!]$$

$k-$Formas no Contexto Sintético

tal que:

$k-$Formas no Contexto Sintético

tal que:

- $(\forall \lambda \in R)(\omega(t_1, \cdots, \lambda \cdot t_i, \cdots, t_k) = \lambda \cdot \omega(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_k))$

tal que:

- $(\forall \lambda \in R)(\omega(t_1, \cdots, \lambda \cdot t_i, \cdots, t_k) = \lambda \cdot \omega(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_k))$
- $(\forall \sigma \in S_k)(\omega(t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(i)}, \cdots, t_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_n))$

Derivação de campos vetoriais tangentes a uma superfície ao longo de curvas.

Conexão Afim, ∇

Derivação de campos vetoriais tangentes a uma superfície ao longo de curvas.
Fazer transporte paralelo ao longo de curvas na superfície.

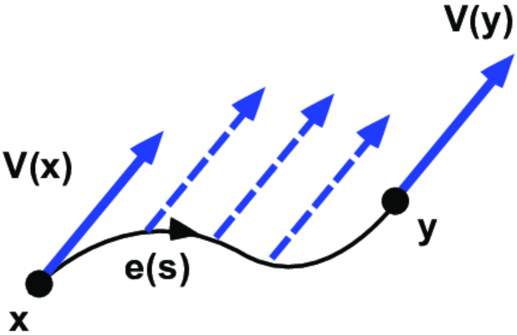


Figura: Transporte paralelo de vetor tangente ao longo de uma curva

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;
- $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;
- $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$
- $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$:

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;
- $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$
- $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$:
  - $\nabla(f \cdot X + g \cdot Y, Z) = f \cdot \nabla(X, Y) + g \cdot \nabla(Y, Z)$

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;
- $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$
- $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:
  - $\nabla(f \cdot X + g \cdot Y, Z) = f \cdot \nabla(X, Y) + g \cdot \nabla(Y, Z)$
  - $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$

Conexão Afim no Contexto Analítico

- $(M, \mathfrak{A})$
- $\mathcal{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M;
- $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$
- $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:
  - $\nabla(f \cdot X + g \cdot Y, Z) = f \cdot \nabla(X, Y) + g \cdot \nabla(Y, Z)$
  - $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$
  - $\nabla(X, f \cdot Y) = f \cdot \nabla(X, Y) + X(f) \cdot Y$

Conexão Afim

"Uma variedade com uma conexão afim é uma variedade que, na vizinhança imediata de qualquer um de seus pontos, manifesta todas as propriedades de um espaço afim e na qual se tem uma lei que relaciona duas vizinhanças infinitesimalmente próximas".(Élie Cartan)

Conexão Afim

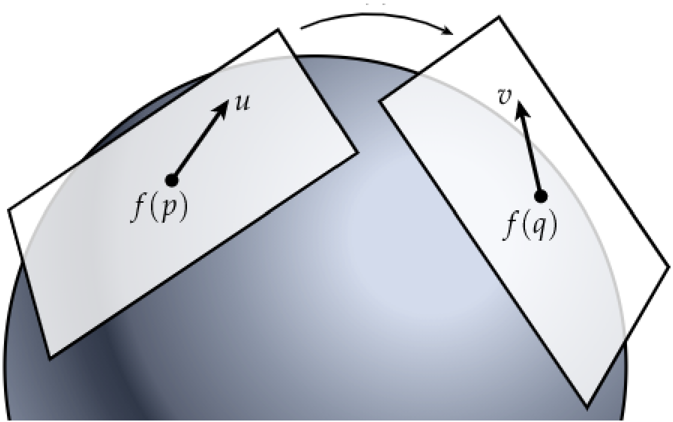


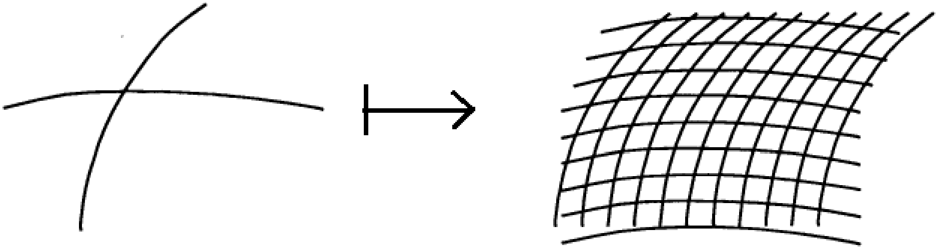
Figura: Espaços tangentes em pontos distintos

Pontos "infinitesimalmente próximos"

$$x \sim y \leftrightsquigarrow x - y \in D$$

Conexão segundo Kock & Reyes

par de vetores tangentes de mesmo ponto-base $\mapsto$ "micro-quadrado tangente"



Conexão no Fibrado Tangente

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

Conexão no Fibrado Tangente

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D \times D}, \text{ tal que:}$$

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D}, \text{ tal que:}$$

- $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1)$;

Conexão no Fibrado Tangente

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D}, \text{ tal que:}$$

- $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1)$;
- $\nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2)$;

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D}, \text{ tal que:}$$

- $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1)$;
- $\nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2)$;
- $\nabla(\lambda \cdot t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(\lambda \cdot d_1, d_2)$;

Conexão no Fibrado Tangente de M é um morfismo:

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D}, \text{ tal que:}$$

- $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1)$;
- $\nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2)$;
- $\nabla(\lambda \cdot t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(\lambda \cdot d_1, d_2)$;
- $\nabla(t_1, \lambda \cdot t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(d_1, \lambda \cdot d_2)$.

Um **microfluxo** em M é:

Microfluxos

Um **microfluxo** em M é:

$$\phi : M \times D \to M$$

Tudo *naturalmente* equivalente...

$$\frac{\tau : M \to M^D}{\widehat{\tau} : M \times D \to M} : \quad \widehat{\tau}(x, d) = \tau(x)(d)$$

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:

Integração

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:
    1. $(\forall x \in R)(x \leq x)$;

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:
  1. $(\forall x \in R)(x \leq x)$;
  2. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y)\&(y \leq z) \to (x \leq z))$

Integração

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:
    1. $(\forall x \in R)(x \leq x)$;
    2. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y)\&(y \leq z) \to (x \leq z))$
    3. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y) \to (x + z \leq y + z))$

Integração

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:
    1. $(\forall x \in R)(x \leq x)$;
    2. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y)\&(y \leq z) \to (x \leq z))$
    3. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y) \to (x + z \leq y + z))$
    4. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)((x \leq y)\&(0 \leq t) \to (x \cdot t \leq y \cdot t))$

Integração

- R munido de uma pré-ordem $\leq \rightarrowtail R \times R$ tal que:

  1. $(\forall x \in R)(x \leq x)$;
  2. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y)\&(y \leq z) \to (x \leq z))$
  3. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)((x \leq y) \to (x + z \leq y + z))$
  4. $(\forall x \in R)(\forall y \in R)((x \leq y)\&(0 \leq t) \to (x \cdot t \leq y \cdot t))$
  5. $0 \leq e$
  6. $(\forall d \in D)((0 \leq d)\&(d \leq 0))$ [**ausência da propriedade antissimétrica**]

Dados $a, b \in R$ com $(a \leq b)$, o **intervalo** $[a, b]$ é:

Observação:

$$(\forall d \in D)([a, b] = [a, b + d])$$

Notação:: $|[a, b]| = [a, b]$.

Integração

Dados $a, b \in R$ com $(a \leq b)$, o **intervalo** $[a, b]$ é:

$$[a, b] = \llbracket x \in R \mid a \leq x \leq b \rrbracket$$

Integração

Dados $a, b \in R$ com $(a \leq b)$, o **intervalo** $[a, b]$ é:

$$[a, b] = [\![x \in R \mid a \leq x \leq b]\!]$$

Observação:

Integração

Dados $a, b \in R$ com $(a \leq b)$, o **intervalo** $[a, b]$ é:

$$[a, b] = \llbracket x \in R \mid a \leq x \leq b \rrbracket$$

Observação:

$$(\forall d \in D)([a, b] = [a, b + d])$$

Integração

Dados $a, b \in R$ com $(a \leq b)$, o **intervalo** $[a, b]$ é:

$$[a, b] = [\![x \in R \mid a \leq x \leq b]\!]$$

Observação:

$$(\forall d \in D)([a, b] = [a, b + d])$$

Notação:: $|[a, b]| = [a, b]$.

Axioma de Integração: Para qualquer $f : [0,1] \to R$, existe um único $g : [0,1] \to R$ tal que:

Axioma de Integração: Para qualquer $f : [0,1] \to R$, existe um único $g : [0,1] \to R$ tal que:

- $g' = f$

Axioma de Integração: Para qualquer $f : [0,1] \to R$, existe um único $g : [0,1] \to R$ tal que:

- $g' = f$
- $g(0) = 0$.

Definição :

$$\int_0^1 f(x)dx = g(1)[= g(1) - g(0)]$$

Teorema : Para quaisquer $a, b \in R$, $a \leq b$, $f : [a, b] \to R$, existe um único $g : [a, b] \to R$ tal que:

Integração

Teorema : Para quaisquer $a, b \in R$, $a \leq b$, $f : [a, b] \to R$, existe um único $g : [a, b] \to R$ tal que:

- $g' = f$

Integração

Teorema : Para quaisquer $a, b \in R$, $a \leq b$, $f : [a, b] \to R$, existe um único $g : [a, b] \to R$ tal que:

- $g' = f$
- $g(a) = 0$.

Integração

Definição :

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)[= g(b) - g(a)]$$

Linearidade da Integração

$$\begin{array}{rccc} \displaystyle\int_a^b : & R^{[a,b]} & \longrightarrow & R \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array} \quad \text{é linear}$$

Linearidade da Integração

$$\begin{aligned}\int_a^b : \quad R^{[a,b]} &\to R \\ f &\mapsto \int_a^b f(x)dx\end{aligned} \quad \text{é linear}$$

- $f, g : [a, b] \to R \Rightarrow \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Linearidade da Integração

$$\begin{array}{rccc} \displaystyle\int_a^b : & R^{[a,b]} & \to & R \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array} \quad \text{é linear}$$

- $f, g : [a, b] \to R \Rightarrow \displaystyle\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\lambda \in R, f : [a, b] \to R \Rightarrow \displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$

Linearidade da Integração

$$\begin{array}{rccc} \displaystyle\int_a^b : & R^{[a,b]} & \to & R \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array} \quad \text{é linear}$$

- $f, g : [a, b] \to R \Rightarrow \displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\lambda \in R, f : [a, b] \to R \Rightarrow \displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$

Lema de Hadammard

- $a, b \in R, a \leq b$

Lema de Hadammard

- $a, b \in R, a \leq b$
- $x, y \in |[a, b]|, f : |[a, b]| \to R;$

Lema de Hadammard

- $a, b \in R, a \leq b$
- $x, y \in |[a, b]|, f : |[a, b]| \to R;$
- $\exists t \in |[0, 1]|$ tal que $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot \int_0^1 f'(\overbrace{x + t \cdot (y - x)}^{\in |[a,b]|})dx$

Referências

Principais referências utilizadas

[1] Carmo, M.P. *Formas Diferenciais e Aplicações*, IMPA, 1983.

[2] Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[3] Lavendhomme, R. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry, Kluwer Academic Press, 1996.*

[4] Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2006.

[5] Kostecki, R., *Differential Geometry in Toposes*, disponível em `https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/sdg.pdf`

[6] Pêgas, L., *Um Panorama da Geometria Diferencial Sintética*, disponível em `https://www.ime.usp.br/~lhp/main_files/seminario-Luiz-MAT6603.pdf`

[7] Schulman, M., *Synthetic Differential Geometry*, disponível em `https://home.sandiego.edu/~shulman/papers/sdg-pizza-seminar.pdf`