

Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos - Aula 4

Prof. Jean Cerqueira Berni & Prof. Hugo Luiz Mariano



jeancb@ime.usp.br

Modelos para a Geometria Diferencial Sintética

► $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, $\mathcal{C}$ categoria pequena;

Modelos para a Geometria Diferencial Sintética

► **Sets** ^{$\mathcal{C}^{\text{op}}$} , $\mathcal{C}$ categoria pequena;

► $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$
 $A \mapsto R(A) = |A|$

Modelos para a Geometria Diferencial Sintética

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, $\mathcal{C}$ categoria pequena;
- ▶ $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$
 $A \mapsto R(A) = |A|$
- ▶ Há uma “cópia” de $\mathcal{C}$ em $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$ vale o **Axioma de Kock-Lawvere** com R funtor esquecimento; ✓

Onde podemos interpretar a GDS?

- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$ vale o **Axioma de Kock-Lawvere** com R funtor esquecimento; ✓
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$ não temos uma “cópia” de $\mathbf{Man} \times$

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

► $\mathfrak{A} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{A} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, ou seja, $+, \cdot \in \text{Func}(R \times R, R)$;

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{A} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, ou seja, $+, \cdot \in \text{Func}(R \times R, R)$;
- ▶ $- : R \rightarrow R$, ou seja, $- \in \text{Func}(R, R)$;

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, ou seja, $+, \cdot \in \text{Func}(R \times R, R)$;
- ▶ $- : R \rightarrow R$, ou seja, $- \in \text{Func}(R, R)$;
- ▶ $0, e : \{*\} \rightarrow R$, ou seja, $0, e \in \text{Func}(\{*\}, R)$;

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{A} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, ou seja, $+, \cdot \in \text{Func}(R \times R, R)$;
- ▶ $- : R \rightarrow R$, ou seja, $- \in \text{Func}(R, R)$;
- ▶ $0, e : \{*\} \rightarrow R$, ou seja, $0, e \in \text{Func}(\{*\}, R)$;
- ▶

$$\Phi : \{+, \cdot, -, 0, e\} \rightarrow \bigcup_{n=0}^2 \text{Func}(R^n, R)$$

Anel Comutativo com Unidade via Álgebra Universal

- ▶ $\mathfrak{A} = (R, +, \cdot, -, 0, e)$
- ▶ R um conjunto;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$, ou seja, $+, \cdot \in \text{Func}(R \times R, R)$;
- ▶ $- : R \rightarrow R$, ou seja, $- \in \text{Func}(R, R)$;
- ▶ $0, e : \{*\} \rightarrow R$, ou seja, $0, e \in \text{Func}(\{*\}, R)$;
- ▶

$$\Phi : \{+, \cdot, -, 0, e\} \rightarrow \bigcup_{n=0}^2 \text{Func}(R^n, R)$$

- ▶ sujeitos a certos axiomas;

Definição de Anel Comutativo com Unidade

- ▶ Estrutura de anel comutativo em um conjunto R :

Definição de Anel Comutativo com Unidade

- Estrutura de anel comutativo em um conjunto R :

$$\begin{array}{lll} \Phi : \{+, \cdot, -, 0, e\} & \rightarrow & \bigcup_{n=0}^2 \text{Func}(R^n, R) \\ + & \mapsto & \Phi(+): R \times R \rightarrow R \\ \cdot & \mapsto & \Phi(\cdot): R \times R \rightarrow R \\ - & \mapsto & \Phi(-): R \rightarrow R \\ 0 & \mapsto & \Phi(0): \{*\} \rightarrow R \\ e & \mapsto & \Phi(e): \{*\} \rightarrow R \end{array}$$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ via Álgebra Universal

Definição: $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$, onde:

- ▶ A é conjunto;

Anel $\mathcal{C}^\infty$ via Álgebra Universal

Definição: $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$, onde:

▶ A é conjunto;

▶
$$\begin{aligned} \Phi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(A^n; A) \\ (f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}) &\mapsto \Phi(f) := (f^A : A^n \rightarrow A) \end{aligned}$$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ via Álgebra Universal

Definição: $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$, onde:

- ▶ A é conjunto;
- ▶
$$\begin{aligned} \Phi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(A^n; A) \\ (f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}) &\mapsto \Phi(f) := (f^A : A^n \rightarrow A) \end{aligned}$$
- ▶ sujeitos a certos axiomas;

Axiomas de Anel $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n) &\mapsto x_k \end{aligned}$$

Axiomas de Anel $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n) &\mapsto x_k \end{aligned}$$

▶ $\mathfrak{A} \models (\forall x_1) \cdots (\forall x_n)(p_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k)$

Axiomas de Anel $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n) &\mapsto x_k \end{aligned}$$

▶ $\mathfrak{A} \models (\forall x_1) \cdots (\forall x_n)(p_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k)$

▶ $f = h \circ (g_1, \cdots, g_n) \Rightarrow$

$$\mathfrak{A} \models (\forall x_1) \cdots (\forall x_m)(f(x_1, \cdots, x_m) =$$

$$h(g(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)))$$

Morfismo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

► $(A, \Phi), (B, \Psi);$

Morfismo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $(A, \Phi), (B, \Psi);$
- ▶ Função $\varphi : A \rightarrow B$ é **morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$** sse:

Morfismo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $(A, \Phi), (B, \Psi);$
- ▶ Função $\varphi : A \rightarrow B$ é **morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$** sse:
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$

Morfismo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $(A, \Phi), (B, \Psi)$;
- ▶ Função $\varphi : A \rightarrow B$ é **morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$** sse:
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,
- ▶

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^{(n)}} & B^n \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad \text{comuta}$$

A Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$$

► $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}) = \{\mathfrak{A} = (A, \Phi) \mid A \text{ conjunto } \Phi \text{ estrutura } \mathcal{C}^\infty\}$

A Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$$

- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}) = \{\mathfrak{A} = (A, \Phi) \mid A \text{ conjunto } \Phi \text{ estrutura } \mathcal{C}^\infty\}$
- ▶ $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}) = \{\mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \mid \varphi \text{ é morfismo de anéis } \mathcal{C}^\infty\}$

Funtor Esquecimento em $\mathbf{CRing}(e)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}: \mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng} & \rightarrow & \mathbf{CRing} \\ (A, \Phi) & \mapsto & (A, \Phi(+), \Phi(\cdot), \Phi(-), \Phi(0), \Phi(e))) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \tilde{U}(\varphi) \\ (B, \Psi) & & (B, \Psi(+), \Psi(\cdot), \Psi(-), \Psi(0), \Psi(e)) \end{array}$$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

► $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}\}$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}\}$
- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$ anel $\mathcal{C}^\infty$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

▶ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}\}$

▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$ anel $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{array}{ccc} \Phi_n : \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) & \rightarrow & \bigcup_{m \geq 0} \text{Func}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^m, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{R}^m \xrightarrow{h} \mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^m \xrightarrow{h^*} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

▶ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}\}$

▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$ anel $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{array}{ccc} \Phi_n : \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) & \rightarrow & \bigcup_{m \geq 0} \text{Func}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^m, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{R}^m \xrightarrow{h} \mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^m \xrightarrow{h^*} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} h^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^m & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ (f_1, \dots, f_m) & \mapsto & h \circ (f_1, \dots, f_m) \end{array}$$

Exemplo de Morfismo de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

► $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave

Exemplo de Morfismo de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

▶ $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave



$$\begin{array}{ccc} \varphi_* : & C^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^m) \\ & f & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

▶ é um morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$.

Produtos de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

► $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$

Produtos de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$
- ▶ O **produto** é um par $(\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi^{(\Lambda)})$, onde

Definição:

- ▶ $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$
- ▶ O **produto** é um par $(\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi^{(\Lambda)})$, onde
- ▶ Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$\Phi^{(\Lambda)}(f)((x_\alpha^1)_{\alpha \in \Lambda}, \dots, (x_\alpha^n)_{\alpha \in \Lambda}) = (\Phi_\alpha(f)(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))_{\alpha \in \Lambda}$$

Produto em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

Em particular, dado (A, Φ) , podemos munir $A \times A$ da estrutura de anel $\mathcal{C}^\infty$:

Produto em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

Em particular, dado (A, Φ) , podemos munir $A \times A$ da estrutura de anel $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}((A \times A)^n, A \times A) \\ (f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}) &\mapsto (\Phi \times \Phi)(f) : (A \times A)^n \rightarrow A \times A\end{aligned}$$

Produto em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

Em particular, dado (A, Φ) , podemos munir $A \times A$ da estrutura de anel $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}((A \times A)^n, A \times A) \\ (f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}) &\mapsto (\Phi \times \Phi)(f) : (A \times A)^n \rightarrow A \times A\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(f)((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) &= \\ &= (\Phi(f)(x_1, \dots, x_n), \Phi(f)(y_1, \dots, y_n))\end{aligned}$$

Congruências em Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;

Congruências em Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ $\mathcal{C}^\infty$ -congruência;

Congruências em Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ $\mathcal{C}^\infty$ -congruência;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ relação de equivalência tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vale:

Congruências em Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ $\mathcal{C}^\infty$ -congruência;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ relação de equivalência tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vale:

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in R \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\Phi(f)(x_1, \dots, x_n), \Phi(f)(y_1, \dots, y_n)) \in R \end{aligned}$$

Quocientes em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

► (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;

Quocientes em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ $\mathcal{C}^\infty$ –congruência;

Quocientes em $\mathcal{C}^\infty\text{Rng}$

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \subseteq A \times A$ $\mathcal{C}^\infty$ –congruência;
- ▶

$$\begin{aligned} q : (A, \Phi) &\rightarrow \left(\frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right) \\ a &\mapsto \bar{a} \end{aligned}$$

é um morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$.

O que seria um “ideal” de um anel $\mathcal{C}^\infty$?

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;

O que seria um “ideal” de um anel $\mathcal{C}^\infty$?

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \in \text{Cong}(A, \Phi)$;

O que seria um “ideal” de um anel $\mathcal{C}^\infty$?

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \in \text{Cong}(A, \Phi)$;
- ▶ Um ideal $\mathcal{C}^\infty$ é $I_R = \{x \in A \mid (x, 0) \in R\}$

O que seria um “ideal” de um anel $\mathcal{C}^\infty$?

Definição:

- ▶ (A, Φ) anel $\mathcal{C}^\infty$;
- ▶ $R \in \text{Cong}(A, \Phi)$;
- ▶ Um ideal $\mathcal{C}^\infty$ é $I_R = \{x \in A \mid (x, 0) \in R\}$
- ▶

$$\begin{array}{ccc} \psi_A : \text{Cong}(A, \Phi) & \rightarrow & \mathfrak{I}(A, \Phi) \\ R & \mapsto & \{x \in A \mid (x, 0) \in R\} \end{array}$$

bijeção cuja inversa é:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A : \mathfrak{I}(A, \Phi) & \rightarrow & \text{Cong}(A, \Phi) \\ I & \mapsto & \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \in I\} \end{array}$$

Ideais (do anel comutativo) $\widetilde{U}(A, \Phi)$ são as Congruências

Observação:

Os ideais de um anel $\mathcal{C}^\infty, (A, \Phi)$, coincidem com os ideais (da Teoria dos Anéis) de $\widetilde{U}(A, \Phi)$.

Exemplos de Ideais de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, temos:

Exemplos de Ideais de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, temos:

$$\blacktriangleright \mathfrak{m}_X^0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f|_X \equiv 0\}$$

Exemplos de Ideais de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, temos:

▶ $\mathfrak{m}_X^0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f|_X \equiv 0\}$

▶ $\mathfrak{m}_X^\infty =$

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid (\forall x \in X)(\forall \alpha) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_{i_1}} x_{i_1} \cdots \partial^{\alpha_{i_k}} x_{i_k}}(x) = 0 \right\}$$

Exemplos de Ideais de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, temos:

▶ $\mathfrak{m}_X^0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f|_X \equiv 0\}$

▶ $\mathfrak{m}_X^\infty = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid (\forall x \in X)(\forall \alpha) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_{i_1}} x_{i_1} \cdots \partial^{\alpha_{i_k}} x_{i_k}}(x) = 0 \right\}$

▶ $\mathfrak{m}_X^g = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid (\exists U \supseteq X)(f|_U \equiv 0)\}$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

Definição:

- ▶ (A, Φ) é finitamente gerado sse

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

Definição:

- ▶ (A, Φ) é finitamente gerado sse
- ▶ $(\exists m \in \mathbb{N})$ e $(\exists I \trianglelefteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))$ tais que:

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

Definição:

- ▶ (A, Φ) é finitamente gerado sse
- ▶ $(\exists m \in \mathbb{N})$ e $(\exists I \trianglelefteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))$ tais que:
- ▶

$$(A, \mathfrak{A}) \cong \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I}, \overline{\Phi_m} \right)$$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

Definição:

- ▶ (A, Φ) é finitamente gerado sse
- ▶ $(\exists m \in \mathbb{N})$ e $(\exists I \trianglelefteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))$ tais que:
- ▶

$$(A, \mathfrak{A}) \cong \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I}, \overline{\Phi_m} \right)$$

▶

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_m} : \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I} \right)^n &\rightarrow \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I} \\ (f_1 + I, \dots, f_n + I) &\mapsto \Phi_m^{(n)}(f_1, \dots, f_n) + I \end{aligned}$$

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerados

$$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}$$

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerados

$$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}$$

► $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}) =$
 $= \{(A, \Phi) \mid (A, \Phi) \text{ é anel } \mathcal{C}^\infty \text{ finitamente gerado}\}$

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerados

$$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}$$

- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}) =$
 $= \{(A, \Phi) \mid (A, \Phi) \text{ é anel } \mathcal{C}^\infty \text{ finitamente gerado}\}$
- ▶ $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}) =$
 $= \{(A, \Phi) \xrightarrow{\varphi} (B, \Psi) \mid (A, \Phi) \text{ e } (B, \Psi) \text{ finitamente gerados.}\}$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

► $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto;

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

- ▶ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto;
- ▶ $\chi_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\chi_U(x) > 0 \iff x \in U$;
- ▶ $\mathcal{C}^\infty(U) = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{\langle y \cdot \chi_U(x) - 1 \rangle}$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado.

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

► $M \in \text{Obj}(\text{Man})$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

- ▶ $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, munido da estrutura:

$$\begin{aligned} \Phi_M : \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(\mathcal{C}^\infty(M)^n, \mathcal{C}^\infty(M)) \\ \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} &\mapsto (g_1, \dots, g_n) \mapsto f \circ (g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerado

- ▶ $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$
- ▶ $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, munido da estrutura:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_M : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Func}(\mathcal{C}^\infty(M)^n, \mathcal{C}^\infty(M)) \\ \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} & \mapsto & (g_1, \dots, g_n) \mapsto f \circ (g_1, \dots, g_n) \end{array}$$

é um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado.

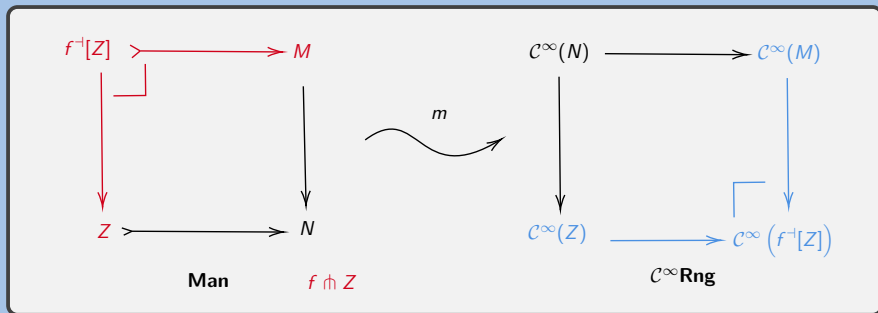
Variedades Suaves como Anéis $\mathcal{C}^\infty$



$$\begin{aligned} m : \quad \mathbf{Man} &\rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng} \\ M &\mapsto (\mathcal{C}^\infty(M), \Phi_M) \\ M \xrightarrow{f} N &\mapsto \mathcal{C}^\infty(N) \xrightarrow{(- \circ f)} \mathcal{C}^\infty(M) \end{aligned}$$

é pleno e fiel;

Variedades Suaves como Anéis $\mathcal{C}^\infty$



O Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

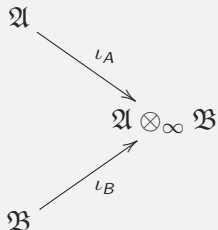
► $\mathfrak{A} = (A, \Phi), \mathfrak{B} = (B, \Psi);$

O Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathfrak{A} = (A, \Phi), \mathfrak{B} = (B, \Psi);$
- ▶ $\mathfrak{A} \otimes_\infty \mathfrak{B} = (A \otimes_\infty B, \Omega)$ **coproduto**

O Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathfrak{A} = (A, \Phi), \mathfrak{B} = (B, \Psi);$
- ▶ $\mathfrak{A} \otimes_\infty \mathfrak{B} = (A \otimes_\infty B, \Omega)$ **coproduto**
- ▶



Concretamente, o Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

► $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m), \Phi_m), (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$

Concretamente, o Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m), \Phi_m), (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$
- ▶ $|\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes_\infty \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)|$

Concretamente, o Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

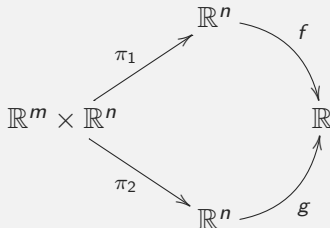
- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m), \Phi_m), (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n)$
- ▶ $|\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes_\infty \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)|$
- ▶ $\Omega = \Phi_{m+n}$

Concretamente, o Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

► $\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I}, \overline{\Phi_m} \right), \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{J}, \overline{\Phi_n} \right)$

Concretamente, o Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

► $\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I}, \overline{\Phi_m} \right), \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{J}, \overline{\Phi_n} \right)$



►
$$\left| \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{I} \otimes_\infty \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{J} \right| =$$
$$= \left| \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)}{\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \mid (f \in I) \& (g \in J) \rangle} \right| = \left| \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)}{(I, J)} \right|$$

O Coproduto $\mathcal{C}^\infty$

► $\Omega = \overline{\Phi_{m+n}}$, a estrutura de $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)}{(I, J)}$.

Categoria dos Loci

$$\blacktriangleright \mathbb{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^{\infty} \mathbf{Rng}_{f,g}^{\text{op}}$$

Categoria dos Loci

- ▶ $\mathbb{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}$.
- ▶ $\text{Obj}(\mathbb{L}) = \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}})$

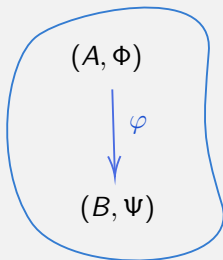
Categoria dos Loci

- ▶ $\mathbb{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}$
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathbb{L}) = \mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}})$
- ▶ $\mathfrak{A} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}) \rightsquigarrow \ell(\mathfrak{A}) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$

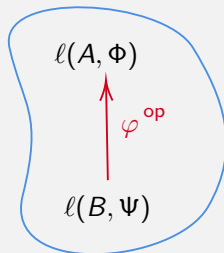
Categoria dos Loci

- ▶ $\mathbb{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}$.
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathbb{L}) = \mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}})$
- ▶ $\mathfrak{A} \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}^{\text{op}}) \rightsquigarrow \ell(\mathfrak{A}) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$
- ▶ $\varphi^{\text{op}} \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{L}}((B, \Psi), (A, \Phi))$ é o **nome** de um homomorfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados, $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$

Loci e Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Gerados



$\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$ f.g.



$\mathbb{L} = \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}^{\text{op}}$ f.g.



Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ contém uma “cópia” de **Man**;

Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ contém uma “cópia” de **Man**;



$$\begin{array}{lll} s : \quad \mathbf{Man} & \rightarrow & \mathbb{L} \\ & M & \mapsto \ell(\mathcal{C}^\infty(M), \Phi_M) \\ & M \xrightarrow{f} N & \mapsto \ell(\mathcal{C}^\infty(M)) \xrightarrow{(-\circ f)^{\text{op}}} \ell(\mathcal{C}^\infty(N)) \end{array}$$

- ▶ pleno, fiel e preserva pullbacks transversais.

Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;

Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;
- ▶ $\mathbb{L}$ tem “objetos de infinitesimais”;

Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;
- ▶ $\mathbb{L}$ tem “objetos de infinitesimais”;
- ▶ $R = \ell(C^\infty(\mathbb{R}))$;

Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;
- ▶ $\mathbb{L}$ tem “objetos de infinitesimais”;
- ▶ $R = \ell(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$;
- ▶ $D = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}\right)$



Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;
- ▶ $\mathbb{L}$ tem “objetos de infinitesimais”;
- ▶ $R = \ell(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$;
- ▶ $D = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}\right)$
- ▶ $[a, b] = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[a,b]}^\infty}\right)$



Prendas de $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbb{L}$ tem todos os limites projetivos finitos;
- ▶ $\mathbb{L}$ tem “objetos de infinitesimais”;
- ▶ $R = \ell(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$;
- ▶ $D = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}\right)$
- ▶ $[a, b] = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[a,b]}^\infty}\right)$
- ▶ $P = R_{>} = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)}{\langle y \cdot \chi_{>}(x) - 1 \rangle}\right) = \ell(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)) = s(\mathbb{R}_+^*)$

Construções em $\mathbb{L}$

- ▶ Temos *algumas* exponenciais;

Construções em $\mathbb{L}$

- ▶ Temos *algumas* exponenciais;
- ▶ $\ell(A) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L}) \Rightarrow \ell(A)^D \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$;

Construções em $\mathbb{L}$

- ▶ Temos *algumas* exponenciais;
- ▶ $\ell(A) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L}) \Rightarrow \ell(A)^D \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$;
- ▶ Fibrado tangente de um *locus* $\ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right)$:

Construções em $\mathbb{L}$

- ▶ Temos *algumas* exponenciais;
- ▶ $\ell(A) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L}) \Rightarrow \ell(A)^D \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$;
- ▶ Fibrado tangente de um *locus* $\ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right)$:

$$T\left(\ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right)\right) = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}{\left(I(x), \left\{\sum_i y_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid f \in I\right\}\right)}\right)$$

Construções em $\mathbb{L}$

- ▶ Temos *algumas* exponenciais;
- ▶ $\ell(A) \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L}) \Rightarrow \ell(A)^D \in \mathbf{Obj}(\mathbb{L})$;
- ▶ Fibrado tangente de um *locus* $\ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right)$:

$$T\left(\ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right)\right) = \ell\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}{\left(I(x), \left\{\sum_i y_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid f \in I\right\}\right)}\right)$$

- ▶ $\mathbb{L}$ não tem exponenciais, em geral;

Veja o que temos em $\mathbb{L}$

$$\begin{array}{c} \ell(C) \longrightarrow T(\ell(A)) \\ \hline \ell(C) \times D \longrightarrow \ell(A) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

Veja o que temos em $\mathbb{L}$

$$\begin{array}{c} \ell(C) \longrightarrow T(\ell(A)) \\ \hline \ell(C) \times D \rightarrow \ell(A) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

► Dada $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$, tem-se $s(M)^D \cong s(TM)$

Veja o que temos em $\mathbb{L}$

$$\begin{array}{c} \ell(C) \longrightarrow T(\ell(A)) \\ \hline \ell(C) \times D \rightarrow \ell(A) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

- ▶ Dada $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man})$, tem-se $s(M)^D \cong s(TM)$
- ▶ $\mathbb{L}$, no entanto, **não tem todas as exponenciais!**

Construindo um Topos usando $\mathbb{L}$

► $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ é um topos!

Construindo um Topos usando $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ é um topos!
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ admite exponenciais;

Construindo um Topos usando $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ é um topos!
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ admite exponenciais;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ tem boas propriedades de “exatidão”;

Construindo um Topos usando $\mathbb{L}$

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ é um topos!
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ admite exponenciais;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ tem boas propriedades de “exatidão”;
- ▶ Temos uma “cópia” de $\mathbb{L}$ em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$.

Mergulho de Yoneda

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Y} : & \mathcal{C} & \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \\ & X & \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \\ X \xrightarrow{g} Y & \mapsto & g_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Y) \end{array}$$

Mergulho de Yoneda

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Y} : & \mathcal{C} & \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \\ & X & \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \\ X \xrightarrow{g} Y & \mapsto & g_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Y) \end{array}$$

é um funtor pleno e fiel;

Mergulho de Yoneda

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Y} : & \mathcal{C} & \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \\ & X & \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \\ X \xrightarrow{g} Y & \mapsto & g_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Y) \end{array}$$

é um funtor pleno e fiel;

► Objetos $\rightsquigarrow$ Funtores;

Mergulho de Yoneda

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Y} : & \mathcal{C} & \rightarrow \\ & X & \mapsto \\ X \xrightarrow{g} Y & \mapsto & g_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Y) \end{array}$$

$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$

é um funtor pleno e fiel;

- ▶ Objetos $\rightsquigarrow$ Funtores;
- ▶ Morfismos $\rightsquigarrow$ Transformações Naturais

Lema de Yoneda

Sets ^{$\mathcal{C}^{\text{op}}$}

$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

Lema de Yoneda

Sets ^{$\mathcal{C}^{\text{op}}$}

$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

- ▶ **Lema de Yoneda:** “tudo o que precisamos saber sobre X está codificado por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$ ”

Lema de Yoneda

$$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

- ▶ **Lema de Yoneda:** “tudo o que precisamos saber sobre X está codificado por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$ ”
- ▶ Dados $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$

Lema de Yoneda

$$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

- ▶ **Lema de Yoneda:** “tudo o que precisamos saber sobre X está codificado por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$ ”
- ▶ Dados $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ Existe uma bijeção natural:

Lema de Yoneda

$$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

- ▶ **Lema de Yoneda:** “tudo o que precisamos saber sobre X está codificado por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$ ”
- ▶ Dados $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ Existe uma bijeção natural:

$$\frac{c \in F(X)}{\eta : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow F} \quad \curvearrowright$$

Lema de Yoneda

$$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

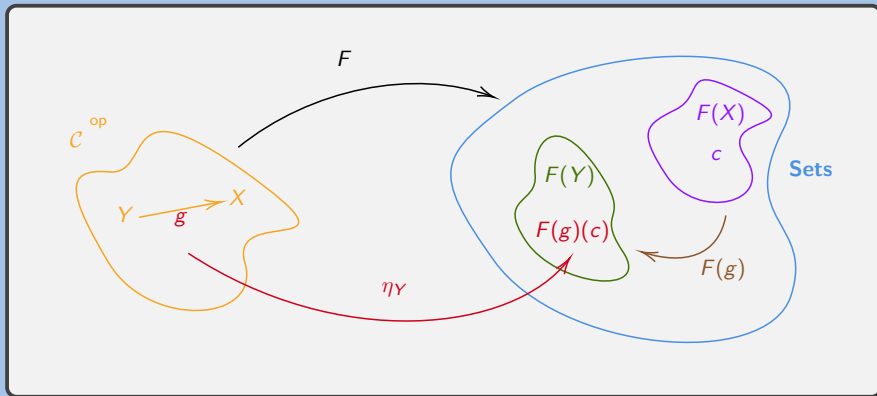
$\mathcal{C}$ categoria de anéis e $R : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtor esquecimento

- ▶ **Lema de Yoneda:** “tudo o que precisamos saber sobre X está codificado por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$ ”
- ▶ Dados $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $X \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$
- ▶ Existe uma bijeção natural:

$$\frac{c \in F(X)}{\eta : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) \Rightarrow F} \quad \curvearrowright$$

- ▶ $\mathbf{Nat}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X), F) \cong F(X)$

Lema de Yoneda



O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;

O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models \mathbf{KL}$;

O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models \mathbf{KL}$;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$, podemos definir pré-ordem em R , dada por $R_{>} = \mathbf{Hom}_{\mathbb{L}}(\bullet, s(\mathbb{R}_+^*))$

O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models \mathbf{KL}$;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$, podemos definir pré-ordem em R , dada por $R_{>} = \mathbf{Hom}_{\mathbb{L}}(\bullet, s(\mathbb{R}_+^*))$
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R_{>}$ é compatível com a estrutura de anel de R

O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models \mathbf{KL}$;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$, podemos definir pré-ordem em R , dada por $R_{>} = \mathbf{Hom}_{\mathbb{L}}(\bullet, s(\mathbb{R}_+^*))$
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R_{>}$ é compatível com a estrutura de anel de R
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models$ axioma de integração;

O topos $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ modela bem...

- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R$ é anel comutativo com unidade;
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models \mathbf{KL}$;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$, podemos definir pré-ordem em R , dada por $R_{>} = \mathbf{Hom}_{\mathbb{L}}(\bullet, s(\mathbb{R}_+^*))$
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models R_{>}$ é compatível com a estrutura de anel de R
- ▶ $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}} \models$ axioma de integração;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ temos um “objeto de números naturais”, dado pelo funtor constante:

$$\begin{array}{llll} \mathbb{N} : & \mathbb{L}^{\text{op}} & \rightarrow & \mathbf{Sets} \\ & \ell(A) & \mapsto & \mathbb{N} \\ & \ell(B) \xrightarrow{f^{\text{op}}} \ell(A) & \mapsto & \mathbb{N} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \end{array}$$

Mas ainda faltam coisas em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$

- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não se tem que R seja arquimediano;

Mas ainda faltam coisas em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$

- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não se tem que R seja arquimediano;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não se tem que $[0, 1]$ seja compacto;

Mas ainda faltam coisas em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$

- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não se tem que R seja arquimediano;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não se tem que $[0, 1]$ seja compacto;
- ▶ Em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{L}^{\text{op}}}$ não dispomos de linguagem robusta o suficiente para expressar o que significa “ R ser anel local”, por exemplo.

Topologia de Grothendieck, SOCORRO!

$$(\forall x \in R)((x \text{ invertível}) \vee (1 - x) \text{ invertível})$$

Topologia de Grothendieck, SOCORRO!

$$(\forall x \in R)((x \text{ invertível}) \vee (1 - x) \text{ invertível})$$

$$(\forall x \in R)(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)$$

Como “enunciar” estas coisas?

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
- ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
- ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:
 - ▶ $(\forall \mathcal{R} \in J(\mathcal{C}))(\forall \{x_f \in X(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\})(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f))(X(g)(x_f) = x_{f \circ g}))$

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
- ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:
 - ▶ $(\forall \mathcal{R} \in J(\mathcal{C}))(\forall \{x_f \in X(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\})(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f))(X(g)(x_f) = x_{f \circ g}))$
 - ▶ $(\exists ! x \in X(\mathcal{C}))(\forall f \in \mathcal{R})(X(f) = x_f)$

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
 - ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:
 - ▶ $(\forall \mathcal{R} \in J(\mathcal{C}))(\forall \{x_f \in X(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\})(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f))(X(g)(x_f) = x_{f \circ g})$
 - ▶ $(\exists ! x \in X(\mathcal{C}))(\forall f \in \mathcal{R})(X(f) = x_f)$
- é um **feixe**.

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
 - ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:
 - ▶ $(\forall \mathcal{R} \in J(\mathcal{C}))(\forall \{x_f \in X(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\})(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f))(X(g)(x_f) = x_{f \circ g}))$
 - ▶ $(\exists ! x \in X(\mathcal{C}))(\forall f \in \mathcal{R})(X(f) = x_f)$
- é um **feixe**.
- ▶ X feixe $\leadsto$ “conjuntos”

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ $(\mathcal{C}, J)$ um sítio pequeno, onde $\mathcal{C}$ tem todos os limites finitos;
 - ▶ $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ pré-feixe tal que:
 - ▶ $(\forall \mathcal{R} \in J(\mathcal{C}))(\forall \{x_f \in X(\text{dom}(f)) \mid f \in \mathcal{R}\})(\forall g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}))(\text{cod}(g) = \text{dom}(f))(X(g)(x_f) = x_{f \circ g})$
 - ▶ $(\exists ! x \in X(C))(\forall f \in \mathcal{R})(X(f) = x_f)$
- é um **feixe**.
- ▶ X feixe $\rightsquigarrow$ “conjuntos”
 - ▶ Elementos de $X(C)$ $\rightsquigarrow$ “elementos de X no estágio C ”

Semântica em Topos de Grothendieck

Proposição: Mostra-se que:

Semântica em Topos de Grothendieck

Proposição: Mostra-se que:

► X feixe $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ feixe;

Semântica em Topos de Grothendieck

Proposição: Mostra-se que:

- ▶ X feixe $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ feixe;
- ▶ $X_1, \dots, X_n$ feixes $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ feixe

Semântica em Topos de Grothendieck

Proposição: Mostra-se que:

- ▶ X feixe $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ feixe;
- ▶ $X_1, \dots, X_n$ feixes $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ feixe
- ▶ X, Y feixes $\Rightarrow Y^X$ feixe

Semântica em Topos de Grothendieck

- Predicado n -ário, P do tipo $X_1 \times \cdots \times X_n \rightsquigarrow$ um subfeixe de $X_1 \times \cdots \times X_n$

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ Predicado n -ário, P do tipo $X_1 \times \cdots \times X_n \rightsquigarrow$ um subfeixe de $X_1 \times \cdots \times X_n$
- ▶ Um funcional n -ário, $f \rightsquigarrow$ morfismo de feixes $X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{f} Y$;

Semântica em Topos de Grothendieck

- ▶ Predicado n -ário, P do tipo $X_1 \times \cdots \times X_n \rightsquigarrow$ um subfeixe de $X_1 \times \cdots \times X_n$
- ▶ Um funcional n -ário, $f \rightsquigarrow$ morfismo de feixes $X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{f} Y$;
- ▶ Elemento, b , de $X \rightsquigarrow (\mathbf{1} \xrightarrow{b} X)$.

Semântica em Topos de Grothendieck

Exemplos:

- ▶ $<$ subfeixe de $R \times R$;

Semântica em Topos de Grothendieck

Exemplos:

- ▶ $<$ subfeixe de $R \times R$;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ morfismos de feixes;

Semântica em Topos de Grothendieck

Exemplos:

- ▶ $<$ subfeixe de $R \times R$;
- ▶ $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ morfismos de feixes;
- ▶ $0, 1 : \mathbf{1} \rightarrow R$ “elementos” de R

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

- ▶ Para cada feixe X , tem-se $\{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ estoque de variáveis livres em X ;

Fórmulas e Termos

- ▶ Para cada feixe X , tem-se $\{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ estoque de variáveis livres em X ;
- ▶ $t(x_1, \dots, x_n)$ com $\mathbf{FV}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ será interpretado como $t : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \text{cod}(t)$.

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

- ▶ Para cada $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, tem-se
$$t_C : X_1(C) \times \cdots \times X_n(C) \rightarrow \text{cod}(t)(C);$$

Fórmulas e Termos

- ▶ Para cada $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, tem-se
 $t_C : X_1(C) \times \cdots \times X_n(C) \rightarrow \text{cod}(t)(C)$;
- ▶ $a_i \in X_i(C) \rightsquigarrow t_C(a_1, \cdots, a_n)$ indutivamente;

Semântica em Topos de Grothendieck

- $C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, fórmula φ com $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$,
 $a_i \in X(C_i) \rightsquigarrow$ define-se o que se entende por:

$$C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

► $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é $t(x_1, \dots, x_n) = t'(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow$

$$C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ sse } t_C(a_1, \dots, a_n) = t'_C(a_1, \dots, a_n)$$

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

- ▶ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é $t(x_1, \dots, x_n) = t'(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow$

$$C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ sse } t_C(a_1, \dots, a_n) = t'_C(a_1, \dots, a_n)$$

- ▶ t, S termos com $\mathbf{FV}(t), \mathbf{FV}(S) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ são interpretados como morfismos:

Fórmulas e Termos

- ▶ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é $t(x_1, \dots, x_n) = t'(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow$

$$C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ sse } t_C(a_1, \dots, a_n) = t'_C(a_1, \dots, a_n)$$

- ▶ t, S termos com $\mathbf{FV}(t), \mathbf{FV}(S) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ são interpretados como morfismos:

$$X_1 \times \dots \times X_n \xrightarrow{t} Y, X_1 \times \dots \times X_n \xrightarrow{S} \mathcal{P}(Y)$$

Semântica em Topos de Grothendieck

Fórmulas e Termos

- ▶ $C \Vdash t(a_1, \dots, a_n) \in S(a_1, \dots, a_n)$
sse $(\text{id}_C, t_C(a_1, \dots, a_n)) \in S(C)$

Fórmulas e Termos

- ▶ $C \Vdash t(a_1, \dots, a_n) \in S(a_1, \dots, a_n)$
sse $(\text{id}_C, t_C(a_1, \dots, a_n)) \in S(C)$
- ▶ P predicado n -ário,

$$C \Vdash P(a_1, \dots, a_n) \iff (a_1, \dots, a_n) \in P(C)$$

Semântica em Topos de Grothendieck

Conectivos

- ▶ $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse
 $C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ e $C \Vdash \psi(a_1, \dots, a_n)$

Semântica em Topos de Grothendieck

Conectivos

- ▶ $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse
 $C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ e $C \Vdash \psi(a_1, \dots, a_n)$
- ▶ $C \Vdash (\varphi \vee \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse existir $\mathcal{R} \in J(C)$ tal que:

Semântica em Topos de Grothendieck

Conectivos

- ▶ $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse
 $C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ e $C \Vdash \psi(a_1, \dots, a_n)$
- ▶ $C \Vdash (\varphi \vee \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse existir $\mathcal{R} \in J(C)$ tal que:
 $\forall (D \xrightarrow{f} C)$ tem-se ou $D \Vdash \varphi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$
ou $D \Vdash \psi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$

Semântica em Topos de Grothendieck

Conectivos

- ▶ $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse
 $C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ e $C \Vdash \psi(a_1, \dots, a_n)$
- ▶ $C \Vdash (\varphi \vee \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse existir $\mathcal{R} \in J(C)$ tal que:
 $\forall (D \xrightarrow{f} C)$ tem-se ou $D \Vdash \varphi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$
ou $D \Vdash \psi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$
- ▶ $C \Vdash \neg \varphi(a_1, \dots, a_n)$ sse $(\forall D \xrightarrow{f} C)$

Conectivos

- ▶ $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse
 $C \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ e $C \Vdash \psi(a_1, \dots, a_n)$
- ▶ $C \Vdash (\varphi \vee \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse existir $\mathcal{R} \in J(C)$ tal que:
 $\forall (D \xrightarrow{f} C)$ tem-se ou $D \Vdash \varphi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$
ou $D \Vdash \psi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$
- ▶ $C \Vdash \neg \varphi(a_1, \dots, a_n)$ sse $(\forall D \xrightarrow{f} C)$

se $D \Vdash \varphi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$ então $0 \in J(D)$

Semântica em Topos de Grothendieck

Conectivo $\rightarrow$

► $C \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)(a_1, \dots, a_n)$ sse para todo $D \xrightarrow{f} C$:

se $C \Vdash \varphi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$

então $C \Vdash \psi(X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$

Semântica em Topos de Grothendieck

Quantificadores

- ▶ $C \Vdash (\forall y \in Y)(\varphi(y, a_1, \dots, a_n))$ sse para todo $D \xrightarrow{f} C$ e para todo $b \in Y(D)$ tem-se:

Semântica em Topos de Grothendieck

Quantificadores

- ▶ $C \Vdash (\forall y \in Y)(\varphi(y, a_1, \dots, a_n))$ sse para todo $D \xrightarrow{f} C$ e para todo $b \in Y(D)$ tem-se:

$$D \Vdash \varphi(b, X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$$

Quantificadores

- ▶ $C \Vdash (\forall y \in Y)(\varphi(y, a_1, \dots, a_n))$ sse para todo $D \xrightarrow{f} C$ e para todo $b \in Y(D)$ tem-se:

$$D \Vdash \varphi(b, X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$$

- ▶ $C \Vdash (\exists y \in Y)(\varphi(y, a_1, \dots, a_n))$ sse existir $\mathcal{R} \in J(C)$ tal que para todo $(D \xrightarrow{f} C) \in \mathcal{R}$ existir $b \in Y(D)$ tal que:

$$D \Vdash \varphi(b, X_1(f)(a_1), \dots, X_n(f)(a_n))$$

Rumo ao Topos de Dubuc

- ▶ Sítio pequeno sobre o qual tomar feixes;

Rumo ao Topos de Dubuc

- ▶ Sítio pequeno sobre o qual tomar feixes;
- ▶ $(\mathbb{G}, J)$ onde $\mathbb{G}$ é uma categoria de certos tipos de anéis $\mathcal{C}^\infty$

Rumo ao Topos de Dubuc

- ▶ Sítio pequeno sobre o qual tomar feixes;
- ▶ $(\mathbb{G}, J)$ onde $\mathbb{G}$ é uma categoria de certos tipos de anéis $\mathcal{C}^\infty$
- ▶ “Anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados”

Ideal Germe-Determinado

Definição:

Ideal Germe-Determinado

Definição:

- ▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ germe-determinado sse para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

Ideal Germe-Determinado

Definição:

▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ germe-determinado sse para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:



$$\left(\forall x \in Z(I) = \bigcap_{g \in I} g^{-1}[\{0\}] \right) (f \upharpoonright_{x \in I} \rightarrow f \in I).$$

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

► $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ **germe-determinado** sse I for germe-determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ **germe-determinado** sse I for germe-determinado;
- ▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ finitamente gerado $\Rightarrow I$ germe determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ **germe-determinado** sse I for germe-determinado;
- ▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ finitamente gerado $\Rightarrow I$ germe determinado;
- ▶ $D = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}$ é germe-determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ **germe-determinado** sse I for germe-determinado;
- ▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ finitamente gerado $\Rightarrow I$ germe determinado;
- ▶ $D = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}$ é germe-determinado;
- ▶ $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man}) \Rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ finitamente apresentado $\therefore$ germe determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f \upharpoonright_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é germe-determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f \upharpoonright_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é germe-determinado;
- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty}$ é germe-determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f \upharpoonright_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é germe-determinado;
- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty}$ é germe-determinado;
- ▶ $D = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}$ é germe-determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f \upharpoonright_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é germe-determinado;
- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty}$ é germe-determinado;
- ▶ $D = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}$ é germe-determinado;
- ▶ $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man}) \Rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ finitamente apresentado $\therefore$ germe determinado;

Categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Germe-Determinados

- ▶ $\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f \upharpoonright_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é germe-determinado;
- ▶ $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty}$ é germe-determinado;
- ▶ $D = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\langle x^2 \rangle}$ é germe-determinado;
- ▶ $M \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Man}) \Rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ finitamente apresentado $\therefore$ germe determinado;
- ▶ $\mathbb{G}$ categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados;

Ideais Germe-Determinados

- ▶ I germe-determinado $\not\Rightarrow I \restriction_U = \{f \restriction_U: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in I\}$ germe-determinado;

Ideais Germe-Determinados

- ▶ I germe-determinado $\not\Rightarrow I \restriction_U = \{f \restriction_U: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in I\}$ germe-determinado;
- ▶ “fecho” (radical) germe-determinado;

Famílias Localmente Finitas

- ▶ $\{f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_\alpha$ é **localmente finita** se para todo $x \in M$ existir uma vizinhança U_x tal que $f_\alpha \upharpoonright_{U_x} = 0$ exceto por uma quantidade finita de índices.

Germe-Radical

► $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ideal;

- ▶ $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ideal;
- ▶ **Germe-radical de I :**

$$\tilde{I} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \mid (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \text{ é uma família localmente finita de } I \right\}$$

Uma Pré-Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

► Dado $\frac{C^\infty(\mathbb{R})}{I} \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G})$, tomamos:

Uma Pré-Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

► Dado $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{I} \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G})$, tomamos:



$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{I} \right) = \\ &= \left\{ \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \xrightarrow{u_\alpha} \frac{\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)}{\widetilde{I \upharpoonright U_\alpha}} \mid \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathcal{O}(Z(I)) \right\} \end{aligned}$$



Uma Pré-Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

▶ Dado $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{I} \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G})$, tomamos:



$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{I} \right) = \\ &= \left\{ \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \xrightarrow{u_\alpha} \frac{\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)}{\widetilde{I \upharpoonright U_\alpha}} \mid \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathcal{O}(Z(I)) \right\} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{O}(Z(I))$ cobreturas abertas de $Z(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

Uma Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

$$J_{\mathbf{Cov}} : \mathbf{Obj}(\mathbb{G}^{\text{op}}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathbb{G}^{\text{op}})))$$

$$J_{\mathbf{Cov}}(A) =$$

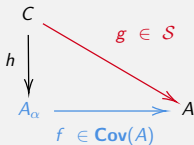
$$\left\{ S \subseteq \bigcup_{C \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G}^{\text{op}})} \mathbf{Hom}_{\mathbb{G}}(C, A) \mid \right.$$

$$\left. (\forall g \in S)(\exists f \in \mathbf{Cov}(A))(\exists C \xrightarrow{h} A)(g = f \circ h) \right\}$$



Uma Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

$$J_{\text{Cov}}(A) = \{ \mathcal{S} \in \bigcup_{C \in \text{Obj}(\mathbb{G})} \mathbf{Hom}(C, A) \mid (\forall g \in \mathcal{S})(\exists f \in \text{Cov}(A)) \\ (\exists h: C \rightarrow A_\alpha = \text{dom}(f))(g = f \circ h) \}$$



Uma Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

$$J_{\text{Cov}} : \mathbf{Obj}(\mathbb{G}^{\text{op}}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathbb{G}^{\text{op}})))$$

Uma Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

$$J_{\text{Cov}} : \mathbf{Obj}(\mathbb{G}^{\text{op}}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathbb{G}^{\text{op}})))$$

- ▶ Subcanônica: Para todo $A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G})$ ($\mathbf{Hom}_{\mathbb{G}}(A, \bullet)$ é feixe)

Uma Topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$

$$J_{\text{Cov}} : \mathbf{Obj}(\mathbb{G}^{\text{op}}) \rightarrow \wp(\wp(\mathbf{Mor}(\mathbb{G}^{\text{op}})))$$

- ▶ Subcanônica: Para todo $A \in \mathbf{Obj}(\mathbb{G})$ ($\mathbf{Hom}_{\mathbb{G}}(A, \bullet)$ é feixe)
- ▶ $\mathcal{G} = (\mathbf{Sh}(\mathbb{G}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$

O Topos de Dubuc

$\mathcal{G} = (\mathbf{Sh}(\mathbb{G}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}}))$ é o **topos de Dubuc**

“O Topos Prometido”

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;

“O Topos Prometido”

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;

“O Topos Prometido”

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;
- ▶ O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$, é um objeto anel local e até mesmo um corpo internalizado;

“O Topos Prometido”

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;
- ▶ O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$, é um objeto anel local e até mesmo um corpo internalizado;
- ▶ o objeto anel do tipo linha, R , munido da relação de ordem conveniente em $\mathcal{G}$ é arquimediano.

“O Topos Prometido”

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;
- ▶ O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$, é um objeto anel local e até mesmo um corpo internalizado;
- ▶ o objeto anel do tipo linha, R , munido da relação de ordem conveniente em $\mathcal{G}$ é arquimediano.
- ▶ Em $\mathcal{G}$, temos disponível o correspondente ao intervalo $[0, 1]$, que é representado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{[0,1]}^\infty$.

Referências

Principais referências utilizadas

- [1] Berni, J.C., Mariano, H.L. *A Geometria Diferencial Sintética e os Mundos onde podemos interpretá-la: um convite ao estudo dos anéis C^∞* , disponível em <https://www.ime.usp.br/~jeancb/GDS.pdf>
- [2] Berni, J.C., Mariano, H.L. *A Universal Algebraic Survey of C^∞ -Rings*, disponível em <https://arxiv.org/pdf/1904.02728.pdf>
- [3] Moerdijk, I. Reyes, G. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer Verlag, 1991.
- [4] Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2006.

Obrigado!

www.ime.usp.br/~jeancb/gdsm



jeancb@ime.usp.br