

Introdução à Geometria Diferencial Sintética e Seus Modelos - Aula 6

Prof. Jean Cerqueira Berni & Prof. Hugo Luiz Mariano



jeancb@ime.usp.br

Outra Abordagem para a GDS - A Noção de Vizinhança como Conceito Primitivo

- ▶ “New methods for old spaces: Synthetic Differential Geometry”, Anders Kock;

Outra Abordagem para a GDS - A Noção de Vizinhança como Conceito Primitivo

- ▶ “New methods for old spaces: Synthetic Differential Geometry”, Anders Kock;
- ▶ A noção de **pares de pontos vizinhos** é mais básica do que a de “anel do tipo linha” (que pode ser introduzido posteriormente);

Outra Abordagem para a GDS - A Noção de Vizinhança como Conceito Primitivo

- ▶ “New methods for old spaces: Synthetic Differential Geometry”, Anders Kock;
- ▶ A noção de **pares de pontos vizinhos** é mais básica do que a de “anel do tipo linha” (que pode ser introduzido posteriormente);
- ▶ Conceitos centrais da Geometria Diferencial;

Noção Sintética de Vizinhaça

- ▶ M espaço suave;

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ M espaço suave;
- ▶ munido de $\sim_M \rightarrow M \times M$

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ M espaço suave;
- ▶ munido de $\sim_M \rightarrow M \times M$
- ▶ **Reflexiva:** $x \sim_M x$;

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ M espaço suave;
- ▶ munido de $\sim_M \rightarrow M \times M$
- ▶ **Reflexiva:** $x \sim_M x$;
- ▶ **Simétrica:** $x \sim_M y \Rightarrow y \sim_M x$
- ▶ **Não-transitiva.**

Noção Sintética de Vizinhaça

- ▶ M espaço suave;
- ▶ munido de $\sim_M \rightarrow M \times M$
- ▶ **Reflexiva:** $x \sim_M x$;
- ▶ **Simétrica:** $x \sim_M y \Rightarrow y \sim_M x$
- ▶ **Não-transitiva.**
- ▶ $M \xrightarrow{f} N$ morfismo em $\mathbf{S}$

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ M espaço suave;
- ▶ munido de $\sim_M \rightarrow M \times M$
- ▶ **Reflexiva:** $x \sim_M x$;
- ▶ **Simétrica:** $x \sim_M y \Rightarrow y \sim_M x$
- ▶ **Não-transitiva.**
- ▶ $M \xrightarrow{f} N$ morfismo em **S**
- ▶ $x \sim_M y \Rightarrow f(x) \sim_N f(y)$

Noção Sintética de Vizinhança

► Primeira Vizinhança da Diagonal de M

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ **Primeira Vizinhança da Diagonal de M**
- ▶ $M_{(1)} = \{(x, y) \in M \times M \mid x \sim_M y\}$

Noção Sintética de Vizinhaça

- ▶ **Primeira Vizinhaça da Diagonal de M**
- ▶ $M_{(1)} = \{(x, y) \in M \times M \mid x \sim_M y\}$
- ▶ **Mônada (de primeira ordem) no entorno de x :**
 $\mathfrak{M}(x) = \{y \in M \mid y \sim_M x\}$

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ Primeira Vizinhança da Diagonal de M

Noção Sintética de Vizinhança

- ▶ **Primeira Vizinhança da Diagonal de M**
- ▶ $M_{(1)} = \{(x, y) \in M \times M \mid x \sim_M y\}$

Noção Sintética de Vizinhaça

- ▶ **Primeira Vizinhaça da Diagonal de M**
- ▶ $M_{(1)} = \{(x, y) \in M \times M \mid x \sim_M y\}$
- ▶ **Mônada (de primeira ordem) no entorno de x :**
 $\mathfrak{M}(x) = \{y \in M \mid y \sim_M x\}$

Noção Sintética de Tangência

$$\blacktriangleright S, T \rightsquigarrow M$$

Noção Sintética de Tangência

► $S, T \rightsquigarrow M$

► $x \in S \cap T$

Noção Sintética de Tangência

- ▶ $S, T \curvearrowright M$
- ▶ $x \in S \cap T$
- ▶ S e T se tangenciam em x :

$$S \cap \underline{\mathfrak{M}}(x) = T \cap \underline{\mathfrak{M}}(x)$$

Distribuições Geométricas em M

- ▶ Relação reflexiva e simétrica $\approx \rightarrow M \times M$ tal que:

Distribuições Geométricas em M

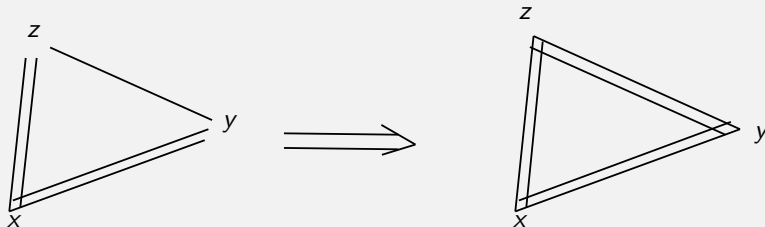
- ▶ Relação reflexiva e simétrica $\approx \rightharpoonup M \times M$ tal que:
- ▶ $(\forall x \in M)(\underline{\mathfrak{M}}_{\approx}(x) \subseteq \underline{\mathfrak{M}}_{\sim}(x))$ [dizemos que $\approx$ “refina” $\sim$]

Distribuições Geométricas em M

- ▶ Relação reflexiva e simétrica $\approx \rightarrow M \times M$ tal que:
- ▶ $(\forall x \in M)(\underline{\mathfrak{M}}_{\approx}(x) \subseteq \underline{\mathfrak{M}}_{\sim}(x))$ [dizemos que $\approx$ “refina” $\sim$]
- ▶ $\approx$ **involutiva** sse:

$$(x \approx y) \& (x \approx z) \& (y \sim_M z) \Rightarrow (y \approx z)$$

Distribuição Geométrica Involutiva em M



Subconjuntos Integrais

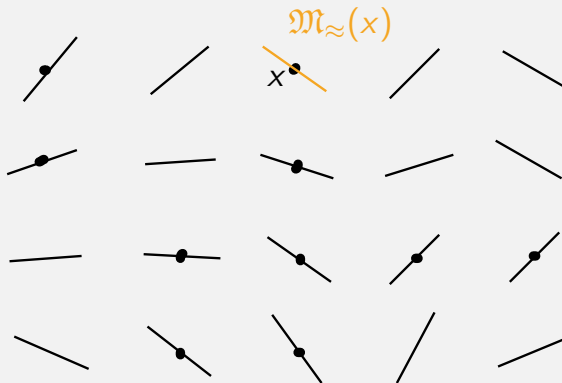
► $F \mapsto M \times M$ é um **subconjunto integral** para $\approx$ se:

Subconjuntos Integrais

- ▶ $F \mapsto M \times M$ é um **subconjunto integral** para $\approx$ se:
- ▶ F é tal que $F \cap \sim = F \cap \approx$

Subconjuntos Integrais

- ▶ $F \mapsto M \times M$ é um **subconjunto integral** para $\approx$ se:
- ▶ F é tal que $F \cap \sim = F \cap \approx$



Exemplo de Distribuição Involutiva

$$x \approx y \iff (x \sim_M y) \& (f(x) = f(y))$$

Teorema de Frobenius

- ▶ Distribuições involutivas admitem *folhas* (subconjuntos integrais maximais conectados uns aos outros)

2-Simplexos Infinitesimais

2-Simplexo Infinitesimal:

► $x_0, x_1, x_2 \in M$

2-Simplexos Infinitesimais

2-Simplexo Infinitesimal:

- ▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim x_2$

2-Simplexos Infinitesimais

2-Simplexo Infinitesimal:

- ▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim x_2$
- ▶ (x_0, x_1, x_2) é um **2-simplexo infinitesimal**.

2-Simplexos Infinitesimais

2-Simplexo Infinitesimal:

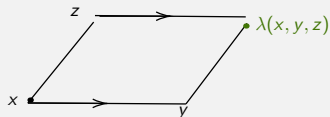
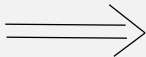
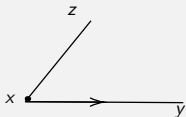
- ▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim x_2$
- ▶ (x_0, x_1, x_2) é um **2-simplexo infinitesimal**.
- ▶ $M_{[2]}$ objeto dos 2-simplexos infinitesimais de M

Conexão Afim

$$\begin{array}{lll} \lambda : & M_{[2]} & \rightarrow M \\ & (x, y, z) & \mapsto \lambda(x, y, z) \end{array}$$

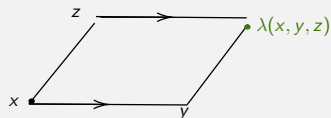
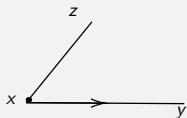
Conexão Afim

► $\lambda : M_{[2]} \rightarrow M$
 $(x, y, z) \mapsto \lambda(x, y, z)$



Conexão Afim

► $\lambda : M_{[2]} \rightarrow M$
 $(x, y, z) \mapsto \lambda(x, y, z)$



► $y \sim_M \lambda(x, y, z)$ e $z \sim_M \lambda(x, y, z)$

Conexão Afim Simétrica

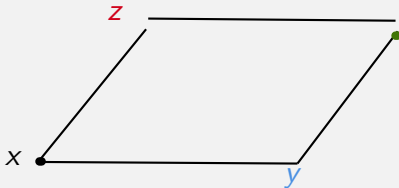
► λ é simétrica sse:

Conexão Afim Simétrica

- ▶ λ é simétrica sse:
- ▶ $(x, y, z) \in M_{[2]}$

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(x, z, y)$$

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(x, z, y)$$



Geodésica com Respeito à Conexão Afim Simétrica

λ

$$\blacktriangleright S \rightsquigarrow M$$

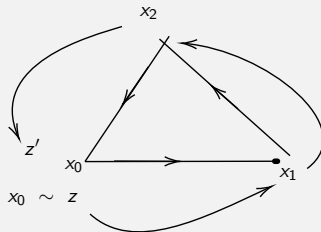
Geodésica com Respeito à Conexão Afim Simétrica

λ

► $S \rightarrowtail M$

► $(\forall x, y, z \in S)((x \sim_M y) \& (x \sim_M z) \Rightarrow \lambda(x, y, z) \in S)$

Curvatura de uma Conexão Afim



- “tensor de curvatura de Riemann-Christoffel”

$$R : M_{[k]} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{M}(x_0))$$

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto \left\{ R(x_0, y_0, z_0) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(x_0) & \rightarrow & \mathfrak{M}(x_0) \\ z & \mapsto & z' \end{array} \right.$$

Conexão Afim Plana

Conexão Afim Plana

Conexão Afim Plana

Conexão Afim Plana

► $x_0, x_1, x_2 \in M$

Conexão Afim Plana

Conexão Afim Plana

▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$

▶ $x_0 \sim_M x_1 \sim x_2$

Conexão Afim Plana

Conexão Afim Plana

- ▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$
- ▶ $x_0 \sim_M x_1 \sim x_2$
- ▶ Para todo 2-simplexo infinitesimal (x_0, x_1, x_2)

Conexão Afim Plana

- ▶ $x_0, x_1, x_2 \in M$
- ▶ $x_0 \sim_M x_1 \sim x_2$
- ▶ Para todo 2-simplexo infinitesimal (x_0, x_1, x_2)
- ▶ $R(x_0, x_1, x_2) = \text{id}_{\mathfrak{M}(x_0)}$

k —Simplexos Infinitesimais

k -Simplexo Infinitesimal:

► $x_0, x_1, \dots, x_k \in M$

k –Simplexos Infinitesimais

k -Simplexo Infinitesimal:

- ▶ $x_0, x_1, \dots, x_k \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim_M x_2, \dots, x_{k-1} \sim_M x_k$

k —Simplexos Infinitesimais

k -Simplexo Infinitesimal:

- ▶ $x_0, x_1, \dots, x_k \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim_M x_2, \dots, x_{k-1} \sim_M x_k$
- ▶ $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ é um k -**simplexo**.

k —Simplexos Infinitesimais

k -Simplexo Infinitesimal:

- ▶ $x_0, x_1, \dots, x_k \in M$
- ▶ Se $x_0 \sim_M x_1, x_1 \sim_M x_2, \dots, x_{k-1} \sim_M x_k$
- ▶ $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ é um k -**simplexo**.
- ▶ $M_{[k]} \mapsto M^{k+1}$ objeto dos k —simplexos infinitesimais;

Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ G grupo;

Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ G grupo;
- ▶ $\omega : M_{[k]} \rightarrow G$

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ G grupo;
- ▶ $\omega : M_{[k]} \rightarrow G$
- ▶ tal que:

$$\omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \begin{cases} \omega(x_1, \dots, x_n) & \text{se } \sigma \text{ for par;} \\ \text{inv}(\omega(x_1, \dots, x_n)) & \text{se } \sigma \text{ for ímpar;} \end{cases}$$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

► 0—formas com valores em $G \rightsquigarrow M \xrightarrow{f} G$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 0—formas com valores em $G \rightsquigarrow M \xrightarrow{f} G$
- ▶ $M \xrightarrow{f} G$ tem um 1—cobordo dado por:

$$df : M_{[2]} \rightarrow G$$

$$(x_0, x_1) \mapsto df(x_0, x_1) := f(x_0) * \text{inv}(f(x_1))$$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 0—formas com valores em $G \rightsquigarrow M \xrightarrow{f} G$
- ▶ $M \xrightarrow{f} G$ tem um 1—cobordo dado por:

$$df : M_{[2]} \rightarrow G$$

$$(x_0, x_1) \mapsto df(x_0, x_1) := f(x_0) * \text{inv}(f(x_1))$$

- ▶ ω 1-forma $\Rightarrow$

$$d\omega(x, y, z) = \omega(x, y) * \omega(y, z) * \omega(z, x)$$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

k –Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 1–forma $\omega : M_{[1]} \rightarrow G$ é **fechada** sse $d\omega \equiv e$;

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 1-forma $\omega : M_{[1]} \rightarrow G$ é **fechada** sse $d\omega \equiv e$;
- ▶ df sempre é fechada;

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 1-forma $\omega : M_{[1]} \rightarrow G$ é **fechada** sse $d\omega \equiv e$;
- ▶ df sempre é fechada;
- ▶ G grupo

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 1—forma $\omega : M_{[1]} \rightarrow G$ é **fechada** sse $d\omega \equiv e$;
- ▶ df sempre é fechada;
- ▶ G grupo
- ▶ $\text{id}_G : G \rightarrow G$

k —Formas Diferenciais

k -Forma Diferencial em M com valores em $(G, *, \text{inv}, e)$

- ▶ 1—forma $\omega : M_{[1]} \rightarrow G$ é **fechada** sse $d\omega \equiv e$;
- ▶ df sempre é fechada;
- ▶ G grupo
- ▶ $\text{id}_G : G \rightarrow G$
- ▶ $\Rightarrow d\text{id}_G : G \times G \rightarrow G$ **forma de Maurer-Cartan**

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica

- ▶ M variedade suave;

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica

- ▶ M variedade suave;



$$\begin{aligned}\mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M\end{aligned}$$

- ▶ $\mathcal{D}$ é diferenciável se existirem $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(M)$ tais que $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$ é base de D_x .

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Involutiva

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Involutiva



$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M \end{aligned}$$

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Involutiva



$$\begin{aligned}\mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M\end{aligned}$$



$$(\forall X, Y \in \mathcal{D})([X, Y] \in \mathcal{D})$$

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Integrável

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Integrável



$$\begin{aligned}\mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M\end{aligned}$$

k –Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k –Distribuição Geométrica Integrável



$$\begin{aligned}\mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M\end{aligned}$$

- ▶ Existirem $L \subseteq M$ subvariedade de dimensão k , $f : L \rightarrow M$ tais que para todo $x \in M$:

k —Distribuições Geométricas e Formas no Contexto Analítico

k —Distribuição Geométrica Integrável



$$\begin{aligned}\mathcal{D} : M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathbf{G}_k(T_x M) \\ x &\mapsto D_x \subseteq T_x M\end{aligned}$$

- Existirem $L \subseteq M$ subvariedade de dimensão k , $f : L \rightarrow M$ tais que para todo $x \in M$:

$$df_x[T_x L] = D_x$$

Distribuições Geométricas e Formas

► ω 1-forma em M

Distribuições Geométricas e Formas

► ω 1-forma em M

$$x \approx y \iff \omega(x, y) = 0$$

é uma distribuição geométrica;

Distribuições Geométricas e Formas

- ▶ ω 1-forma em M

$$x \approx y \iff \omega(x, y) = 0$$

é uma distribuição geométrica;

- ▶ ω fechada $\Rightarrow \approx$ é involutiva.

k —Formas Diferenciais

Produto Exterior de k -Formas Diferenciais em M com valores no Grupo Aditivo de Um Anel Comutativo com Unidade

k —Formas Diferenciais

Produto Exterior de k -Formas Diferenciais em M com valores no Grupo Aditivo de Um Anel Comutativo com Unidade

- ▶ $(G, +, -, 0)$ grupo aditivo de um anel $(R, +, \cdot, 0, 1)$

k –Formas Diferenciais

Produto Exterior de k -Formas Diferenciais em M com valores no Grupo Aditivo de Um Anel Comutativo com Unidade

- ▶ $(G, +, -, 0)$ grupo aditivo de um anel $(R, +, \cdot, 0, 1)$
- ▶ α, β 1-formas;

k —Formas Diferenciais

Produto Exterior de k -Formas Diferenciais em M com valores no Grupo Aditivo de Um Anel Comutativo com Unidade

- ▶ $(G, +, -, 0)$ grupo aditivo de um anel $(R, +, \cdot, 0, 1)$
- ▶ α, β 1-formas;
- ▶ 2-forma:

$$(\omega \wedge \alpha)(x, y, z) = \omega(x, y) \cdot \alpha(y, z)$$

Produto Exterior de k -Formas Diferenciais em M com valores no Grupo Aditivo de Um Anel Comutativo com Unidade

- ▶ $(G, +, -, 0)$ grupo aditivo de um anel $(R, +, \cdot, 0, 1)$
- ▶ α, β 1-formas;
- ▶ 2-forma:

$$(\omega \wedge \alpha)(x, y, z) = \omega(x, y) \cdot \alpha(y, z)$$

- ▶ $(\Omega^\bullet(M), d, \wedge)$

Envelope de uma Família de “Curvas”

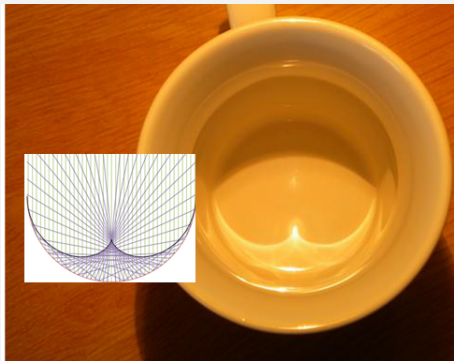


Figura 1: A cardioide como envelope de uma família de retas.

Características e Envelopes

Envelope de uma Família de “curvas”

Características e Envelopes

Envelope de uma Família de “curvas”

$$\begin{array}{lll} \text{▶ } \phi : & T & \rightarrow \text{Sub}(M) \\ & t & \mapsto S_t \end{array}$$

Características e Envelopes

Envelope de uma Família de “curvas”

▶
$$\begin{array}{ccc} \phi : & T & \rightarrow \text{Sub}(M) \\ & t & \mapsto S_t \end{array}$$

▶ A característica de $\{S_t\}_{t \in T}$ para $t_0 \in T$ é:

$$C_{t_0} = \bigcap_{t \sim_M t_0} S_t$$

Características e Envelopes

Envelope de uma Família de “curvas”

$$\begin{array}{rcl} \blacktriangleright & \phi : & T \rightarrow \text{Sub}(M) \\ & & t \mapsto S_t \end{array}$$

- ▶ A característica de $\{S_t\}_{t \in T}$ para $t_0 \in T$ é:

$$C_{t_0} = \bigcap_{t \sim_M t_0} S_t$$

- ▶ O **envelope** de $\{S_t\}_{t \in T}$ é a reunião de todas as características:

$$E = \bigcup_{t \in T} C_t$$

- ▶ O que é Geometria Diferencial Sintética?

Revisão

- ▶ O que é Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algumas obstruções da categoria **Man** quanto a construções.

Revisão

- ▶ O que é Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algumas obstruções da categoria **Man** quanto a construções.
- ▶ Enuncie o **Axioma de Kock-Lawvere** de duas maneiras equivalentes.

- ▶ O que é Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algumas obstruções da categoria **Man** quanto a construções.
- ▶ Enuncie o **Axioma de Kock-Lawvere** de duas maneiras equivalentes.
- ▶ Que tipo de estrutura deve ter **Sub** (D) para que o **Axioma de Kock-Lawvere** não implique $R = \{0\}$?

Revisão

- ▶ O que é um topos?

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em **Sets** ^{$\mathbb{R}$ -Alg^{op}_{f.g.}}.

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ O que é a categoria dos loci, $\mathbb{L}$?

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{f.g.}^{\text{op}}}$.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ O que é a categoria dos loci, $\mathbb{L}$?
- ▶ Cite algumas construções disponíveis em $\mathbb{L}$ que não estão disponíveis em $\mathbf{Man}$.

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em **Sets** ^{$\mathbb{R}$ -Alg^{op}_{f.g.}}.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ O que é a categoria dos loci, $\mathbb{L}$?
- ▶ Cite algumas construções disponíveis em $\mathbb{L}$ que não estão disponíveis em **Man**.
- ▶ Que tipo de conectivos e de quantificadores precisamos para enunciar que o objeto anel do tipo linha, $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ é:

Revisão

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em **Sets** ^{$\mathbb{R}$ -Alg^{op}_{f.g.}}.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ O que é a categoria dos loci, $\mathbb{L}$?
- ▶ Cite algumas construções disponíveis em $\mathbb{L}$ que não estão disponíveis em **Man**.
- ▶ Que tipo de conectivos e de quantificadores precisamos para enunciar que o objeto anel do tipo linha, $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ é:
 - ▶ um anel local;

- ▶ O que é um topos?
- ▶ O que é um modelo para a Geometria Diferencial Sintética?
- ▶ Cite algum axioma da GDS que valha em **Sets** ^{$\mathbb{R}$ -Alg^{op}_{f.g.}}.
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ O que é a categoria dos loci, $\mathbb{L}$?
- ▶ Cite algumas construções disponíveis em $\mathbb{L}$ que não estão disponíveis em **Man**.
- ▶ Que tipo de conectivos e de quantificadores precisamos para enunciar que o objeto anel do tipo linha, $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ é:
 - ▶ um anel local;
 - ▶ um anel arquimediano;

Revisão

- ▶ O que é um ideal germe-determinado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$?

Revisão

- ▶ O que é um ideal germe-determinado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$?
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado?

- ▶ O que é um ideal germe-determinado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$?
- ▶ O que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado?
- ▶ Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é germe determinado, tem-se $I|_U$ germe-determinado?

Revisão

- ▶ Qual categoria pequena utilizamos para construir o **topos de Dubuc**?

Revisão

- ▶ Qual categoria pequena utilizamos para construir o **topos de Dubuc**?
- ▶ Como é descrita a pré-topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$?

Revisão

- ▶ Qual categoria pequena utilizamos para construir o **topos de Dubuc**?
- ▶ Como é descrita a pré-topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$?
- ▶ O que é o topos de Dubuc?

Revisão

- ▶ Qual categoria pequena utilizamos para construir o **topos de Dubuc**?
- ▶ Como é descrita a pré-topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$?
- ▶ O que é o topos de Dubuc?
- ▶ Qual é o topos classificante para a Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$?

- ▶ Qual categoria pequena utilizamos para construir o **topos de Dubuc**?
- ▶ Como é descrita a pré-topologia de Grothendieck em $\mathbb{G}$?
- ▶ O que é o topos de Dubuc?
- ▶ Qual é o topos classificante para a Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$?
- ▶ Qual é o topos classificante para a Teoria dos Anéis $\mathcal{C}^\infty$ Locais?

Referências

Principais referências utilizadas

- [1] Kock, A. *First Neighbourhood of the Diagonal and Geometric Distributions*, disponível em <https://tildeweb.au.dk/au76680/FNDGD.pdf>
- [2] Kock, A., *New methods for old spaces: Synthetic Differential Geometry*, disponível em <https://arxiv.org/pdf/1610.00286.pdf>

Obrigado!

www.ime.usp.br/~jeancb/gdsm



jeancb@ime.usp.br