

Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos - Aula 3

Prof. Jean Cerqueira Berni & Prof. Hugo Luiz Mariano



jeancb@ime.usp.br

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

(SDG)₁ Em $\mathcal{C}$ podemos definir $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ com $0 \neq e$, que admite D como subobjeto não trivial;

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

(SDG)₁ Em $\mathcal{C}$ podemos definir $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ com $0 \neq e$, que admite D como subobjeto não trivial;

(SDG)₂ Dado $f : D \rightarrow R$, $\exists! b \in R$ tal que
 $(\forall d \in D)(f(a + d) = f(a) + b \cdot d)$

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

(SDG)₁ Em $\mathcal{C}$ podemos definir $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ com $0 \neq e$, que admite D como subobjeto não trivial;

(SDG)₂ Dado $f : D \rightarrow R$, $\exists! b \in R$ tal que
 $(\forall d \in D)(f(a + d) = f(a) + b \cdot d)$

(SDG)₃ $\hookrightarrow R \times R$ compatível com a estrutura de anel;

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$$\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

(SDG)₁ Em $\mathcal{C}$ podemos definir $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ com $0 \neq e$, que admite D como subobjeto não trivial;

(SDG)₂ Dado $f : D \rightarrow R$, $\exists! b \in R$ tal que
 $(\forall d \in D)(f(a + d) = f(a) + b \cdot d)$

(SDG)₃ $\langle \cdot \rangle \rightarrow R \times R$ compatível com a estrutura de anel;

(SDG)₄ $(\forall x \in R)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in R)(x \cdot y = e))$

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$(\text{SDG})_5 \quad f : R \rightarrow R, x \in R:$

$$0 < f'(x) \Rightarrow$$

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

$(SDG)_5 \quad f : R \rightarrow R, x \in R:$

$$0 < f'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [(\exists \varepsilon > 0)(\forall y, w \in R)((x - \varepsilon) < y < w < (x + \varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(y) < f(w)] \end{aligned}$$

Axiomas da Geometria Diferencial Sintética

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

(SDG)₅ $f : R \rightarrow R, x \in R$:

$$0 < f'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [(\exists \varepsilon > 0)(\forall y, w \in R)((x - \varepsilon) < y < w < (x + \varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(y) < f(w)] \end{aligned}$$

(SDG)₆ $\forall f : [0, 1] \rightarrow R, \exists! g : [0, 1] \rightarrow R$ tal que $g' = f$ e $g(0) = 0$.

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria com limites finitos;

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria com limites finitos;
- ▶ $\mathcal{C}$ deve dispor de uma noção de “pertencimento”;

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria com limites finitos;
- ▶ $\mathcal{C}$ deve dispor de uma noção de “pertencimento”;
- ▶ $R \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $R \neq \llbracket 0 \rrbracket$;

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria com limites finitos;
- ▶ $\mathcal{C}$ deve dispor de uma noção de “pertencimento”;
- ▶ $R \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $R \neq \llbracket 0 \rrbracket$;
- ▶ $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \rightsquigarrow R$ não trivial;
- ▶ Vale o **Axioma de Kock-Lawvere** (e os demais);

Modelos para a Geometria Diferencial Sintética

Que tipo de categoria, $\mathcal{C}$, devemos usar para interpretar a GDS?

Categoria Cartesiano-Fechada

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

Categoria Cartesiano-Fechada

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

- ▶ $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;

Categoria Cartesiano-Fechada

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria cartesiano-fechada

- ▶ $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
- ▶ Para todo $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, funtor:

$$\begin{array}{ccc} \cdot \times A : & \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{C} \\ & B & \mapsto B \times A \\ & (B \xrightarrow{f} C) & \mapsto B \times A \xrightarrow{f \times \text{id}_A} C \times A \end{array}$$

Categoria Cartesiano-Fechada

admite adjunto à direita, que denotamos por:

Categoria Cartesiano-Fechada

admite adjunto à direita, que denotamos por:

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^A : & \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{C} \\ & B & \mapsto B^A \end{array}$$

Monomorfismos

► $\mathcal{C}$ categoria, $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $A \xrightarrow{f} B$ é **monomorfismo** sse:

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $A \xrightarrow{f} B$ é **monomorfismo** sse:
- ▶ $\forall C, \forall g, h : C \rightarrow A$ tais que:

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $A \xrightarrow{f} B$ é **monomorfismo** sse:
- ▶ $\forall C, \forall g, h : C \rightarrow A$ tais que:

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Tem-se $h = g$

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $A \xrightarrow{f} B$ é **monomorfismo** sse:
- ▶ $\forall C, \forall g, h : C \rightarrow A$ tais que:

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Tem-se $h = g$
- ▶ **Notação:** $A \xrightarrow{f} B$.

Monomorfismos

► **Sets** $\Rightarrow$ funções injetoras;

Monomorfismos

- ▶ **Sets** $\Rightarrow$ funções injetoras;
- ▶ **Grp** $\Rightarrow$ homomorfismos de grupo injetores;

Monomorfismos

- ▶ **Sets** $\Rightarrow$ funções injetoras;
- ▶ **Grp** $\Rightarrow$ homomorfismos de grupo injetores;
- ▶ **Top** $\Rightarrow$ funções contínuas injetoras;

Monomorfismos

- ▶ **Sets** $\Rightarrow$ funções injetoras;
- ▶ **Grp** $\Rightarrow$ homomorfismos de grupo injetores;
- ▶ **Top** $\Rightarrow$ funções contínuas injetoras;
- ▶ **Man** $\Rightarrow$ funções suaves injetoras;

Monomorfismos

► $\mathcal{C}$ categoria;

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria;
- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $B \xrightarrow{f} A, C \xrightarrow{g} A$;

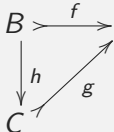
Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria;
- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $B \xrightarrow{f} A, C \xrightarrow{g} A$;
- ▶ $(B \xrightarrow{f} A) \sim (C \xrightarrow{g} A)$ sse:

Monomorfismos

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria;
- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ $B \xrightarrow{f} A, C \xrightarrow{g} A$;
- ▶ $(B \xrightarrow{f} A) \sim (C \xrightarrow{g} A)$ sse:

$\exists B \xrightarrow{h} C$ isomorfismo tal que



comuta



Subobjetos

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria qualquer

Subobjetos

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria qualquer

► $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

Subobjetos

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria qualquer

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\mathbf{Mono}(A) = \{B \xrightarrow{f} A \mid (B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})) \& (f \text{ monomorfismo})\}$

Subobjetos

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria qualquer

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\mathbf{Mono}(A) = \{B \xrightarrow{f} A \mid (B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})) \& (f \text{ monomorfismo})\}$
- ▶ $\mathbf{Sub}(A) = \frac{\mathbf{Mono}(A)}{\sim}$

Definição:

$\mathcal{C}$ categoria qualquer

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\mathbf{Mono}(A) = \{B \xrightarrow{f} A \mid (B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})) \& (f \text{ monomorfismo})\}$
- ▶ $\mathbf{Sub}(A) = \frac{\mathbf{Mono}(A)}{\sim}$
- ▶ Um **subobjeto** de A : $[B \xrightarrow{f} A]$.

Ordem em $\text{Sub}(A)$

► $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

Ordem em $\text{Sub}(A)$

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\text{Sub}(A)$

Ordem em $\text{Sub}(A)$

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\text{Sub}(A)$
- ▶

$$[B \xrightarrow{f} A] \leq [C \xrightarrow{g} A] \iff$$

$\exists B \xrightarrow{h} C$ tal que

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow h & \nearrow g & \\ C & & \end{array} \text{ comuta}$$

Ordem em $\text{Sub}(A)$

- ▶ $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ $\text{Sub}(A)$
- ▶

$$[B \xrightarrow{f} A] \leq [C \xrightarrow{g} A] \iff$$

$\exists B \xrightarrow{h} C$ tal que $B \xrightarrow{f} A$ comuta

```
graph LR; B -- f --> A; B -- h --> C; C -- g --> A;
```

- ▶ $\mathcal{C}$ “bem potenciada” $\iff (\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}))$

$((\text{Sub}(A), \leq))$ é um conjunto parcialmente ordenado)

Classificador de Subobjetos

Definição:

- ▶ $\Omega \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ (“valores-verdade de $\mathcal{C}$ ”)

Classificador de Subobjetos

Definição:

- ▶ $\Omega \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ (“valores-verdade de $\mathcal{C}$ ”)
- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$ tais que:

$$(\forall m : B \multimap A)(\exists! \chi_m : A \rightarrow \Omega) \text{ tal que:}$$

Definição:

- ▶ $\Omega \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ (“valores-verdade de $\mathcal{C}$ ”)
- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$ tais que:

$(\forall m : B \rightrightarrows A)(\exists ! \chi_m : A \rightarrow \Omega)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} B & \rightrightarrows^m & A \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi_m \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

é pullback. $(\Omega, \mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega)$

O que é um topos?

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ com:

O que é um topos?

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ com:

- ▶ objeto terminal, **1**, e pullbacks;

O que é um topos?

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ com:

- ▶ objeto terminal, **1**, e pullbacks;
- ▶ cartesiano-fechada;

O que é um topos?

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ com:

- ▶ objeto terminal, **1**, e pullbacks;
- ▶ cartesiano-fechada;
- ▶ classificador de subobjetos

Exemplos de Topoi

- ▶ **Sets** é um topos;

Exemplos de Topoi

- ▶ **Sets** é um topos;
- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\Rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, onde:

Exemplos de Topoi

- ▶ **Sets** é um topos;
- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\Rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, onde:

$$\text{Obj}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets} \mid F \text{ funtor}\}$$

Exemplos de Topoi

- ▶ **Sets** é um topos;
- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\Rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, onde:

$$\mathbf{Obj}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets} \mid F \text{ funtor}\}$$

$$\mathbf{Mor}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F \xRightarrow{\eta} G \mid \eta \text{ transformação natural}\}$$

é um topos;

Exemplos de Topoi

- ▶ **Sets** é um topos;
- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\Rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, onde:

$$\text{Obj}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets} \mid F \text{ funtor}\}$$

$$\text{Mor}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F \xRightarrow{\eta} G \mid \eta \text{ transformação natural}\}$$

é um topos;

- ▶ **Notação:**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\bullet} : & \mathcal{C}^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Sets} \\ & D & \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C) \end{array}$$

Topos de Pré-Feixes

► $F : I \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ um diagrama de pré-feixes $\Rightarrow$

Topos de Pré-Feixes

► $F : I \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ um diagrama de pré-feixes $\Rightarrow$

$$(\varinjlim F_i)(C) \cong \varinjlim F_i(C)$$

$$(\varprojlim F_i)(C) \cong \varprojlim F_i(C)$$

Topos de Pré-Feixes

► $F : I \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ um diagrama de pré-feixes $\Rightarrow$

$$(\varinjlim F_i)(C) \cong \varinjlim F_i(C)$$

$$(\varprojlim F_i)(C) \cong \varprojlim F_i(C)$$

► $F, G \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}, G^F(C) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Nat}(C^\bullet \times F, G)$

- ▶ $F : I \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ um diagrama de pré-feixes $\Rightarrow$

$$(\varinjlim F_i)(C) \cong \varinjlim F_i(C)$$

$$(\varprojlim F_i)(C) \cong \varprojlim F_i(C)$$

- ▶ $F, G \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}, G^F(C) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Nat}(C^\bullet \times F, G)$
- ▶ “pré-feixe de sub-pré-feixes de F ”, $\mathcal{P}(F)$, é o pré-feixe definido por:

$$\mathcal{P}(F)(C) = \{G \mid G \text{ é sub-pré-feixe de } C^\bullet \times F\}$$

Topos de Pré-Feixes



$$\frac{S \subset G \times F}{G \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(F)}.$$

Topos de Pré-Feixes



$$\frac{S \subset G \times F}{G \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(F)}.$$

- ▶ (“relações”) $\mathcal{P}(G \times F) \cong \text{Hom}(F, \mathcal{P}(G));$

Topos de Pré-Feixes



$$\frac{S \subset G \times F}{G \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(F)}.$$

- ▶ (“relações”) $\mathcal{P}(G \times F) \cong \text{Hom}(F, \mathcal{P}(G))$;
- ▶ Em particular, $(G = \mathcal{P}(X), F = X)$



$$\frac{S \subset G \times F}{G \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(F)}.$$

- ▶ (“relações”) $\mathcal{P}(G \times F) \cong \text{Hom}(F, \mathcal{P}(G))$;
- ▶ Em particular, $(G = \mathcal{P}(X), F = X)$

$$\frac{S \subset X \times \mathcal{P}(X)}{\text{Hom}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X))} \curvearrowright$$

$$\frac{\in_X \subset X \times \mathcal{P}(X)}{\text{id}_{\mathcal{P}(X)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)} \curvearrowright$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

► $1 \xrightarrow{\top} \Omega;$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$;
- ▶ $\mathcal{E}$ tem colimites finitos $\Rightarrow \mathbf{0} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$;
- ▶ $\mathcal{E}$ tem colimites finitos $\Rightarrow \mathbf{0} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ $\perp : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \downarrow ! & & \downarrow \perp \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

► $1 \xrightarrow{\top} \Omega;$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$;
- ▶ $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\perp} & \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \neg \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

► $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\langle \top, \top \rangle} & \Omega \times \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \wedge \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- ▶ $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\langle \top, \top \rangle} & \Omega \times \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \wedge \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

- ▶ $\leq$ é o equalizador das setas:

$$\leq \xrightarrow{\text{eq}} \Omega \times \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{\wedge} \\ \xrightarrow{\pi_1} \end{array} \Omega$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

► $\rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \leq & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \times \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \rightarrow \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- $\rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \leq & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \times \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \rightarrow \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

- Define-se $\vee: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$

Estrutura de Álgebra de Heyting em Ω

- ▶ $\rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ única seta tal que:

$$\begin{array}{ccc} \leq & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \times \Omega \\ \downarrow ! & & \downarrow \rightarrow \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array} \quad \text{é pullback}$$

- ▶ Define-se $\vee: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$
- ▶ $(\Omega, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$ álgebra de Heyting.

Semântica do Cálculo Proposicional em um Topos

► $\Phi_0 = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ conjunto de fórmulas atômicas;

Semântica do Cálculo Proposicional em um Topos

- ▶ $\Phi_0 = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ conjunto de fórmulas atômicas;
- ▶ **valoração:**

$$\begin{array}{lll} V : \Phi_0 & \rightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1}, \mathcal{E}) \\ \varphi_i & \mapsto & V(\varphi_i) : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \end{array}$$

Verofuncionalidade

- ▶ Φ conjunto das sentenças;

Verofuncionalidade

► Φ conjunto das sentenças;



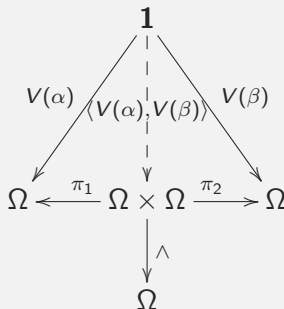
$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\quad \tilde{V} \quad} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1}, \mathcal{E}) \\ \uparrow & \nearrow V & \\ \bigcup & & \\ \Phi_0 & & \end{array}$$

Verofuncionalidade

► $(\forall \alpha \in \Phi)(V(\neg \alpha) = \neg \circ V(\alpha))$

Verofuncionalidade

- ▶ $(\forall \alpha \in \Phi)(V(\neg \alpha) = \neg \circ V(\alpha))$
- ▶ $(\forall \alpha, \beta \in \Phi)(V(\alpha \wedge \beta) = \wedge \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle)$, onde:



Verofuncionalidade

► $(\forall \alpha, \beta \in \Phi)(V(\alpha \vee \beta) = \vee \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle)$

Verofuncionalidade

- ▶ $(\forall \alpha, \beta \in \Phi)(V(\alpha \vee \beta) = \vee \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle)$
- ▶ $(\forall \alpha, \beta \in \Phi)(V(\alpha \rightarrow \beta) = \rightarrow \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle)$

Complemento de Subobjetos

- Complemento de um subobjeto representado por $f : B \rightrightarrows A$:

$$\begin{array}{ccc} \neg B & \xrightarrow{\neg f} & A \\ \downarrow ! & & \downarrow \neg \circ \chi_f \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\tau} & \Omega \end{array}$$

Interseção de Subobjetos

- Interseção de subobjetos representados por $f : B \rightrightarrows A$, $g : C \rightrightarrows A$:

$$\begin{array}{ccc} B \cap C & \xrightarrow{f \cap g} & A \\ \downarrow ! & & \downarrow \wedge \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\tau} & \Omega \end{array}$$

União de Subobjetos

- União de subobjetos representados por $f : B \rightrightarrows A$,
 $g : C \rightrightarrows A$:

$$\begin{array}{ccc} B \cup C & \xrightarrow{f \cup g} & A \\ \downarrow ! & & \downarrow \vee \langle \chi_f, \chi_g \rangle \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\tau} & \Omega \end{array}$$

Sub (A)

$(\text{Sub}(A), \cap, \cup)$ é um **reticulado**.

Definição:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;

Definição:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;
- ▶ $(\text{Open}(X), \subseteq)$ “categoria”:

Definição:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;
- ▶ $(\text{Open}(X), \subseteq)$ “categoria”:

$$\text{Hom}_{\text{Open}(X)^{\text{op}}}(U, V) = \begin{cases} \{\rho_U^V : V \xrightarrow{\text{op}} U\} & \text{se } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Feixes sobre um Espaço Topológico

► $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor, $s \in F(U)$ “seção”

Feixes sobre um Espaço Topológico

- ▶ $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor, $s \in F(U)$ “seção”
- ▶ F é **feixe** se:
 - ▶ $\forall U \in \tau, \forall \{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura aberta de U

Feixes sobre um Espaço Topológico

- ▶ $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor, $s \in F(U)$ “seção”
- ▶ F é **feixe** se:
 - ▶ $\forall U \in \tau, \forall \{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura aberta de U
 - ▶ Se $(s_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} F(U_\alpha)$ é tal que:

$$(\forall \alpha, \beta \in \Lambda) \left(F(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha})(s_\alpha) = F(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta})(s_\beta) \right)$$

Feixes sobre um Espaço Topológico

► $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor, $s \in F(U)$ “seção”

► F é **feixe** se:

► $\forall U \in \tau, \forall \{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura aberta de U

► Se $(s_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} F(U_\alpha)$ é tal que:

$$(\forall \alpha, \beta \in \Lambda) \left(F(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha})(s_\alpha) = F(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta})(s_\beta) \right)$$

► Existe um único $s \in F(U)$ tal que:

$$(\forall \alpha \in \Lambda) \left(F(\rho_{U_\alpha}^U)(s) = s_\alpha \right)$$

Feixes sobre um Espaço Topológico

- ▶ $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ é um feixe sse, para todo $U \in \tau$ e para qualquer cobertura aberta, $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$, de U , o diagrama:

Feixes sobre um Espaço Topológico

- ▶ $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ é um feixe sse, para todo $U \in \tau$ e para qualquer cobertura aberta, $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$, de U , o diagrama:



$$F(U) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} F(U_\alpha) \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xRightarrow{d_1} \end{matrix} \prod_{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Feixes sobre um Espaço Topológico

► onde d_0 e d_1 são tais que:

Feixes sobre um Espaço Topológico

► onde d_0 e d_1 são tais que:



$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \Lambda} F(U_\alpha) & \xrightarrow{d_0} & \prod_{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda} F(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi_{\alpha\beta} \\ F(U_\alpha) & \xrightarrow{F(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha})} & F(U_{\alpha \cap \beta}) \end{array}$$

comuta (e d_1 similarmente), for um **equalizador**.

Exemplos de Topoi

► (X, τ) espaço topológico $\Rightarrow \text{Sh}(X, \tau)$ é um topos;

Pré-Topologia de Grothendieck

Motivação:

Pré-Topologia de Grothendieck

Motivação:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;

Pré-Topologia de Grothendieck

Motivação:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;
- ▶ $U \in \tau$, $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ **recobre** U se, e só se:

Motivação:

- ▶ (X, τ) espaço topológico;
- ▶ $U \in \tau$, $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ **recobre** U se, e só se:

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = U$$

Pré-Topologia de Grothendieck

► $V \subseteq U$ e $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre U então:

Pré-Topologia de Grothendieck

► $V \subseteq U$ e $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre U então:

$$\{U_\alpha \cap V \xrightarrow{f_\alpha \upharpoonright_{U_\alpha \cap V}} V \mid \alpha \in \Lambda\} \text{ recobre } V$$

$$\because \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \cap V = U \cap V = V$$

Pré-Topologia de Grothendieck

- $V \subseteq U$ e $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre U então:

$$\{U_\alpha \cap V \xrightarrow{f_\alpha|_{U_\alpha \cap V}} V \mid \alpha \in \Lambda\} \text{ recobre } V$$

$$\because \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \cap V = U \cap V = V$$

- $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$ recobre U e

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $V \subseteq U$ e $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre U então:

$$\{U_\alpha \cap V \xrightarrow{f_\alpha \upharpoonright_{U_\alpha \cap V}} V \mid \alpha \in \Lambda\} \text{ recobre } V$$

$$\because \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \cap V = U \cap V = V$$

- ▶ $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha \in \Lambda}$ recobre U e
- ▶ para todo $\alpha \in \Lambda$ $\{U_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} U_\alpha \mid \beta \in B\}$ recobre U_α , então:
- ▶

$$\{U_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_\alpha \circ f_{\alpha\beta}} U \mid (\alpha, \beta) \in \Lambda \times B\} \text{ recobre } U$$

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$\mathcal{C}$ categoria pequena com pullbacks binários, $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$\mathcal{C}$ categoria pequena com pullbacks binários, $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
O que é uma “família recobridora” de A ?

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$\mathcal{C}$ categoria pequena com pullbacks binários, $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

O que é uma “família recobridora” de A ?

► $\mathbf{Cov}(A) = \{f_\alpha : A_\alpha \rightarrow A \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre A se:

► $B \xrightarrow{f} A$ iso $\Rightarrow \{B \xrightarrow{f} A\} \in \mathbf{Cov}(A)$;

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$\mathcal{C}$ categoria pequena com pullbacks binários, $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

O que é uma “família recobridora” de A ?

► $\mathbf{Cov}(A) = \{f_\alpha : A_\alpha \rightarrow A \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre A se:

- $B \xrightarrow{f} A$ iso $\Rightarrow \{B \xrightarrow{f} A\} \in \mathbf{Cov}(A)$;
- $\{B_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(A) \& (B \xrightarrow{g} A)$
 $\Rightarrow \{A_\alpha \times_A B \xrightarrow{f'_\alpha} B \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(B)$

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$\mathcal{C}$ categoria pequena com pullbacks binários, $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

O que é uma “família recobridora” de A ?

► $\mathbf{Cov}(A) = \{f_\alpha : A_\alpha \rightarrow A \mid \alpha \in \Lambda\}$ recobre A se:

- $B \xrightarrow{f} A$ iso $\Rightarrow \{B \xrightarrow{f} A\} \in \mathbf{Cov}(A)$;
- $\{B_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(A) \& (B \xrightarrow{g} A)$
 $\Rightarrow \{A_\alpha \times_A B \xrightarrow{f'_\alpha} B \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(B)$

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha \times_A B & \xrightarrow{f'_\alpha} & B \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & A \end{array}$$

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \blacktriangleright \quad & \{A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(A) \ \& \ \forall \alpha \in \Lambda, \\ & \{A_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} A_\alpha \mid \beta \in B\} \in \mathbf{Cov}(A_\alpha) \end{aligned}$$

$$\{A_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_\alpha \circ f_{\alpha\beta}} A \mid (\alpha, \beta) \in \Lambda \times B\} \in \mathbf{Cov}(A)$$

Pré-Topologia de Grothendieck em uma Categoria

- ▶ ▶ $\{A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(A) \ \& \ \forall \alpha \in \Lambda,$
 $\{A_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} A_\alpha \mid \beta \in B\} \in \mathbf{Cov}(A_\alpha)$

$$\{A_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_\alpha \circ f_{\alpha\beta}} A \mid (\alpha, \beta) \in \Lambda \times B\} \in \mathbf{Cov}(A)$$

- ▶ $\{A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{Cov}(A), \{B_\beta \xrightarrow{g_\beta} A \mid \beta \in B\} \in \mathbf{Cov}(A)$
 tais que:

$$(\forall \beta \in B)(\exists \alpha \in \Lambda)(\exists B_\beta \rightarrow A_\alpha) \quad \begin{array}{ccc} B_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & A \\ \downarrow & \nearrow f_\alpha & \\ A_\alpha & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \{B_\beta \xrightarrow{g_\beta} A \mid \beta \in B\} \in \mathbf{Cov}(A)$$

Crivo

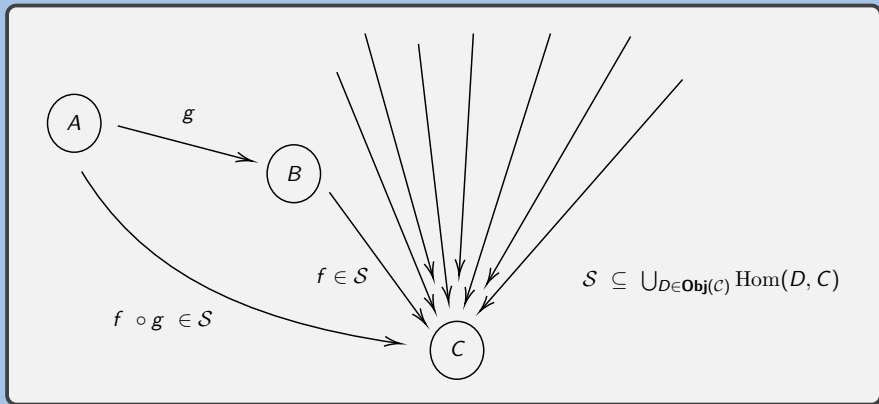
- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ Um **crivo** sobre $\mathcal{C}$ é:

Crivo

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ Um **crivo** sobre $\mathcal{C}$ é:
 - ▶ $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria, $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ Um **crivo** sobre $\mathcal{C}$ é:
 - ▶ $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$
 - ▶ $g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $\exists f \in \mathcal{S}$ com $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f)$ então:

$$f \circ g \in \mathcal{S}$$



Topologia de Grothendieck

►
$$\begin{aligned} J : \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) &\rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathcal{C}))) \\ C &\mapsto J(C) = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ crivo sobre } C\} \end{aligned}$$

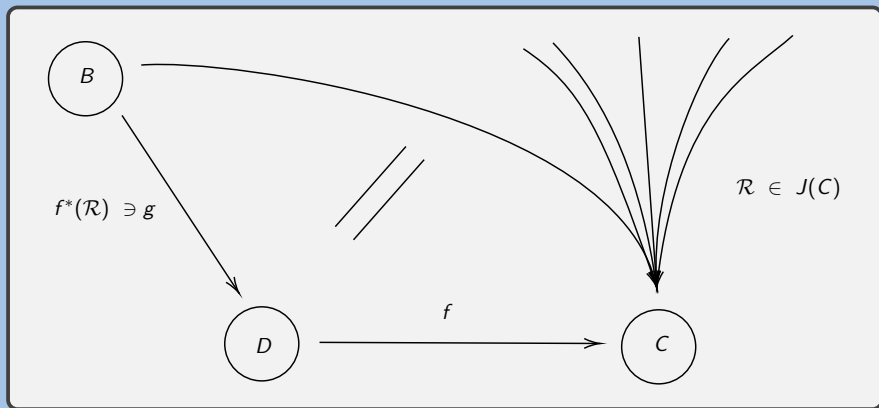
Topologia de Grothendieck

- ▶ $J: \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathcal{C})))$
 $C \mapsto J(C) = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ crivo sobre } C\}$
- ▶ $\{f \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{cod}(f) = C\} \in J(C)$

Topologia de Grothendieck

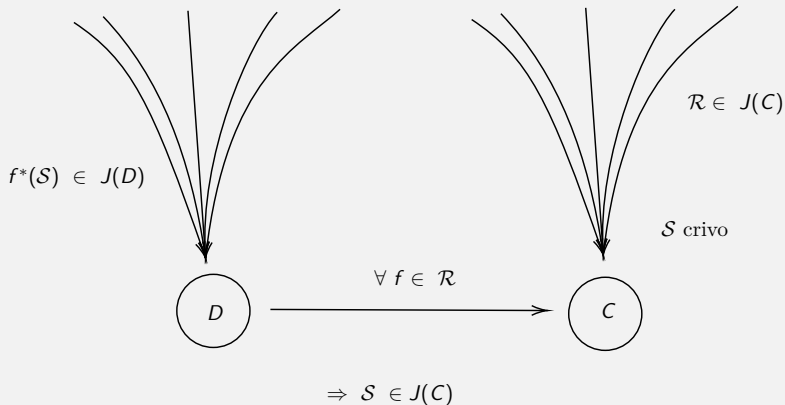
- ▶ $J: \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathcal{C})))$
 $C \mapsto J(C) = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ crivo sobre } C\}$
- ▶ $\{f \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{cod}(f) = C\} \in J(C)$
- ▶ $\mathcal{R} \in J(C)$ e $f: D \rightarrow C$ é qualquer morfismo de $\mathcal{C}$,
 $f^*(\mathcal{R}) := \{g \mid f \circ g \in \mathcal{R}\} \in J(D)$

Topologia de Grothendieck



- ▶ $\mathcal{R} \in J(C)$ e $\mathcal{S}$ é um crivo sobre C tal que para todo $(f : D \rightarrow C) \in \mathcal{R}$, $f^*(\mathcal{S}) \in J(D)$ então $\mathcal{S} \in J(C)$.

Topologia de Grothendieck



- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;

Sítio Pequeno

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $J : \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathcal{C})))$ topologia de Grothendieck em $\mathcal{C}$

Sítio Pequeno

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $J : \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathcal{C})))$ topologia de Grothendieck em $\mathcal{C}$
- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ é um **sítio pequeno**

Feixe sobre um Sítio

Um **feixe** em $(\mathcal{C}, J)$ é

► $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ tal que:

Feixe sobre um Sítio

Um **feixe** em $(\mathcal{C}, J)$ é

- ▶ $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ tal que:
 - ▶ Para todo $\mathcal{R} \in J(\mathcal{C})$,

Feixe sobre um Sítio

Um **feixe** em $(\mathcal{C}, J)$ é

- ▶ $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ tal que:
 - ▶ Para todo $\mathcal{R} \in J(C)$, para toda família $\{x_f \in F(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\}$ tal que:

$$(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f) \Rightarrow x_{f \circ g} = F(g)(x_f))$$

Feixe sobre um Sítio

Um **feixe** em $(\mathcal{C}, J)$ é

- ▶ $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ tal que:
 - ▶ Para todo $\mathcal{R} \in J(C)$, para toda família $\{x_f \in F(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\}$ tal que:

$$(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f) \Rightarrow x_{f \circ g} = F(g)(x_f))$$

- ▶ Existe um único $x \in F(C)$ tal que:

$$(\forall f \in \mathcal{R})(F(f)(x) = x_f)$$

Topos de Grothendieck

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$$

Exemplo de Topos

$(\mathcal{C}, J)$ sítio pequeno $\Rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ é um topos.

O que é mesmo um modelo para a GDS?

- ▶ Um topos munido de um objeto anel comutativo com unidade $(\mathcal{G}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$, $0 \neq e$, tal que $\mathcal{G} \models GDS$

Ou bem $R \neq \{0\}$, ou bem **Sub** (D) álgebra de Boole

► **Sub** (D) complementado $\Rightarrow "D = \{0\} \cup (D \setminus \{0\})"$

Ou bem $R \neq \{0\}$, ou bem **Sub** (D) álgebra de Boole

► **Sub** (D) complementado $\Rightarrow "D = \{0\} \cup (D \setminus \{0\})"$

$$g : D \rightarrow R$$

►
$$d \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } d \neq 0 \\ 0, & \text{se } d = 0 \end{cases} \quad \text{é função;}$$

Ou bem $R \neq \{0\}$, ou bem **Sub** (D) álgebra de Boole

► **Sub** (D) complementado $\Rightarrow "D = \{0\} \cup (D \setminus \{0\})"$

$$g : D \rightarrow R$$

►
$$d \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } d \neq 0 \\ 0, & \text{se } d = 0 \end{cases} \quad \text{é função;}$$

► **Kock-Lawvere** $\Rightarrow$

$$(\exists ! \delta \in R)(\forall d \in D)(g(0 + d) = g(0) + \delta \cdot d = \delta \cdot d)$$

Ou bem $R \neq \{0\}$, ou bem **Sub** (D) álgebra de Boole

► **Sub** (D) complementado $\Rightarrow "D = \{0\} \cup (D \setminus \{0\})"$

$$g : D \rightarrow R$$

►
$$d \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } d \neq 0 \\ 0, & \text{se } d = 0 \end{cases} \quad \text{é função;}$$

► **Kock-Lawvere** $\Rightarrow$

$$(\exists! \delta \in R)(\forall d \in D)(g(0 + d) = g(0) + \delta \cdot d = \delta \cdot d)$$

► $(\exists d \neq 0) \stackrel{R \neq \{0\}}{\Rightarrow} 1 = \delta \cdot d \Rightarrow 1^2 = \delta^2 \cdot d^2 = 0$

► $R = \{0\}$

Lógica Clássica + Kock-Lawvere = ?

- ▶ $\text{Sub}(D)$ complementado (álgebra de Boole) $\Rightarrow R = \{0\} \times$
- ▶ $\text{Sub}(D)$ pseudo-complementado. ✓

Em que tipo de categoria $\text{Sub}(\mathcal{D})$ *não* é Álgebra de Boole

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;

Em que tipo de categoria $\text{Sub}(\mathcal{D})$ *não* é Álgebra de Boole

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ categoria de pré-feixes, ou seja:

Em que tipo de categoria $\text{Sub}(\mathbf{D})$ *não* é Álgebra de Boole

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ categoria de pré-feixes, ou seja:
 - ▶ $\text{Obj}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}\}$
 - ▶ $\text{Hom}(F, G) = \{F \xRightarrow{\eta} G\}$

Em que tipo de categoria $\text{Sub}(\mathcal{D})$ *não* é Álgebra de Boole

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ categoria de pré-feixes, ou seja:
 - ▶ $\text{Obj}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}\}$
 - ▶ $\text{Hom}(F, G) = \{F \xRightarrow{\eta} G\}$
- ▶ $D : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor;

Em que tipo de categoria $\text{Sub}(D)$ *não* é Álgebra de Boole

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ categoria de pré-feixes, ou seja:
 - ▶ $\mathbf{Obj}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) = \{F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}\}$
 - ▶ $\mathbf{Hom}(F, G) = \{F \rightrightarrows G\}$
- ▶ $D : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor;
- ▶ $\text{Sub}(D) = \{S \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mid S \text{ é subfuntor de } D\}$ tem estrutura de Álgebra de Heyting, mas não de Álgebra de Boole (não é complementada).

Estrutura de Álgebra de Heyting de **Sub**(D)

- ▶ o “maior” subfuntor de D é o próprio D ;

Estrutura de Álgebra de Heyting de **Sub**(D)

- ▶ o “maior” subfuntor de D é o próprio D ;
- ▶ o “menor” subfuntor de D é $0 : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, dado por $0(C) = \emptyset$ para todo $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;

Estrutura de Álgebra de Heyting de **Sub**(D)

- ▶ o “maior” subfuntor de D é o próprio D ;
- ▶ o “menor” subfuntor de D é $0 : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, dado por $0(C) = \emptyset$ para todo $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ dados S e T , subfuntores de D , tem-se para qualquer $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $(S \vee T)(C) = S(C) \cup T(C)$ e $(S \wedge T)(C) = S(C) \cap T(C)$;

Estrutura de Álgebra de Heyting de **Sub**(D)

- ▶ o “maior” subfuntor de D é o próprio D ;
- ▶ o “menor” subfuntor de D é $0 : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, dado por $0(C) = \emptyset$ para todo $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;
- ▶ dados S e T , subfuntores de D , tem-se para qualquer $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $(S \vee T)(C) = S(C) \cup T(C)$ e $(S \wedge T)(C) = S(C) \cap T(C)$;
- ▶ se S é um subfuntor de D , então para qualquer $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, tem-se:

$$(\neg S)(C) = \{x \in D(C) \mid (\forall f : B \rightarrow C)(f(x) \notin S(B))\}$$

Estrutura de Álgebra de Heyting de **Sub**(D)

- dados S e T , subfuntores de D , para qualquer $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, tem-se:

$$\begin{aligned}(S \Rightarrow T)(C) &= \\ &= \{x \in D(C) \mid (\forall f : B \rightarrow C)(f(x) \in S(B) \Rightarrow f(x) \in T(C))\}.\end{aligned}$$

Neste “mundo”...

$$(S \vee \neg S)(C) \neq D(C)$$

Neste “mundo”...

$$(S \vee \neg S)(C) \neq D(C)$$

Princípio do Terceiro Excluído $\times$

Neste “mundo”...

$$(S \vee \neg S)(C) \neq D(C)$$

Princípio do Terceiro Excluído $\times$

Axioma de Kock-Lawvere & $R \neq \{0\}$ $\checkmark$

Neste “mundo”...

$$(S \vee \neg S)(C) \neq D(C)$$

Princípio do Terceiro Excluído $\times$

Axioma de Kock-Lawvere & $R \neq \{0\}$ $\checkmark$

Interpretar GDS em **outras** categorias;

Categorias Candidatas

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena, $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$

Categorias Candidatas

- ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena, $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ é um **topos**!

Noções de Lógica Categorial

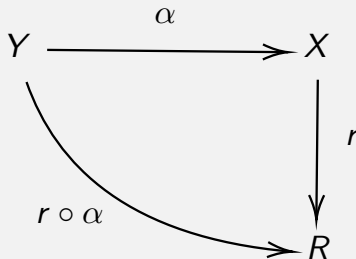
- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ Elementos *locais*, $X \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow \vdash_X r \in R$

Noções de Lógica Categórica

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ Elementos *locais*, $X \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow \vdash_X r \in R$
- ▶ $(\vdash_X r \in R) \& (Y \xrightarrow{\alpha} X) \Rightarrow (\vdash_Y r \circ \alpha \in R);$

Noções de Lógica Categórica

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ Elementos *locais*, $X \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow \vdash_X r \in R$
- ▶ $(\vdash_X r \in R) \& (Y \xrightarrow{\alpha} X) \Rightarrow (\vdash_Y r \circ \alpha \in R)$;



Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $1 \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $\mathbf{1} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow$ “elemento global de R ”:

Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $1 \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ $1 \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow$ “elemento global de R ”:
- ▶ $1 \xrightarrow{r} R$ pode ser definido em qualquer estágio $Y \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$:

Noções de Lógica Categórica

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $\mathbf{1} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{r} R \rightsquigarrow$ “elemento global de R ”:
- ▶ $\mathbf{1} \xrightarrow{r} R$ pode ser definido em qualquer estágio $Y \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow ! & \searrow r \circ ! & \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{r} & R \end{array}$$

Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ objeto anel comutativo com unidade (a.c.u.) em $\mathcal{E} \Rightarrow$

Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ objeto anel comutativo com unidade (a.c.u.) em $\mathcal{E} \Rightarrow$
- ▶ $(\forall X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E}))(\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R) \text{ tem estrutura de a.c.u.})$

Noções de Lógica Categorial

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ objeto anel comutativo com unidade (a.c.u.) em $\mathcal{E} \Rightarrow$
- ▶ $(\forall X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E}))(\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R)$ tem estrutura de a.c.u.)
- ▶ $X \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{0} R$ “elemento neutro da adição”

Noções de Lógica Categórica

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ objeto anel comutativo com unidade (a.c.u.) em $\mathcal{E} \Rightarrow$
- ▶ $(\forall X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E}))(\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R)$ tem estrutura de a.c.u.)
- ▶ $X \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{0} R$ “elemento neutro da adição”
- ▶ $X \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{e} R$ “elemento unidade”

Noções de Lógica Categorical

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ objeto anel comutativo com unidade (a.c.u.) em $\mathcal{E} \Rightarrow$
- ▶ $(\forall X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E}))(\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R)$ tem estrutura de a.c.u.)
- ▶ $X \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{0} R$ “elemento neutro da adição”
- ▶ $X \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{e} R$ “elemento unidade”
- ▶ $(Y \xrightarrow{\alpha} X) \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \alpha^* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R) & \rightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, R) \\ X \xrightarrow{r} R & \mapsto & Y \xrightarrow{r \circ \alpha} R \end{array}$$

é homomorfismo de anéis comutativos com unidade.

Noções de Lógica Categorial

► $\mathcal{E} = \mathbf{Sets}$

Noções de Lógica Categorial

► $\mathcal{E} = \mathbf{Sets}$

►
$$\frac{r \in R}{\{*\} \xrightarrow{r} R} \quad \left\langle \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \right.$$

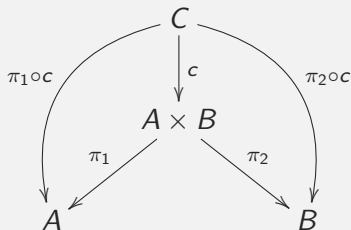
Noções de Lógica Categorial

► $\mathcal{E}$ topos

Noções de Lógica Categórica

- ▶ $\mathcal{E}$ topos

$$\frac{\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(C, A \times B)}{\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(C, A) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(C, B)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$



Noções de Lógica Categorial: Satisfatibilidade

► $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$

Noções de Lógica Categorial: Satisfatibilidade

- ▶ $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$
- ▶ O que significa $\vdash_X a \cdot b = b \cdot a$?

Noções de Lógica Categorical: Satisfatibilidade

- ▶ $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$
- ▶ O que significa $\vdash_X a \cdot b = b \cdot a$?
- ▶ $\vdash_X a \cdot b = b \cdot a$ significa:

Para $a, b \in \overbrace{\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, R)}^{\text{a.c.u.}}$ tem-se $a \cdot b = b \cdot a$

Noções de Lógica Categorial: Quantificador Universal

- ▶ $\vdash$ definida indutivamente;

Noções de Lógica Categorical: Quantificador Universal

- ▶ $\vdash$ definida indutivamente;
- ▶ $\phi(x)$ fórmula matemática tal que para quaisquer $Y \xrightarrow[\alpha]{\text{"m.m.c."}} X$ e $\vdash_Y b \in R$ já definimos:

$$\vdash_Y \phi(b).$$

(α pode ou não ocorrer na fórmula).

Noções de Lógica Categorical: Quantificador Universal

► $\vdash$ definida indutivamente;

► $\phi(x)$ fórmula matemática tal que para quaisquer $Y \xrightarrow[\alpha]{\text{"m.m.c."}} X$ e $\vdash_Y b \in R$ já definimos:

$$\vdash_Y \phi(b).$$

(α pode ou não ocorrer na fórmula).

►

$$\vdash_X \forall x \phi(x)$$

significa que para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ e **para todo** $Y \xrightarrow{b} R$,
tivermos $\vdash_Y \phi(b)$;

Noções de Lógica Categorical: Quantificador Universal

- ▶ $\vdash$ definida indutivamente;

- ▶ $\phi(x)$ fórmula matemática tal que para quaisquer $Y \xrightarrow[\alpha]{\text{"m.m.c."}} X$ e $\vdash_Y b \in R$ já definimos:

$$\vdash_Y \phi(b).$$

(α pode ou não ocorrer na fórmula).



$$\vdash_X \forall x \phi(x)$$

significa que para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ e **para todo** $Y \xrightarrow{b} R$, tivermos $\vdash_Y \phi(b)$;

- ▶ $\vdash_X (\forall x)\phi(x)$ então $\vdash_Y (\forall x)\phi(x)$ para todo Y que “sucede” X .

Noções de Lógica Categórica: Quantificador Existencial

► $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

► Dizemos que:

$$\vdash_X (\exists! x)\varphi(x)$$

sse para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ existir um único $Y \xrightarrow{b} R$ tal que $\vdash_Y \varphi(b)$.

Noções de Lógica Categorial: Implicação

► $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

Noções de Lógica Categorical: Implicação

- ▶ $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ Para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ já tenhamos definido $\vdash_Y \varphi$ e $\vdash_Y \psi$
- ▶ Dizemos que:

$$\vdash_X (\varphi \rightarrow \psi)$$

sse para qualquer $Y \xrightarrow{\alpha} X$ tal que $\vdash_Y \varphi$ também temos $\vdash_Y \psi$

Noções de Lógica Categorial: Conjunção

► $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

Noções de Lógica Categorical: Conjunção

- ▶ $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ Para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ já tenhamos definido $\vdash_Y \varphi$ e $\vdash_Y \psi$
- ▶ Dizemos que:

$$\vdash_X (\varphi \wedge \psi)$$

sse $\vdash_X \varphi$ e $\vdash_X \psi$.

Observe que

► Dados $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$

Observe que

- ▶ Dados $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$
- ▶ $\vdash_X a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow$

Observe que

- ▶ Dados $\vdash_X a \in R, \vdash_X b \in R$
- ▶ $\vdash_X a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow$
- ▶ Para todo $Y \xrightarrow{\alpha} X$ tem-se:

$$\vdash_Y \alpha^*(a) \cdot \alpha^*(b) = \alpha^*(b) \cdot \alpha^*(a)$$

Princípio da Extensionalidade para Funções

► $\mathcal{E}$ topoi;

Princípio da Extensionalidade para Funções

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $R_1 \xrightarrow{f} R_2, R_1 \xrightarrow{g} R_2$ setas;

Princípio da Extensionalidade para Funções

- ▶ $\mathcal{E}$ topos;
- ▶ $R_1 \xrightarrow{f} R_2, R_1 \xrightarrow{g} R_2$ setas;
- ▶ $(f = g) \iff \vdash_1 (\forall x)(f \circ x = g \circ x)$

Kock-Lawvere em Topoi

► $(\forall \mathcal{F} \in R^D)(\exists!(a, b) \in R \times R)(\forall d \in D)(\mathcal{F}(d) = a + b \cdot d)$

Kock-Lawvere em Topoi

- ▶ $(\forall \mathcal{F} \in R^D)(\exists!(a, b) \in R \times R)(\forall d \in D)(\mathcal{F}(d) = a + b \cdot d)$
- ▶ Para qualquer $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e para qualquer $X \xrightarrow{f} R^D$

Kock-Lawvere em Topoi

- ▶ $(\forall \mathcal{F} \in R^D)(\exists!(a, b) \in R \times R)(\forall d \in D)(\mathcal{F}(d) = a + b \cdot d)$
- ▶ Para qualquer $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e para qualquer $X \xrightarrow{f} R^D$
- ▶ existir um único $X \xrightarrow{(a,b)} R \times R$ tal que:
- ▶ $\vdash_X (\forall d \in D)(f(d) = a + b \cdot d)$

Kock-Lawvere em Topoi

- ▶ $(\forall \mathcal{F} \in R^D)(\exists!(a, b) \in R \times R)(\forall d \in D)(\mathcal{F}(d) = a + b \cdot d)$
- ▶ Para qualquer $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e para qualquer $X \xrightarrow{f} R^D$
- ▶ existir um único $X \xrightarrow{(a,b)} R \times R$ tal que:
- ▶ $\vdash_X (\forall d \in D)(f(d) = a + b \cdot d)$
- ▶ ou seja, para qualquer $Y \xrightarrow{\alpha} X$ e para todo $Y \xrightarrow{d} D$, tem-se:

$$\vdash_Y f(d) = \alpha^*(a) + \alpha^*(b) \cdot \iota(d)$$

onde $D \xrightarrow{\iota} R$.

Modelo da GDS (Dubuc)

Um **modelo para a GDS** é um par $(\mathcal{E}, \mathfrak{R})$ tal que:

Modelo da GDS (Dubuc)

Um **modelo para a GDS** é um par $(\mathcal{E}, \mathfrak{R})$ tal que:

- ▶ $\mathcal{E}$ é um topos;

Modelo da GDS (Dubuc)

Um **modelo para a GDS** é um par $(\mathcal{E}, \mathfrak{R})$ tal que:

- ▶ $\mathcal{E}$ é um topos;
- ▶ $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere em $\mathcal{E}$;

Modelo da GDS (Dubuc)

Um **modelo para a GDS** é um par $(\mathcal{E}, \mathfrak{R})$ tal que:

- ▶ $\mathcal{E}$ é um topos;
- ▶ $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere em $\mathcal{E}$;
- ▶ para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{E})$ tem-se $A^D \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$

Modelo da GDS (Dubuc)

Um **modelo para a GDS** é um par $(\mathcal{E}, \mathfrak{R})$ tal que:

- ▶ $\mathcal{E}$ é um topos;
- ▶ $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere em $\mathcal{E}$;
- ▶ para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{E})$ tem-se $A^D \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$
- ▶ $\mathbf{Hom}(D, \cdot) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva *todos* os limites indutivos

Topoi de Pré-Feixes como modelo para GDS

► $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}$

Topoi de Pré-Feixes como modelo para GDS

► $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}$



$$\mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}) =$$

$$\left\{ \frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{I} \mid (n \in \mathbb{N}) \& (I \subseteq \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ ideal}) \right\}.$$

Topoi de Pré-Feixes como modelo para GDS

► $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}$



$$\mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}) =$$

$$\left\{ \frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{I} \mid (n \in \mathbb{N}) \& (I \subseteq \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ ideal}) \right\}.$$

► $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}}$ topos;

Formulação Alternativa do Axioma de Kock-Lawvere

Axioma de Kock-Lawvere no Contexto Categorical (CCC):

- ▶ $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos;

Formulação Alternativa do Axioma de Kock-Lawvere

Axioma de Kock-Lawvere no Contexto Categorical (CCC):

- ▶ $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ um objeto anel comutativo com unidade em $\mathcal{C}$;

Formulação Alternativa do Axioma de Kock-Lawvere

Axioma de Kock-Lawvere no Contexto Categorical (CCC):

- ▶ $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ um objeto anel comutativo com unidade em $\mathcal{C}$;
- ▶ $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \rightharpoonup R$.

Formulação Alternativa do Axioma de Kock-Lawvere

Axioma de Kock-Lawvere no Contexto Categorical (CCC):

- ▶ $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos;
- ▶ $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ um objeto anel comutativo com unidade em $\mathcal{C}$;
- ▶ $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \rightarrowtail R$.

R satisfaz o **Axioma de Kock-Lawvere** se, e somente se:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : R \times R & \xrightarrow{\text{iso}} & R^D \\ (a, b) & \mapsto & \alpha(a, b) : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & R \\ d & \mapsto & a + b \cdot d \end{array} \end{array}$$

Topoi de Pré-Feixes como modelo para GDS

Neste modelo, R é:

Topoi de Pré-Feixes como modelo para GDS

Neste modelo, R é:

$$\begin{array}{rcl} R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & |A| \\ A \xrightarrow{h} B & \mapsto & |A| \xrightarrow{|h|} |B| \end{array}$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

$$\begin{aligned} & (\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) = \\ & = ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade}) \end{aligned}$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

► $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$

$$\begin{aligned} & (\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) = \\ & = ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade}) \end{aligned}$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

▶ $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $\cdot : R \times R \Rightarrow R;$

$$(\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) =$$

$$= ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade})$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

- ▶ $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$
- ▶ $\cdot : R \times R \Rightarrow R;$
- ▶ $- : R \Rightarrow R;$

$$\begin{aligned} & (\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) = \\ & = ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade}) \end{aligned}$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

▶ $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $0 : \mathbf{1} \Rightarrow R$

▶ $\cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $- : R \Rightarrow R;$

$$(\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) =$$

$$= ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade})$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

▶ $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $0 : \mathbf{1} \Rightarrow R$

▶ $\cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $- : R \Rightarrow R;$

▶ $e : \mathbf{1} \Rightarrow R;$

$$(\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) =$$

$$= ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade})$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um anel comutativo com unidade.

▶ $+, \cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $0 : \mathbf{1} \Rightarrow R$

▶ $\cdot : R \times R \Rightarrow R;$

▶ $- : R \Rightarrow R;$

▶ $e : \mathbf{1} \Rightarrow R;$

$$(\forall A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.})) =$$

$$= ((R(A), +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, e_A) \text{ é anel comutativo com unidade})$$

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um funtor representável, i.e.,

Proposição: $R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um funtor representável, i.e.,

$$R(\bullet) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}}(\mathbb{R}[X], \bullet)$$

Proposição:

$$\begin{array}{ccc} D : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}^{\text{op}} & \rightarrow & \mathbf{Sets} \\ A & \mapsto & D(A) = \{a \in A \mid a^2 = 0\} \end{array}$$

é um funtor representável, i.e.,

Proposição:

$$\begin{array}{ccc} D : \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}^{\text{op}} & \rightarrow & \mathbf{Sets} \\ A & \mapsto & D(A) = \{a \in A \mid a^2 = 0\} \end{array}$$

é um funtor representável, i.e.,

$$R(\bullet) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}^{\text{op}}}}(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet)$$

Anel dos Números Duais

$$\blacktriangleright \mathbb{R}[\varepsilon] = \frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 \rangle}$$

Anel dos Números Duais

- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 \rangle}$
- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \{a + b \cdot \varepsilon \mid (a \in \mathbb{R}) \& (b \in \mathbb{R})\}$

Anel dos Números Duais

- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 \rangle}$
- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \{a + b \cdot \varepsilon \mid (a \in \mathbb{R}) \& (b \in \mathbb{R})\}$
- ▶ $(a + b \cdot \varepsilon) + (c + d \cdot \varepsilon) = (a + c) + (b + d) \cdot \varepsilon$

Anel dos Números Duais

- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 \rangle}$
- ▶ $\mathbb{R}[\varepsilon] = \{a + b \cdot \varepsilon \mid (a \in \mathbb{R}) \& (b \in \mathbb{R})\}$
- ▶ $(a + b \cdot \varepsilon) + (c + d \cdot \varepsilon) = (a + c) + (b + d) \cdot \varepsilon$
- ▶ $(a + b \cdot \varepsilon) \cdot (c + d \cdot \varepsilon) = a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \varepsilon$

Teorema: R satisfaz (versão alternativa d) o **axioma de Kock-Lawvere**.

Teorema: R satisfaz (versão alternativa d) o **axioma de Kock-Lawvere**.

Prova: Em um estágio A qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 R^D(A) &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(A, \bullet) \times D, R) \stackrel{D \text{ representável}}{=} \\
 &= \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}(A, \bullet) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet), \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[X], \bullet)) \cong \\
 &\cong \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(A \otimes [\varepsilon], \bullet), \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(\mathbb{R}[X], \bullet)) \stackrel{\text{Yoneda}}{\cong} \\
 &\cong |\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(\mathbb{R}[X], A \otimes \mathbb{R}[\varepsilon])| = |A \otimes \mathbb{R}[\varepsilon]| \stackrel{\text{como conjunto}}{=} A \times A = \\
 &= (R \times R)(A).
 \end{aligned}$$



Teorema: R satisfaz (versão alternativa d) o **axioma de Kock-Lawvere**.

Prova: Em um estágio A qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 R^D(A) &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(A, \bullet) \times D, R) \stackrel{D \text{ representável}}{=} \\
 &= \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}(A, \bullet) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet), \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[X], \bullet)) \cong \\
 &\cong \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(A \otimes [\varepsilon], \bullet), \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(\mathbb{R}[X], \bullet)) \stackrel{\text{Yoneda}}{\cong} \\
 &\cong |\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}}(\mathbb{R}[X], A \otimes \mathbb{R}[\varepsilon])| = |A \otimes \mathbb{R}[\varepsilon]| \stackrel{\text{como conjunto}}{=} A \times A = \\
 &= (R \times R)(A).
 \end{aligned}$$



$$\therefore R^D \cong R \times R \text{ e } (\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}, R) \models \mathbf{KL}$$

$\therefore (\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-Alg}_{f.g.}}, R)$, onde R é o funtor esquecimento, é um **modelo (Dubuc)** para a **Geometria Diferencial Sintética**.

$\therefore (\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-Alg}_{f.g.}}, R)$, onde R é o funtor esquecimento, é um **modelo (Dubuc)** para a **Geometria Diferencial Sintética**.

Pontos-Fracos deste Topos

- ▶ R não é, sequer, anel local.

$$\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}} \not\models (\forall x \in R)(\forall y \in R)(x + y \text{ invertível} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \text{ invertível}) \vee (y \text{ invertível}))$$

Pontos-Fracos deste Topos

- ▶ R não é, sequer, anel local.

$$\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}} \not\models (\forall x \in R)(\forall y \in R)(x + y \text{ invertível} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \text{ invertível}) \vee (y \text{ invertível}))$$

- ▶ Não dispomos de um objeto que represente $[0, 1]$;

Pontos-Fracos deste Topos

- ▶ R não é, sequer, anel local.

$$\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}} \not\models (\forall x \in R)(\forall y \in R)(x + y \text{ invertível} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \text{ invertível}) \vee (y \text{ invertível}))$$

- ▶ Não dispomos de um objeto que represente $[0, 1]$;
- ▶ $\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{op}}$ só “contém” variedades algébricas, não “contém todas” as suaves;

Quem podemos substituir por $\mathcal{C}$?

$$\mathcal{C} = ? \Rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \models GDS$$

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $(\mathcal{G}, R)$ é um **modelo plenamente bem-adaptado** se for um modelo da GDS que satisfaz, dentre outras:

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $(\mathcal{G}, R)$ é um **modelo plenamente bem-adaptado** se for um modelo da GDS que satisfaz, dentre outras:
 - ▶ $\exists m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{G}$ pleno e fiel;

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $(\mathcal{G}, R)$ é um **modelo plenamente bem-adaptado** se for um modelo da GDS que satisfaz, dentre outras:
 - ▶ $\exists m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{G}$ pleno e fiel;
 - ▶ $m(\mathbb{R}) \cong R$

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $(\mathcal{G}, R)$ é um **modelo plenamente bem-adaptado** se for um modelo da GDS que satisfaz, dentre outras:
 - ▶ $\exists m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{G}$ pleno e fiel;
 - ▶ $m(\mathbb{R}) \cong R$
 - ▶ $f \in \mathbf{Mor}(\mathbf{Man}) \Rightarrow (m(f))' = m(f')$

Modelos sobre **Sets**

- ▶ **Man** contém o “modelo-padrão” da reta, $\mathbb{R}$;
- ▶ **Man** é tal que para todo M , $TM \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $(\mathcal{G}, R)$ é um **modelo plenamente bem-adaptado** se for um modelo da GDS que satisfaz, dentre outras:
 - ▶ $\exists m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{G}$ pleno e fiel;
 - ▶ $m(\mathbb{R}) \cong R$
 - ▶ $f \in \mathbf{Mor}(\mathbf{Man}) \Rightarrow (m(f))' = m(f')$
 - ▶ $\forall M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})(m(TM) \cong m(M)^D)$

Modelos sobre **Sets**

Sets $\mathcal{C}^\infty \text{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}$.

Referências

Principais referências utilizadas

- [1] Berni, J.C., Mariano, H.L. *A Geometria Diferencial Sintética e os Mundos onde podemos interpretá-la: um convite ao estudo dos anéis C^∞* , disponível em <https://www.ime.usp.br/~jeancb/GDS.pdf>
- [2] Goldblatt, R. *Topoi - The Categorical Analysis of Logic*, Dover Publications, 2006.
- [3] Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2006.
- [4] Lavendhomme, R. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer Academic Press, 1996.
- [5] Makkai, M., Reyes, G. *First Order Categorical Logic*, Springer Verlag, 2008.
- [6] McLarty, C., *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford Science Publications, 1995.

Obrigado!

www.ime.usp.br/~jeancb/gdsm



jeancb@ime.usp.br