

Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos - Aula 5

Prof. Jean Cerqueira Berni & Prof. Hugo Luiz Mariano



jeancb@ime.usp.br

Fatos sobre a categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}$ é uma “variedade de álgebras”

Fatos sobre a categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$ é uma “variedade de álgebras” $\Rightarrow$ HSP;

Fatos sobre a categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$ é uma “variedade de álgebras” $\Rightarrow$ HSP;
- ▶ $U : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Sets}$ cria colimites dirigidos;

Fatos sobre a categoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$ é uma “variedade de álgebras” $\Rightarrow$ HSP;
- ▶ $U : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Sets}$ cria colimites dirigidos;
- ▶ X conjunto $\Rightarrow L(X) = (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X), \Phi_X)$

Fatos sobre a categoria dos $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$ é uma “variedade de álgebras” $\Rightarrow$ HSP;
- ▶ $U : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Sets}$ cria colimites dirigidos;
- ▶ X conjunto $\Rightarrow L(X) = (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X), \Phi_X)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & U(L(X)) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & U(B, \Psi) \end{array}$$

- ▶ Anel de “polinômios $\mathcal{C}^\infty$ ”, $A\{X\} := A \otimes_\infty L(X)$

Anéis C^∞ enquanto Teoria de Lawvere

- ▶ Tese de Doutorado de Lawvere, 1963;

Anéis $\mathcal{C}^\infty$ enquanto Teoria de Lawvere

- ▶ Tese de Doutorado de Lawvere, 1963;
- ▶ Abordagem categorial da Álgebra Universal;

Anéis $\mathcal{C}^\infty$ enquanto Teoria de Lawvere

- ▶ Tese de Doutorado de Lawvere, 1963;
- ▶ Abordagem categorial da Álgebra Universal;
- ▶ Teoria algébrica $\leadsto$ Categoria com produtos finitos e com um modelo genérico da teoria;

► Categoria $\mathcal{T}$ com:

Teoria Algébrica

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$

Teoria Algébrica

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$
- ▶ $T^n = T \times \dots \times T$

Teoria Algébrica

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$
- ▶ $T^n = T \times \dots \times T$
- ▶ Um **modelo de** $\mathcal{T}$ é um funtor que preserva produtos finitos:

Teoria Algébrica

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$
- ▶ $T^n = T \times \dots \times T$
- ▶ Um **modelo de** $\mathcal{T}$ é um funtor que preserva produtos finitos:

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

Teoria Algébrica

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$
- ▶ $T^n = T \times \dots \times T$
- ▶ Um **modelo de $\mathcal{T}$** é um funtor que preserva produtos finitos:

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

- ▶ Um **homomorfismo de $\mathcal{T}$ -modelos** é uma transformação natural;

- ▶ Categoria $\mathcal{T}$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{T}) = \{T^0, T^1, \dots, T^n, \dots\}$
- ▶ $T^n = T \times \dots \times T$
- ▶ Um **modelo de $\mathcal{T}$** é um funtor que preserva produtos finitos:

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

- ▶ Um **homomorfismo de $\mathcal{T}$ -modelos** é uma transformação natural;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ categoria dos $\mathcal{T}$ -modelos;

Teoria Algébrica

► $F, G \in \text{Obj}(\text{Mod}_{\mathcal{T}})$

Teoria Algébrica

- ▶ $F, G \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}})$
- ▶ $\alpha : F \Rightarrow G$ morfismo;

- ▶ $F, G \in \mathbf{Obj}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}})$
- ▶ $\alpha : F \Rightarrow G$ morfismo;
- ▶ O seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(T^n) & \xrightarrow{\alpha_{T^n}} & G(T^n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ F(T^1)^n & \xrightarrow{(\alpha_{T^1})^n} & G(T^1)^n \end{array}$$

Fatos sobre Modelos de Teorias Algébricas

► $\text{Mod}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow \text{Sets}^{\mathcal{T}}$ plena;

Fatos sobre Modelos de Teorias Algébricas

- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{T}}$ plena;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é fechada por limites;

Fatos sobre Modelos de Teorias Algébricas

- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{T}}$ plena;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é fechada por limites;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é fechada por colimites dirigidos;

Fatos sobre Modelos de Teorias Algébricas

- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{T}}$ plena;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é fechada por limites;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é fechada por colimites dirigidos;
- ▶ $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ é completa;

A Teoria Algébrica das $\mathbb{R}$ –Álgebras

► Categoria **Pol** com:

A Teoria Algébrica das $\mathbb{R}$ -Álgebras

- ▶ Categoria **Pol** com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathbf{Pol}) = \{\mathbb{R}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

A Teoria Algébrica das $\mathbb{R}$ -Álgebras

- ▶ Categoria **Pol** com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathbf{Pol}) = \{\mathbb{R}^n | n \in \mathbb{N}\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\mathbf{Pol}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n | p \text{ é função polinomial}\}$

A Teoria Algébrica das $\mathbb{R}$ –Álgebras

- ▶ Categoria **Pol** com:
- ▶ $\text{Obj}(\text{Pol}) = \{\mathbb{R}^n | n \in \mathbb{N}\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\text{Pol}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n | p \text{ é função polinomial}\}$
- ▶ Uma $\mathbb{R}$ –álgebra (em **Sets**) é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : \text{Pol} \rightarrow \text{Sets}$$

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
- ▶ Um **anel** $\mathcal{C}^\infty$ (**em Sets**) é um funtor que preserva produtos finitos:

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
- ▶ Um **anel** $\mathcal{C}^\infty$ (**em Sets**) é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbf{Sets}$$

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$
- ▶ $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
- ▶ Um **anel $\mathcal{C}^\infty$ (em Sets)** é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbf{Sets}$$

- ▶ Um **anel $\mathcal{C}^\infty$ em um topos $\mathcal{E}$** é um funtor que preserva produtos finitos:

A Teoria Algébrica dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Categoria $\mathcal{C}^\infty$ com:
- ▶ $\text{Obj}(\mathcal{C}^\infty) = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$
- ▶ $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
- ▶ Um **anel** $\mathcal{C}^\infty$ (**em Sets**) é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbf{Sets}$$

- ▶ Um **anel** $\mathcal{C}^\infty$ **em um topos** $\mathcal{E}$ é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{E}$$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ Um **esboço** é uma 4-upla $\mathcal{S} = (G, D, P, I)$, onde:

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ Um **esboço** é uma 4-upla $\mathcal{S} = (G, D, P, I)$, onde:
 - ▶ G é um grafo orientado pequeno;

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Definição:

- ▶ Um **esboço** é uma 4-upla $\mathcal{S} = (G, D, P, I)$, onde:
 - ▶ G é um grafo orientado pequeno;
 - ▶ D é um conjunto (ou classe) de diagramas pequenos (não-comutativos) sobre G ;

Definição:

- ▶ Um **esboço** é uma 4-upla $\mathcal{S} = (G, D, P, I)$, onde:
 - ▶ G é um grafo orientado pequeno;
 - ▶ D é um conjunto (ou classe) de diagramas pequenos (não-comutativos) sobre G ;
 - ▶ P é um conjunto (ou classe) de cones (não-comutativos) sobre G e I é um conjunto (ou classe) de co-cones (não-comutativos) sobre G .

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.
- ▶ $\mathcal{S}$ é um **esboço geométrico** se P é um conjunto de cones sobre G com bases finitas.
 - ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\rightsquigarrow \mathbf{sk}(\mathcal{C}) = (|\mathcal{C}|, D_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}}, l_{\mathcal{C}})$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.
- ▶ $\mathcal{S}$ é um **esboço geométrico** se P é um conjunto de cones sobre G com bases finitas.
 - ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\rightsquigarrow \mathbf{sk}(\mathcal{C}) = (|\mathcal{C}|, D_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}}, l_{\mathcal{C}})$
 - ▶ $|\mathcal{C}|$ é o grafo subjacente;

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.
- ▶ $\mathcal{S}$ é um **esboço geométrico** se P é um conjunto de cones sobre G com bases finitas.
 - ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\leadsto \mathbf{sk}(\mathcal{C}) = (|\mathcal{C}|, D_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}}, l_{\mathcal{C}})$
 - ▶ $|\mathcal{C}|$ é o grafo subjacente;
 - ▶ $D_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os diagramas comutativos pequenos sobre $\mathcal{C}$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.
- ▶ $\mathcal{S}$ é um **esboço geométrico** se P é um conjunto de cones sobre G com bases finitas.
 - ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\rightsquigarrow \mathbf{sk}(\mathcal{C}) = (|\mathcal{C}|, D_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}}, l_{\mathcal{C}})$
 - ▶ $|\mathcal{C}|$ é o grafo subjacente;
 - ▶ $D_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os diagramas comutativos pequenos sobre $\mathcal{C}$
 - ▶ $P_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os cones-limite pequenos sobre $\mathcal{C}$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Um **morfismo de esboços** $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é um morfismo entre os grafos orientados subjacentes que preserva todas estas estruturas.
- ▶ $\mathcal{S}$ é um **esboço geométrico** se P é um conjunto de cones sobre G com bases finitas.
 - ▶ $\mathcal{C}$ categoria pequena $\rightsquigarrow \mathbf{sk}(\mathcal{C}) = (|\mathcal{C}|, D_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$
 - ▶ $|\mathcal{C}|$ é o grafo subjacente;
 - ▶ $D_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os diagramas comutativos pequenos sobre $\mathcal{C}$
 - ▶ $P_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os cones-limite pequenos sobre $\mathcal{C}$
 - ▶ $I_{\mathcal{C}}$ é a classe de todos os co-cones colimites pequenos sobre $\mathcal{C}$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Esboço da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

► $\mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} = (\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \emptyset);$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Esboço da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} = (\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \emptyset);$
- ▶ $\mathcal{G}$ tem como conjunto (enumerável) de seus vértices os símbolos

$$\mathbf{Vert}(\mathcal{G}) = \{|\mathbb{R}^n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \{|\mathbb{R}^0|, |\mathbb{R}^1|, |\mathbb{R}^2|, \dots, |\mathbb{R}^n|, \dots\}$$

Esboço da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $\mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} = (\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \emptyset);$
- ▶ $\mathcal{G}$ tem como conjunto (enumerável) de seus vértices os símbolos
 $\mathbf{Vert}(\mathcal{G}) = \{|\mathbb{R}^n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \{|\mathbb{R}^0|, |\mathbb{R}^1|, |\mathbb{R}^2|, \dots, |\mathbb{R}^n|, \dots\}$
- ▶ Arestas:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E} : \mathbf{Vert}(\mathcal{G}) \times \mathbf{Vert}(\mathcal{G}) & \rightarrow & \mathbf{Arestas}(\mathcal{G}) \\ (|\mathbb{R}^m|, |\mathbb{R}^n|) & \mapsto & |\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)| \end{array}$$

Esboçando Anéis C^∞

Esboço da Teoria dos Anéis C^∞

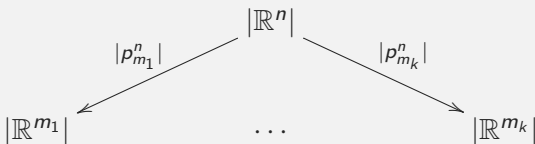
- Elementos de $\mathcal{D}$: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ tais que $h = f \circ (g_1, \dots, g_n) \rightsquigarrow$:

$$\begin{array}{ccc} |\mathbb{R}^k| & \xrightarrow{(|g_1|, \dots, |g_n|)} & |\mathbb{R}^n| \\ & \searrow |h| & \downarrow |f| \\ & & |\mathbb{R}^1| \end{array}$$

Esboçando Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Esboço da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ Elementos de $\mathcal{P}$: $n \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ tais que $n = m_1 + \dots, m_k$, temos em $\mathcal{P}$ o cone:



O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ em uma categoria com produtos finitos?

- ▶ **modelo de um esboço** $\mathcal{S}$ em uma categoria $\mathcal{C} \rightsquigarrow$
 $f : \mathcal{S} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$

O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ em uma categoria com produtos finitos?

- ▶ **modelo de um esboço** $\mathcal{S}$ em uma categoria $\mathcal{C} \rightsquigarrow$
 $f : \mathcal{S} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ Categoria $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$;

O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ em uma categoria com produtos finitos?

- ▶ **modelo de um esboço** $\mathcal{S}$ em uma categoria $\mathcal{C} \rightsquigarrow$
 $f : \mathcal{S} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ Categoria $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$;
- ▶ **objeto-anel** $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathcal{C}$:

O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ em uma categoria com produtos finitos?

- ▶ **modelo de um esboço** $\mathcal{S}$ em uma categoria $\mathcal{C} \rightsquigarrow$
 $f : \mathcal{S} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ Categoria $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$;
- ▶ **objeto-anel** $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathcal{C}$:

$$A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty \text{Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$$

O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ em uma categoria com produtos finitos?

- ▶ **modelo de um esboço** $\mathcal{S}$ em uma categoria $\mathcal{C} \rightsquigarrow$
 $f : \mathcal{S} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ Categoria $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$;
- ▶ **objeto-anel** $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathcal{C}$:

$$A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty \text{Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$$

- ▶ $\underline{\mathcal{C}^\infty \text{Rng}}(\mathcal{C})$ é uma categoria denominada “a categoria dos objetos anel $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathcal{C}$ ”.

► $A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$

- ▶ $A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ $A(|\mathbb{R}|) \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ tem estrutura $\mathcal{C}^\infty$:

- ▶ $A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ $A(|\mathbb{R}|) \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ tem estrutura $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A(|\mathbb{R}|)^n, A(|\mathbb{R}|)) \\ f & \mapsto & A(|f|) : A(|\mathbb{R}|)^n \rightarrow A(|\mathbb{R}|) \end{array}$$

- ▶ $A : \mathcal{S}_{\mathcal{C}^\infty\text{-Rng}} \rightarrow \text{sk}(\mathcal{C})$
- ▶ $A(|\mathbb{R}|) \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ tem estrutura $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A(|\mathbb{R}|)^n, A(|\mathbb{R}|)) \\ f & \mapsto & A(|f|) : A(|\mathbb{R}|)^n \rightarrow A(|\mathbb{R}|) \end{array}$$

- ▶ $(A(|\mathbb{R}|), \Psi)$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$.

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Apresentado

- ▶ Um anel da forma $\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}, \overline{\Phi_m} \right)$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Apresentado

- ▶ Um anel da forma $\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}, \overline{\Phi_m} \right)$
- ▶ (A, Φ) isomorfo a um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentado é um **anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentável**;

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Finitamente Apresentado

- ▶ Um anel da forma $\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}, \overline{\Phi_m} \right)$
- ▶ (A, Φ) isomorfo a um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentado é um **anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentável**;
- ▶ $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}$ categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentados.

Functor Exato à Esquerda

Definição : Um functor:

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

é **exato à esquerda** sse F preserva todos os limites finitos.

$$F\left(\varinjlim_{i \in I} C_i\right) = \varinjlim_{i \in I} F(C_i) \quad F\left(\varprojlim_{i \in I} C_i\right) = \varprojlim_{i \in I} F(C_i)$$

Functor Exato à Esquerda

Definição : Um functor:

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

é **exato à esquerda** sse F preserva todos os limites finitos.

$$F \left(\varinjlim_{i \in I} C_i \right) = \varinjlim_{i \in I} F(C_i) \quad F \left(\varprojlim_{i \in I} C_i \right) = \varprojlim_{i \in I} F(C_i)$$

Lex $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ categoria de todos os funtores exatos à esquerda de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$.

Teoria Funtorial

Definição : T é uma **teoria funtorial** se:

Teoria Funtorial

Definição : T é uma **teoria funtorial** se:

- ▶ Existir $\mathcal{C}_T$ com limites pequenos;

Teoria Funtorial

Definição : T é uma **teoria funtorial** se:

- ▶ Existir $\mathcal{C}_T$ com limites pequenos;
- ▶ $\mathcal{F}$ topos de Grothendieck $\Rightarrow$

Teoria Funtorial

Definição : T é uma **teoria funtorial** se:

- ▶ Existir $\mathcal{C}_T$ com limites pequenos;
- ▶ $\mathcal{F}$ topos de Grothendieck $\Rightarrow$
- ▶ $\text{Mod}_{\mathcal{F}}(T)$ naturalmente equivalente a:

Definição : T é uma **teoria funtorial** se:

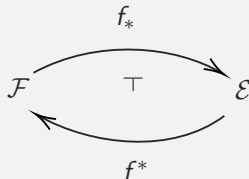
- ▶ Existir $\mathcal{C}_T$ com limites pequenos;
- ▶ $\mathcal{F}$ topos de Grothendieck $\Rightarrow$
- ▶ $\text{Mod}_{\mathcal{F}}(T)$ naturalmente equivalente a:
- ▶ $\text{Lex}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{plena}} \text{Funct}(\mathcal{C}_T, \mathcal{F})$

Morfismos Geométricos

► $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ toposes;

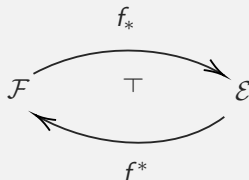
Morfismos Geométricos

- ▶ $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ toposes;
- ▶ Um **morfismo geométrico** $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ é um par de funtores:



Morfismos Geométricos

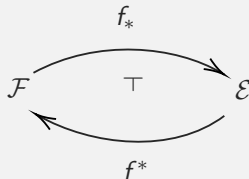
- ▶ $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ toposes;
- ▶ Um **morfismo geométrico** $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ é um par de funtores:



- ▶ $f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ parte imagem direta de f ;

Morfismos Geométricos

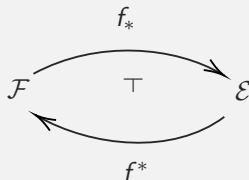
- ▶ $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ toposes;
- ▶ Um **morfismo geométrico** $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ é um par de funtores:



- ▶ $f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ parte imagem direta de f ;
- ▶ $f^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ parte imagem inversa;

Morfismos Geométricos

- ▶ $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ toposes;
- ▶ Um **morfismo geométrico** $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ é um par de funtores:



- ▶ $f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ parte imagem direta de f ;
- ▶ $f^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ parte imagem inversa;
- ▶ f^* exato à esquerda.

Topos Classificante de Uma Teoria Funtorial

Seja T uma teoria algébrica. T admite um **topos classificante** $(\mathcal{E}[T], M)$ quando existirem:

- (i) um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}[T]$;

Topos Classificante de Uma Teoria Funtorial

Seja T uma teoria algébrica. T admite um **topos classificante** $(\mathcal{E}[T], M)$ quando existirem:

- (i) um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}[T]$;
- (ii) um modelo $M : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{E}[T]$;

Topos Classificante de Uma Teoria Funtorial

Seja T uma teoria algébrica. T admite um **topos classificante** $(\mathcal{E}[T], M)$ quando existirem:

- (i) um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}[T]$;
- (ii) um modelo $M : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{E}[T]$;
- Para qualquer $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{F}} : \mathbf{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}[T]) &\rightarrow \mathbf{Lex}(\mathcal{C}_T, \mathcal{F}) \\ f = (f^*, f_*) &\mapsto M \circ f^* : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{F}\end{aligned}$$

é uma equivalência de categorias.

Topos Classificante da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

O topos de pré-feixes, $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}^{\text{op}}}$, munido do funtor esquecimento $R : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ classifica a teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$:

Topos Classificante da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$

O topos de pré-feixes, $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}^{\text{op}}}$, munido do funtor esquecimento $R : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ classifica a teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{f.p.}^{\text{op}}}) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}(\mathcal{E}) \\ f & \mapsto & \overline{f^*(R)} \end{array}$$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

► R é **anel local** sse:

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$
- ▶ $(\forall a \in R)((\exists b \in R)(a \cdot b = 1) \vee (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1))$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$
- ▶ $(\forall a \in R)((\exists b \in R)(a \cdot b = 1) \vee (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1))$
- ▶ Em um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}$, R é anel local em $\mathcal{E}$ sse a reunião dos subobjetos (representados por):

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$
- ▶ $(\forall a \in R)((\exists b \in R)(a \cdot b = 1) \vee (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1))$
- ▶ Em um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}$, R é anel local em $\mathcal{E}$ sse a reunião dos subobjetos (representados por):
 - ▶ $\{a \in R \mid (\exists b \in R)(a \cdot b = 1)\} \twoheadrightarrow R$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$
- ▶ $(\forall a \in R)((\exists b \in R)(a \cdot b = 1) \vee (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1))$
- ▶ Em um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}$, R é anel local em $\mathcal{E}$ sse a reunião dos subobjetos (representados por):
 - ▶ $\{a \in R \mid (\exists b \in R)(a \cdot b = 1)\} \twoheadrightarrow R$
 - ▶ $\{a \in R \mid (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1)\} \twoheadrightarrow R$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ R é **anel local** sse:
- ▶ $(\forall a \in R)((a \in \text{Inv}(R)) \vee (1 - a \in \text{Inv}(R)))$
- ▶ $(\forall a \in R)((\exists b \in R)(a \cdot b = 1) \vee (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1))$
- ▶ Em um topos de Grothendieck, $\mathcal{E}$, R é anel local em $\mathcal{E}$ sse a reunião dos subobjetos (representados por):
 - ▶ $\{a \in R \mid (\exists b \in R)(a \cdot b = 1)\} \twoheadrightarrow R$
 - ▶ $\{a \in R \mid (\exists b \in R)((1 - a) \cdot b = 1)\} \twoheadrightarrow R$totaliza R .

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ $\mathcal{E}$ um topos de Grothendieck;

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ $\mathcal{E}$ um topos de Grothendieck;
- ▶ $\underline{\mathcal{C}^\infty \text{LocRng}}(\mathcal{E})$

Anel $\mathcal{C}^\infty$ Local em um Topos de Grothendieck

- ▶ $\mathcal{E}$ um topos de Grothendieck;
- ▶ $\underline{\mathcal{C}^\infty \text{LocRng}}(\mathcal{E})$
- ▶ Topos classificante para a teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ locais = ?

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $a \in A$;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $a \in A$;
- ▶ “melhor” anel $\mathcal{C}^\infty$ onde uma cópia de a é invertível;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $a \in A$;
- ▶ “melhor” anel $\mathcal{C}^\infty$ onde uma cópia de a é invertível;
- ▶ $A\{a^{-1}\}$ e $\eta_A : A \rightarrow A\{a^{-1}\}$ morfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$ tais que:

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $f : A \rightarrow B$ tal que $f(a) \in B^\times \Rightarrow \exists! \bar{f} : A\{a^{-1}\} \rightarrow B$ tal que:
- ▶ $\bar{f} \circ \eta_a = f$, ou seja,

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ $f : A \rightarrow B$ tal que $f(a) \in B^\times \Rightarrow \exists! \bar{f} : A\{a^{-1}\} \rightarrow B$ tal que:
- ▶ $\bar{f} \circ \eta_a = f$, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_a} & A\{a^{-1}\} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & B \end{array}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$ com respeito a um conjunto:

- ▶ $f : A \rightarrow B$ tal que $(\forall a \in S)(f(a) \in B^\times) \Rightarrow$
 $\exists! \bar{f} : A[S^{-1}] \rightarrow B$ tal que:
- ▶ $\bar{f} \circ \eta_S = f$, ou seja,

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Anel de Frações $\mathcal{C}^\infty$ com respeito a um conjunto:

- ▶ $f : A \rightarrow B$ tal que $(\forall a \in S)(f(a) \in B^\times) \Rightarrow$
 $\exists! \bar{f} : A\{S^{-1}\} \rightarrow B$ tal que:
- ▶ $\bar{f} \circ \eta_S = f$, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_S} & A\{S^{-1}\} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & B \end{array}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

► $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\text{Coz}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = U \subset \mathbb{R}^n$ aberto;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\text{Coz}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = U \subset \mathbb{R}^n$ aberto;
- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(U), \Phi_U)$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\text{Coz}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = U \subset \mathbb{R}^n$ aberto;
- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(U), \Phi_U)$
- ▶

$$\begin{array}{ccc} \rho_U : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(U) \\ f & \mapsto & f|_U \end{array}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi_n), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\text{Coz}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = U \subset \mathbb{R}^n$ aberto;
- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(U), \Phi_U)$
- ▶

$$\begin{array}{ccc} \rho_U : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(U) \\ f & \mapsto & f|_U \end{array}$$

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\rho_U} \mathcal{C}^\infty(U))$ é o anel $\mathcal{C}^\infty$ de frações de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ com respeito a f .

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

► $U \subseteq \mathbb{R}^n;$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
- ▶ $S_U = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid U \subseteq U_g\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
- ▶ $S_U = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid U \subseteq U_g\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\eta_{S_U} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \{S_U^{-1}\}$

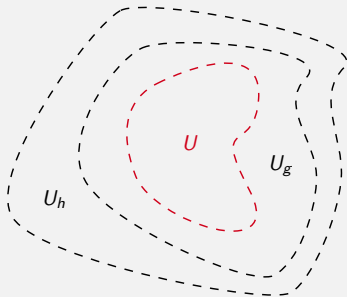
Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Exemplo:

- ▶ $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
- ▶ $S_U = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid U \subseteq U_g\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- ▶ $\eta_{S_U} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \{S_U^{-1}\}$
- ▶

$$\cong \begin{array}{ccc} \rho : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(U) \\ h & \mapsto & h|_U \end{array}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave



$$S_U = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid U \subseteq U_g\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ Frequentemente denotaremos (A, Φ) por A ;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ Frequentemente denotaremos (A, Φ) por A ;
- ▶ Em geral, $A, a \in A \not\Rightarrow (A\{a^{-1}\}, \eta_a : A \rightarrow A\{a^{-1}\})$ anel local.

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ Frequentemente denotaremos (A, Φ) por A ;
- ▶ Em geral, $A, a \in A \not\rightarrow (A\{a^{-1}\}, \eta_a : A \rightarrow A\{a^{-1}\})$ anel local.
- ▶ $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), f \not\equiv 0$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ Frequentemente denotaremos (A, Φ) por A ;
- ▶ Em geral, $A, a \in A \not\rightarrow (A\{a^{-1}\}, \eta_a : A \rightarrow A\{a^{-1}\})$ anel local.
- ▶ $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), f \not\equiv 0$
- ▶ $U_f = \text{Coz}(f) = \mathbb{R} \setminus Z(f)$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ Frequentemente denotaremos (A, Φ) por A ;
- ▶ Em geral, $A, a \in A \not\rightarrow (A\{a^{-1}\}, \eta_a : A \rightarrow A\{a^{-1}\})$ anel local.
- ▶ $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), f \neq 0$
- ▶ $U_f = \text{Coz}(f) = \mathbb{R} \setminus Z(f)$
- ▶ Para todo $x \in U_f$,

$$\mathfrak{m}_x = \{g \in \mathcal{C}^\infty(U_f) \mid g(x) = 0\}$$

é ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Saturação $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $S \subseteq A$;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Saturação $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $S \subseteq A$;
- ▶ $S^{\infty\text{-sat}} = \{a \in A \mid \eta_S(a) \in (A\{S^{-1}\})^\times\}$

Saturação $\mathcal{C}^\infty$

- ▶ A anel $\mathcal{C}^\infty$, $S \subseteq A$;
- ▶ $S^{\infty\text{-sat}} = \{a \in A \mid \eta_S(a) \in (A\{S^{-1}\})^\times\}$
- ▶ **Exemplo:** $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $U = U_f$, temos $S_{U_f} = \{f\}^{\infty\text{-sat}}$.

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

► **Álgebra Comutativa:** $I \rightsquigarrow \sqrt{I} = \{x \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x^n \in I)\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $I \rightsquigarrow \sqrt{I} = \{x \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x^n \in I)\}$
- ▶ **Álgebra Comutativa** $\models (\mathfrak{p} \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})$;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $I \rightsquigarrow \sqrt{I} = \{x \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x^n \in I)\}$
- ▶ **Álgebra Comutativa** $\models (\mathfrak{p} \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})$;
- ▶ **Álgebra Comutativa Suave** $\not\models (\mathfrak{p} \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})$;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $I \rightsquigarrow \sqrt{I} = \{x \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x^n \in I)\}$
- ▶ **Álgebra Comutativa** $\models (\mathfrak{p} \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})$;
- ▶ **Álgebra Comutativa Suave** $\not\models (\mathfrak{p} \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})$;
- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** $\mathfrak{p} \subseteq A \text{ primo} \not\Rightarrow A_{\mathfrak{p}} \text{ anel } \mathcal{C}^{\infty} \text{ local.}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Como definir radical de um ideal $\mathcal{C}^\infty$ de modo que A_p seja local?

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Como definir radical de um ideal $\mathcal{C}^\infty$ de modo que A_p seja local?

► Álgebra Comutativa: $R \in \text{Obj}(\mathbf{CRing})$

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in R \mid \left(\frac{R}{I} \right) [(x + I)^{-1}] \cong 0 \right\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Como definir radical de um ideal $\mathcal{C}^\infty$ de modo que A_p seja local?

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $R \in \text{Obj}(\mathbf{CRing})$

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in R \mid \left(\frac{R}{I} \right) [(x + I)^{-1}] \cong 0 \right\}$$

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})$

$$\sqrt[\infty]{I} := \left\{ a \in A \mid \left(\frac{A}{I} \right) \{(a + I)^{-1}\} \cong 0 \right\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Como definir radical de um ideal $\mathcal{C}^\infty$ de modo que A_p seja local?

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $R \in \text{Obj}(\mathbf{CRing})$

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in R \mid \left(\frac{R}{I} \right) [(x + I)^{-1}] \cong 0 \right\}$$

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})$

$$\sqrt[\infty]{I} := \left\{ a \in A \mid \left(\frac{A}{I} \right) \{(a + I)^{-1}\} \cong 0 \right\}$$

- ▶ **Notação:** $\mathfrak{I}_A^\infty = \{I \subseteq A \mid \sqrt[\infty]{I} = I\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

► **Álgebra Comutativa:** $R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{CRing}) \rightsquigarrow$

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ é ideal primo}\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa:** $R \in \mathbf{Obj}(\mathbf{CRing}) \rightsquigarrow$

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ é ideal primo}\}$$

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}) \rightsquigarrow$

$$\mathrm{Spec}^\infty(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid (\mathfrak{p} \text{ é ideal primo}) \& (\sqrt[\infty]{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p})\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski no Espectro

- ▶ **Álgebra Comutativa:** Em $\text{Spec}(R)$, definimos:

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski no Espectro

- ▶ **Álgebra Comutativa:** Em $\text{Spec}(R)$, definimos:
 - ▶ $a \in R \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski no Espectro

- ▶ **Álgebra Comutativa:** Em $\text{Spec}(R)$, definimos:
 - ▶ $a \in R \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$
 - ▶ $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal qualquer, $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski no Espectro

- ▶ **Álgebra Comutativa:** Em $\text{Spec}(R)$, definimos:
 - ▶ $a \in R \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$
 - ▶ $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal qualquer, $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar} := \{\text{Spec}(R) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}(R)\}$$

Topologia de Zariski no Espectro

- ▶ **Álgebra Comutativa:** Em $\text{Spec}(R)$, definimos:
 - ▶ $a \in R \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$
 - ▶ $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal qualquer, $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar} := \{\text{Spec}(R) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}(R)\}$$

- ▶ $(\text{Spec}(R), \text{Zar})$ espectro de Zariski.

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:
 - ▶ $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:
 - ▶ $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$
 - ▶ $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

► **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:

► $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

► $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar}^\infty := \{\text{Spec}^\infty(A) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}_A^\infty\}$$

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:

- ▶ $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

- ▶ $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar}^\infty := \{\text{Spec}^\infty(A) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}_A^\infty\}$$

- ▶ $(\text{Spec}^\infty(A), \text{Zar}^\infty)$ espectro de Zariski suave.

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:

- ▶ $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

- ▶ $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar}^\infty := \{\text{Spec}^\infty(A) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}_A^\infty\}$$

- ▶ $(\text{Spec}^\infty(A), \text{Zar}^\infty)$ espectro de Zariski suave.
- ▶ $1_A \in \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle \iff \text{Spec}^\infty(A) = \bigcup_{i=1}^n D^\infty(a_i)$;

Topologia de Zariski Suave

- ▶ **Álgebra Comutativa Suave:** Em $\text{Spec}^\infty(A)$, definimos:

- ▶ $a \in A \rightsquigarrow D^\infty(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$

- ▶ $Z^\infty(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\infty(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$



$$\text{Zar}^\infty := \{\text{Spec}^\infty(A) \setminus Z^\infty(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{I}_A^\infty\}$$

- ▶ $(\text{Spec}^\infty(A), \text{Zar}^\infty)$ espectro de Zariski suave.
- ▶ $1_A \in \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle \iff \text{Spec}^\infty(A) = \bigcup_{i=1}^n D^\infty(a_i)$;
- ▶ $\text{Spec}^\infty(A)$ é um espaço topológico espectral;

Tópicos de Álgebra Comutativa Suave

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}^{\infty} : & \mathcal{C}^{\infty}\mathbf{Rng} & \rightarrow \mathbf{Top} \\ & (A \xrightarrow{h} B) & \mapsto (\mathrm{Spec}^{\infty}(B) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Spec}^{\infty}(A)) \end{array}$$

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A \times \dots \times A$ tais que
 $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle = A$

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A \times \dots \times A$ tais que $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle = A$
- ▶ $\{k_i : A \rightarrow B_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ tal que:

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A \times \dots \times A$ tais que $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle = A$
- ▶ $\{k_i : A \rightarrow B_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ tal que:
 - ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n\}, k_i(a_i) \in B_i^\times$

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A \times \dots \times A$ tais que $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle = A$
- ▶ $\{k_i : A \rightarrow B_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ tal que:
 - ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n\}, k_i(a_i) \in B_i^\times$
 - ▶ $k_i(a) = 0 \Rightarrow \exists s_i \in \{a_i\}^{\infty\text{-sat}}$ tal que $a \cdot s_i = 0$;

Pré-Topologia de Grothendieck

- ▶ $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A \times \dots \times A$ tais que $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle = A$
- ▶ $\{k_i : A \rightarrow B_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ tal que:
 - ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n\}, k_i(a_i) \in B_i^\times$
 - ▶ $k_i(a) = 0 \Rightarrow \exists s_i \in \{a_i\}^{\infty\text{-sat}}$ tal que $a \cdot s_i = 0$;
 - ▶ $\forall b \in B_i$ existem $c \in \{a_i\}^{\infty\text{-sat}}$ e $d \in A$ tais que $b \cdot k_i(c) = k_i(d)$

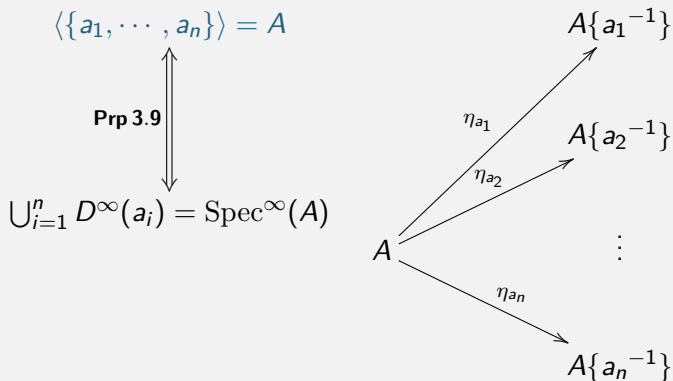
$$\text{coCov}(A)$$

Construindo o Topos de Zariski Suave - A Pré-Topologia de Grothendieck

Note-se que se $k_i : A \rightarrow B_i$ satisfaz os itens (i), (ii) e (iii) acima, então tem-se:

$$(B_i, k_i : A \rightarrow B) \cong (A\{a_i^{-1}\}, \eta_{a_i} : A \rightarrow A\{a_i^{-1}\}).$$

A Menos de Isomorfismos...



Construindo o Topos de Zariski Suave - A Pré-Topologia de Grothendieck

Dado um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentado, uma **família recobridora** para A em $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}$ é dada por:

$$\text{Cov}(A) = \{f^{\text{op}} : B \rightarrow A \mid (f : A \rightarrow B) \in \text{coCov}(A)\}$$

Construindo o Topos de Zariski Suave - A Pré-Topologia de Grothendieck

Dado um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentado, uma **família recobridora** para A em $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}$ é dada por:

$$\text{Cov}(A) = \{f^{\text{op}} : B \rightarrow A \mid (f : A \rightarrow B) \in \text{coCov}(A)\}$$

Cov é uma pré-topologia em $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}$. (ver **Proposição 3.10** de [1]).

Construindo o Topos de Zariski Suave - A Topologia de Grothendieck

Tem-se que

$$\begin{aligned} J_{\text{Cov}} : \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}) &\rightarrow \wp(\wp(\text{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}))) \\ J_{\text{Cov}}(A) &:= \\ = \{ \overleftarrow{S} \subseteq \bigcup_{B \in \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}})} \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}}(B, A) \mid S \in \text{Cov}(A) \} \end{aligned}$$

Construindo o Topos de Zariski Suave - A Topologia de Grothendieck

Tem-se que

$$J_{\text{Cov}} : \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}) \rightarrow \wp(\wp(\text{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}})))$$

$$J_{\text{Cov}}(A) :=$$

$$= \{ \overleftarrow{S} \subseteq \bigcup_{B \in \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}})} \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}}(B, A) \mid S \in \text{Cov}(A) \}$$

► $(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$ sítio pequeno;

Construindo o Topos de Zariski Suave - A Topologia de Grothendieck

Tem-se que

$$J_{\text{Cov}} : \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}) \rightarrow \wp(\wp(\text{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}})))$$

$$J_{\text{Cov}}(A) :=$$

$$= \{ \overleftarrow{S} \subseteq \bigcup_{B \in \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}})} \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}}(B, A) \mid S \in \text{Cov}(A) \}$$

- ▶ $(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$ sítio pequeno;
- ▶ J_{Cov} subcanônica;
- ▶ $\mathcal{O} : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ (esquecimento) feixe estrutural do topos;

O Topos Classificante da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Locais

Teorema 3.16 (de [1]): $\mathcal{Z}^\infty = \mathbf{Sh}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$, munido do feixe $\mathcal{O}$ é o topos classificante da teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ locais:

O Topos Classificante da Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Locais

Teorema 3.16 (de [1]): $\mathcal{Z}^\infty = \mathbf{Sh}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}_{\text{fp}}^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$, munido do feixe $\mathcal{O}$ é o topos classificante da teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ locais:

$$\mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^\infty) \simeq \underline{\mathcal{C}^\infty \text{LocRng}}(\mathcal{E})$$

Referências

Principais referências utilizadas

- [1] Adámek, J., Rosický, J., Vitale, E.M., *Algebraic Theories - A Categorical Introduction to General Algebra*, Cambridge University Press, 2011.
- [2] Berni, J.C., Mariano, H.L. *Classifying Toposes for Some Theories of C^∞ -Rings*, South American Journal of Logic, v. 4, n.2, pp. 313 - 350, 2018. Disponível em <http://www.sa-logic.org/sajl-v4-i2/04-Berni-Mariano-SAJL.pdf>
- [3] Berni, J.C., Mariano, H.L. *Topics on Smooth Commutative Algebra*, disponível em <https://arxiv.org/pdf/1904.02725.pdf>
- [4] MacLane, S., Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, 1992.

Obrigado!

www.ime.usp.br/~jeancb/gdsm



jeancb@ime.usp.br