Material Suplementar

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

O objetivo deste material é apresentar as principais propriedades dos números reais. Não nos preocuparemos aqui com a definição de número real, e assumiremos apenas familiaridade do leitor com as propriedades dos números naturais, inteiros e racionais.

Os fatos aqui apresentados serão usados no decorrer do nosso curso de Cálculo, e nos referiremos a estes resultados frequentemente. Desta forma, é recomendável que o aluno faça uma leitura deste material.

1 O Conjunto dos Números Naturais

Os conceitos de conjunto e função pertencem aos Fundamentos da Matemática. Portanto, ao iniciar nosso curso, é necessário fazermos algumas considerações sobre tais conceitos, a fim de evitar seu uso inadequado posteriormente.

A formalização da Teoria dos Conjuntos em um contexto logicamente rigoroso é obra de grandes matemáticos dos séculos XIX e XX. As contribuições de Georg Cantor, David Hilbert e Kurt Gödel foram decisivas e repercutem até hoje.

No nosso curso não utilizaremos nenhum dos aspectos delicados da Teoria dos Conjuntos. Na verdade, precisamos definir apenas alguns termos.

A palavra *conjunto* é usada para designar uma coleção qualquer de objetos. Por exemplo, o conjunto das carteiras em uma sala de aula, o conjunto das crianças menores de dez anos, o conjunto dos números pares e assim por diante. Lidaremos com conjuntos numéricos, isto é, coleções de números. Começaremos com o conjunto dos números naturais, que é apresentado como:

*jeancb@ime.usp.br

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

A existência de um tal conjunto é simplesmente postulada, e demonstra-se que é equivalente ao **Axioma do Infinito** da Teoria dos Conjuntos.

Este conjunto pode ser descrito de um modo mais rigoroso utilizando-se os chamados **Axiomas de Dedekind-Peano**. Os axiomas a seguir caracterizam completamente o sistema de números naturais que conhecemos:

Axiomas de Dedekind-Peano: O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é o único tal que:

(DP1) Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado **o sucessor de** n;

(DP2) A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetora;

(DP3) Existe um único elemento em $\mathbb{N}$, denotado por 1, tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(s(n) \neq 1)$;

(DP4) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, para qualquer $n \in X$ tivermos $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mencionada nos axiomas acima é chamada de "função sucessor", e é dada por $s(n) = n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

O axioma (DP4) é tão importante que merece algum destaque. Ele também é conhecido como "o **Princípio da Indução Finita**", que é muito utilizado para se demonstrar proposições acerca de números naturais.

Seja $\mathscr{P}$ uma "propriedade" de algum número natural; escreveremos $\mathscr{P}(n)$ para denotar a fórmula que expressa "n satisfaz à propriedade $\mathscr{P}$".

Por exemplo, se $\mathscr{P}$ é a propriedade "ser múltiplo de 3", então $\mathscr{P}(n)$ significa "n é múltiplo de 3", e $\mathscr{P}(9)$ é válida, enquanto que $\mathscr{P}(10)$ não é. Se $\mathscr{P}$ é a propriedade "ser quadrado perfeito", então $\mathscr{P}(n)$ significa "n é um quadrado perfeito", e $\mathscr{P}(4)$ é válida, enquanto que $\mathscr{P}(5)$ não é, e assim por diante.

Considere $X_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}(n)\}$ (ou seja, X_0 é o conjunto de todos os números naturais que satisfazem a propriedade $\mathscr{P}$). Reescrevendo o terceiro axioma de Peano para X_0 obtemos o:

Princípio da Indução Finita: Se 1 satisfaz a propriedade $\mathscr{P}$ e se a validade de $\mathscr{P}$ para um número natural k qualquer implicar a validade de $\mathscr{P}$ para o sucessor de k, ou seja, para $k+1$, então <u>todo</u> número natural satisfaz a propriedade $\mathscr{P}$. Simbolicamente:

$$(\mathscr{P}(1))\&(\forall k \in \mathbb{N})(\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\mathscr{P}(n))$$

Costuma-se denominar o passo de assumir a veracidade de $\mathscr{P}(k)$ por **hipótese indutiva** ou **hipótese de indução**.

O **Princípio da Indução Finita** é muito utilizado para demonstrar resultados que dizem respeito a números naturais. Abaixo apresentamos um exemplo de demonstração feita por indução.

Exemplo 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:*

$$2^n \leq (n+1)!$$

Proof. Seja k um número natural qualquer e seja $\mathscr{P}$ a propriedade dada por:

$$\mathscr{P}(k) \equiv \text{“}k \text{ é tal que } 2^k \leq (k+1)!\text{”}$$

Pelo **Prinípio da Indução Finita**, a tese de que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $2^n \leq (n+1)!$ segue se mostrarmos que:

$$\mathscr{P}(1) \equiv \text{“}1 \text{ é tal que } 2^1 \leq 2!\text{”}$$

e que se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $\mathscr{P}(k)$, ou seja:

$$\textbf{Hipótese Indutiva:} \quad \mathscr{P}(k) \equiv \text{“}k \text{ é tal que } 2^k \leq (k+1)!\text{”}.$$

então vale $\mathscr{P}(k+1) \equiv$ “$k+1$ é tal que $2^{k+1} \leq ((k+1)+1)!$”.

Verificamos diretamente $\mathscr{P}(1)$, pois $2^1 = 2 \leq 2! = 2 \cdot 1 = 2$, de modo que vale $\mathscr{P}(1)$.

Supomos que valha $\mathscr{P}(k)$, ou seja, que $2^k \leq (k+1)!$ seja verdade (esta é a nossa **Hipótese de Indução**) e mostramos, usando esta presunção nos permite concluir que $2^{k+1} \leq ((k+1)+1)!$.

De fato, tem-se $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, de modo que pela **Hipótese de Indução** pode-se concluir que:

$$2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot (k+1)!$$

Como para qualquer número natural k vale $2 \leq k+2$, segue que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot (k+1)! \leq (k+2) \cdot (k+1)! = (k+2)! = ((k+1)+1)!$$

ou seja, vale:

$$\mathscr{P}(k+1) \equiv \text{“}k+1 \text{ é tal que } 2^{k+1} \leq ((k+1)+1)!\text{”}$$

Pelo **Princípio da Indução Finita** segue que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(2^n \leq (n+1)!).$$

□

Observação 2. *Em muitos casos queremos mostrar que uma determinada propriedade $\mathscr{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. O **Princípio da Indução Finita** é facilmente adaptado neste caso.*

Seja $\mathscr{P}(n)$ uma proposição tal que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$:

(i) $\mathscr{P}(n_0)$;

(ii) $(\forall n \geq n_0)(\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$

Então, para todo $n \geq n_0$, tem-se $\mathscr{P}(n)$. De fato, seja $m = n - n_0 + 1$, e definamos o predicado $\mathscr{Q}(m) = \mathscr{P}(m + n_0 - 1)$, de modo a formar o conjunto:

$$S = \{m \in \mathbb{N} \mid \mathscr{Q}(m)\} = \{m \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}(m + n_0 - 1)\}$$

Note que $\mathscr{Q}(1) \equiv \mathscr{P}(1 + n_0 - 1) = \mathscr{P}(n_0)$, ou seja, como vale $\mathscr{P}(n_0)$ e $\mathscr{P}(n_0) \equiv \mathscr{Q}(1)$, assegura-se a validade de $\mathscr{Q}(1)$. Note também que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathscr{Q}(n) \Rightarrow \mathscr{Q}(n+1)) \equiv (\forall n \geq n_0)(\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$$

*Conclui-se, pelo **Terceiro Axioma de Peano**, que para todo número natural n vale $\mathscr{Q}(n)$, ou, equivalentemente, que:*

$$(\forall n \geq n_0)(\mathscr{P}(n)).$$

Exemplo 3. *Mostremos que:*

$$(\forall n \geq 4)(2^n < n!)$$

Proof. Verificamos diretamente o resultado para $n = 4$, pois $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

Hipótese de Indução: $2^k < k!$.

Mostremos, agora, que $2^{k+1} < (k+1)!$. De fato,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k!,$$

e como para qualquer natural $k \geq 4$ vale $2 < k + 1$, temos:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Concluímos que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(4 \leq n \Rightarrow 2^n < n!).$$

□

O princípio a seguir nos permite derivar importantes resultados sobre os números naturais:

Princípio da Boa-Ordem: Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um menor elemento.

Proof. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $1 \notin A$, pois caso contrário 1 seria evidentemente o menor elemento de A. O menor elemento de A, cuja existência queremos provar, deverá, pelo axioma (DP3), ser da forma $s(n) = n + 1$. Devemos, pois, encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in A$ e, além disso, todos os elementos de A sejam maiores do que n, logo maiores do que $1, 2, \cdots, n$. Noutras palavras, procuramos um número natural n tal que $n \in \mathbb{N} \setminus A$ e $n + 1 \in A$. Com esse objetivo, consideramos o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \{1, 2, \cdots, n-1, n\} \subset \mathbb{N} \setminus A\}.$$

Portanto, X é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de A são maiores do que n. Como estamos supondo que $1 \notin A$, sabemos que $1 \in X$. Por outro lado, como $A \neq \varnothing$, nem todos os números naturais pertencem a X, ou seja, temos $X \neq \mathbb{N}$. Pelo axioma (DP4), vemos que deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$ (ou então teríamos, obrigatoriamente, $X = \mathbb{N}$). Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n, mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1 \in A$ e $n + 1$ é o menor elemento de A. □

2 Corpos - ou, Domínios de Racionalidade

Um corpo é uma estrutura matemática onde podemos realizar as quatro operações aritméticas: soma, subtração, multiplicação e divisão. Apresentamos abaixo a definição formal de corpo:

Definição 4 (corpo). *Um **corpo**, ou **domínio de racionalidade**, é uma 5-upla,* $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$, *onde* $\mathbb{F}$ *é um conjunto,*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{F} \times \mathbb{F} & \to & \mathbb{F} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{F} \times \mathbb{F} & \to & \mathbb{F} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

são funções e $0, 1 \in \mathbb{F}$ *são elementos tais que:*

(F1) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(\forall z \in \mathbb{F})(x + (y + z) = (x + y) + z)$ *(associatividade da soma);*

(F2) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(x + y = y + x)$ *(comutatividade da soma);*

(F3) $(\forall x \in \mathbb{F})(x + 0 = x)$ *(0 é elemento neutro da soma);*

(F4) $(\forall x \in \mathbb{F})(\exists y \in \mathbb{F})(x + y = 0)$*; costumamos denotar este* y *por* $-x$*, de chamá-lo de "elemento oposto de* x*";*

(F5) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(\forall z \in \mathbb{F})(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ *(associatividade da multiplicação);*

(F6) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(x \cdot y = y \cdot x)$ *(comutatividade da multiplicação);*

(F7) $(\forall x \in \mathbb{F})(1 \cdot x = x)$ *(1 é elemento neutro da multiplicação);*

(F8) $(\forall x \in \mathbb{F})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{F})(x \cdot y = 1))$*; costumamos denotar este* y *por* x^{-1}*, e denominá-lo por "inverso multiplicativo de* x*";*

(F9) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(\forall z \in \mathbb{F})(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$ *(distributividade da multiplicação sobre a soma).*

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, munido da soma e do produto de números racionais constitui um corpo, conforme pode-se verificar facilmente. Quando aprendemos a operar com frações, aprendemos a definir as operações de soma e produto no conjunto dos racionais.

Dados dois números racionais, m/n e p/q, sabemos dizer quando um deles é maior do que o outro:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \iff m \cdot q < p \cdot n.$$

Abaixo apresentamos a definição de corpo ordenado, que engloba o exemplo acima:

Definição 5 (ordem). *Seja X um conjunto não-vazio qualquer. Uma relação binária $\preceq \subseteq X \times X$ é denominada uma **relação de ordem** se, e somente se, satisfizer os seguintes axiomas:*

(O1) $(\forall x \in X)(x \preceq x)$ *(reflexividade);*

(O2) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)((x \preceq y)\&(y \preceq z) \Rightarrow (x \preceq z))$ *(transitividade);*

(O3) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)((x \preceq y)\&(y \preceq x) \Rightarrow x = y)$ *(simetria);*

Definição 6 (corpo ordenado). *Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ um corpo e $\leq$ uma relação de ordem em $\mathbb{F}$. Dizemos que $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ é um **corpo ordenado** se, e somente se, for compatível com as operações de soma e multiplicação:*

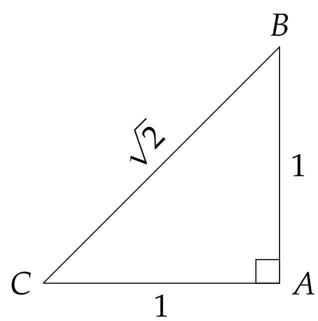
(C1) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})(\forall z \in \mathbb{F})(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;

(C2) $(\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in \mathbb{F})((0 \leq x)\&(0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y))$;

Apesar da relativa facilidade em se operar com o corpo dos números racionais, costumamos modelar o espaço tridimensional por $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e não por $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Uma vez que todas as medidas espaciais que podemos fazer são, por definição, números racionais (pois medir é comparar com uma unidade), por que usamos $\mathbb{R}$ ao invés de $\mathbb{Q}$?

A resposta a esta questão é: devido a um pressuposto sobre o espaço físico, sua continuidade. A continuidade à qual nos referimos aqui diz respeito ao fato de o espaço físico não admitir "lacunas" ou "buracos".

Considere um triângulo retângulo cujos catetos meçam 1 unidade cada. Pelo **Teorema de Pitágoras**, sua hipotenusa medirá $\sqrt{2}$ unidades. No entanto, $\sqrt{2}$ *não* é um número racional.



De fato, suponha por absurdo que existam dois números inteiros primos entre si, $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Então teríamos:

$$p^2 = 2 \cdot q^2,$$

de modo que p^2 seria um número par. De fato, raciocinando pela via contrapositiva, o quadrado de qualquer número ímpar é ímpar (se $n = 2 \cdot k + 1$ então $n^2 = (2k+1)^2 = 1 + 2 \cdot (2k^2 + 2k)$), de modo que se o quadrado de um número (p^2) é par, este número (p) deve, ele mesmo, ser par. Desta forma, $p = 2 \cdot m$ para algum m natural, de modo que:

$$p^2 = (2 \cdot m)^2 = 2 \cdot q^2$$

ou seja,

$$4m^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2m^2,$$

de onde segue que q^2 é par, e portanto q é par. Como ambos p e q são pares, estes números não podem ser primos entre si. Este absurdo provém de termos suposto que $\sqrt{2}$ é um número racional.

Se modelássemos o espaço por $\mathbb{Q}^3$ ao invés de $\mathbb{R}^3$, não teríamos como medir a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo de catetos iguais.

Este é um dos motivos que nos leva à introdução de uma extensão do corpo dos números racionais, que melhor se adéque à realidade física.

3 O Axioma do Supremo e suas Consequências

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades fundamentais dos números reais que serão utilizadas ao longo do curso.

Não apresentaremos aqui, no entanto, a construção dos números reais a partir dos números racionais. O leitor interessado em compreender essa construção poderá consultar [1].

Enunciaremos o **Axioma do Supremo**, que é uma propriedade que distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, efetivamente, e em seguida veremos algumas de suas consequências, como a **Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$** e a **Propriedade dos Intervalos Encaixantes**.

Definição 7 (conjunto limitado superiormente/ inferiormente). *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** se, e somente se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$(\forall x \in X)(x \leq M).$$

*Neste caso dizemos que M é uma **cota superior de** X.*
*Analogamente, dizemos que **é limitado inferiormente** se, e somente se existir $N \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$(\forall x \in X)(N \leq x).$$

*Neste caso dizemos que N é uma **cota inferior de** X. Se X for limitado superior e inferiormente, diremos simplesmente que X **é limitado**.*

Exemplo 8. *O conjunto sem elementos, $\varnothing$, é limitado, por vacuidade.*

Exemplo 9. *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, qualquer intervalo da forma $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$ é limitado superiormente, mas não inferiormente. Todo intervalo da forma $[b, \infty[$ ou $]b, \infty[$ é limitado inferiormente, mas não superiormente. Finalmente, se $a < b$, então os intervalos $[a, b],]a, b],]a, b[, [a, b[$ são todos limitados (superior e inferiormente).*

Exemplo 10. *O conjunto:*

$$X = \left\{ \frac{x^2}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

é limitado superiormente e inferiormente. De fato, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$x^2 \leq x^2 + 1$$

de modo que:

$$\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1,$$

e X é limitado superiormente.

Para ver que A é limitado inferiormente, basta observarmos que $0 \leq x^2 < x^2 + 1$, ou seja,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Assim,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1 \right)$$

donde segue que X é limitado.

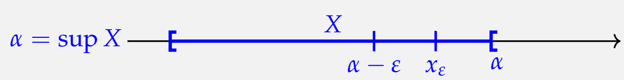
Exemplo 11. *Qualquer conjunto finito de números reais é limitado. De fato, considere* $F = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$*. Como* $\mathbb{R}$ *está totalmente ordenado, existe em* F *um elemento mínimo, que denotaremos por* $\min(F)$ *e um elemento máximo, que denotaremos por* $\max(F)$*. Tem-se, assim:*

$$(\forall x \in F)(\min F \leq x \leq \max F).$$

Definição 12 (supremo). *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto limitado superiormente. O* ***supremo de*** X*, que denotamos por* $\sup X$ *é a menor das cotas superiores de* X*. Assim,* $\alpha = \sup X$ *se, e somente se:*

(S1) $(\forall x \in X)(x \leq \alpha)$;

(S2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)(\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \alpha)$;



Exemplo 13. *O conjunto* $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1[$ *é não-vazio (por exemplo,* $0 \in X$*) e limitado superiormente (por exemplo, pelo número* 1*, uma vez que* $(\forall x \in [0, 1[)(x < 1 \leq 1)$*). Para determinarmos o supremo deste conjunto, devemos encontrar a menor de todas as cotas superiores. Vemos que todo número maior ou igual a* 1 *é cota superior de* $[0, 1[$*, o que nos sugere que a menor dessas cotas seja exatamente* 1*. Temos o seguinte "Ansatz":*

$$\sup[0, 1[= 1.$$

Vamos ver que este é mesmo o caso.

(S1) está satisfeita, pois conforme observamos acima, 1 *é cota superior;*

(S2) Vamos ter que demonstrar, agora, que se tirarmos qualquer quantia positiva $\varepsilon > 0$ *de* 1*, por menor que seja essa quantia,* $1 - \varepsilon$ *não é cota superior de* $X = [0, 1[$ *(ou seja, nenhum número menor que* 1 *é cota superior de* X*). De fato, dado qualquer* $\varepsilon > 0$*, há (pelo menos) um elemento* $x_\varepsilon \in [0, 1[$ *que "testemunha" que* $1 - \varepsilon$ *não é cota superior: basta tomarmos o ponto médio entre* $1 - \varepsilon$ *e* 1*, ou seja, basta tomarmos:*

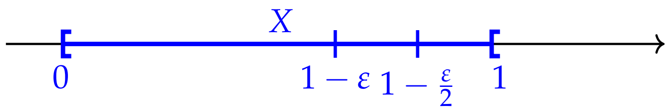
$$x_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos, assim,

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} = x_\varepsilon < 1.$$

Como este argumento pode ser replicado para qualquer $\varepsilon > 0$*, tem-se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in [0, 1[)(1 - \varepsilon < x_\varepsilon < 1), \text{ e vale (S2).}$$



Exemplo 14. *Um exemplo menos trivial é o seguinte: considere o conjunto:* $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 7\}$*. Vemos que* X *é não-vazio (por exemplo,* $0 \in X$*) e* X *é limitado superiormente, pois* $\sqrt[3]{7}$ *é uma cota superior para* X*. Temos o seguinte "Ansatz":*

$$\sup X = \sqrt[3]{2}.$$

Para demonstrar isto, basta observarmos que $\sqrt[3]{7}$ *é cota superior para* X *e que, para qualquer quantidade positiva* $\varepsilon > 0$*, não importa quão pequena seja, tem-se que* $\sqrt[3]{7} - \varepsilon$ *não é cota superior de* X*. Como fizemos no exemplo anterior, basta tomarmos:*

$$x_\varepsilon = \sqrt[3]{7} - \frac{\varepsilon}{2}$$

e teremos:

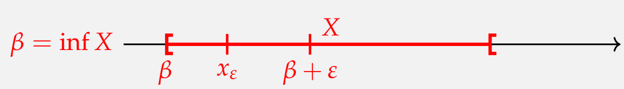
$$\sqrt[3]{7} < x_\varepsilon = \sqrt[3]{7} - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt[3]{7}$$

Definição 15 (máximo). *Se* $X \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado superiormente e* $\alpha = \sup X \in X$*, dizemos que* α *é o* ***máximo de*** X*, e escrevemos* $\alpha = \max X$.

Definição 16 (ínfimo). *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto limitado inferiormente. O* ***ínfimo de*** X*, que denotamos por* $\inf X$ *é a maior das cotas inferiores de* X*. Assim,* $\beta = \inf X$ *se, e somente se:*

(I1) $(\forall x \in X)(\beta \leq x)$;

(I2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)(\beta < x_\varepsilon \leq \beta + \varepsilon)$;



Definição 17 (mínimo). *Se* $X \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio e limitado inferiormente e* $\beta = \inf X \in X$*, dizemos que* β *é o* ***mínimo de*** X*, e escrevemos* $\beta = \min X$.

O seguinte axioma é o que caracteriza a noção de continuidade (ausência de lacunas) dos números reais:

Axiom 18 (Axioma do Supremo). *Se* $X \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto não vazio limitado superiormente, então* X *admite supremo em* $\mathbb{R}$.

Segue diretamente do axioma acima o seguinte:

Teorema 19. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado inferiormente, então X admite ínfimo em $\mathbb{R}$.*

Proof. Considere o conjunto:

$$-X = \{-x \mid x \in X\}.$$

Uma vez que X é limitado inferiormente, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(\forall x \in X)(N \leq x)$$

e portanto:

$$(\forall x \in X)(-x \leq -N),$$

de modo que $-X$ é limitado superiormente. Como $X \neq \varnothing$, segue que $-X \neq \varnothing$, e pelo **Axioma do Supremo** existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(-X)$.

Afirmamos que $\inf X = -\alpha$.

De fato, como α é cota superior para $-X$ tem-se, para todo $x \in X$:

$$-x \leq \alpha$$

donde:

$$-\alpha \leq x,$$

e portanto $-\alpha$ é cota inferior para X (i.e., vale (I1)).

Para qualquer $\varepsilon > 0$, como $\alpha = \sup(-X)$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < -x_\varepsilon \leq \alpha$, ou, equivalentemente:

$$-\alpha \leq x_\varepsilon < -\alpha + \varepsilon$$

e vale (I2). Logo $-\alpha = \inf X$. □

Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$: Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot x > y$$

Proof. Suponhamos, por absurdo, que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $nx \leq y$; consideremos então o conjunto:

$$A = \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

A certamente não é vazio, uma vez que $1 \in A$ (pois $1 \cdot x = x \in A$), e é limitado superiormente por y. Pelo **Axioma do Supremo**, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup A$. Como $x > 0$,

$\alpha - x < \alpha$; assim, $\alpha - x$ não é cota superior de A (por ser menor que o supremo). Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha - x < m \cdot x$$

e daí segue que:

$$\alpha < (m+1) \cdot x,$$

o que é um absurdo, pois α é o supremo de A e $(m+1) \cdot x \in A$. Deste modo, supor que $(\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot x \leq y)$ nos leva a um absurdo. Logo deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \cdot x > y$. □

Da propriedade arquimediana deduz-se o seguinte:

Teorema 20. *Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Proof. Consideremos, na **Propriedade Arquimediana**, x como sendo ε e y como sendo 1. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot \varepsilon > 1,$$

ou seja,

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0}.$$

□

A seguir veremos algumas consequências da **Propriedade Arquimediana**:

Teorema 21. $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente.*

Proof. Suponha que exista $b \in \mathbb{R}$ que seja cota superior de $\mathbb{N}$, Como $b > 0$, $\frac{1}{b} > 0$. Pelo **Teorema 20**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{b}$$

ou equivalentemente,

$$b < n_0,$$

ou seja, b <u>não</u> é uma cota superior para $\mathbb{N}$. □

Teorema 22. *Entre quaisquer dois números reais, existe um número racional.*

Proof. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Vamos mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Como $a < b$, tem-se $b - a > 0$, de modo que pelo **Teorema 20** existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < \frac{1}{n_0} < b - a.$$

Seja $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p > n_0 \cdot a\}$ e note que $A \neq \varnothing$. Com efeito, se $A = \varnothing$, então $n_0 \cdot a$ seria uma cota superior para $\mathbb{N}$, o que implicaria que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, contrariando o **Teorema 21**. Consequentemente, tem-se $A \subset \mathbb{N}$ com $A \neq \varnothing$. Pelo **Princípio da Boa Ordenação**, segue que A tem um menor elemento. Seja $m_0 = \min A$.

Como $m_0 \in A$, segue que:

$$r = \frac{m_0}{n_0} > a,$$

e $m_0 \leq p$ para todo $p \in A$. Ainda, tem-se que $m_0 - 1 \notin A$, ou seja,

$$m_0 - 1 \leq n_0 \cdot a.$$

Desta forma, segue que:

$$r = \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0 - 1 + 1}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + (b - a) = b,$$

de onde segue a tese. □

Teorema 23. *Entre quaisquer dois números reais existe um número irracional.*

Proof. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

a é racional ou irracional; suponhamos inicialmente que a é irracional. Temos:

$$a < b \iff b - a > 0.$$

Pelo **Teorema 20**, existe um número natural n tal que:

$$\frac{1}{n} < b - a, \text{ e portanto } a + \frac{1}{n} < b.$$

Como $\frac{1}{n} > 0, a < a + \frac{1}{n}$. Tomando-se $t = a + \frac{1}{n}$ tem-se $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (pois é soma de um número racional com um número irracional) e $a < t < b$.

Se a for um número racional, como $b - a > 0$, segue pela **Propriedade Arquimediana** (com $x = b - a$ e $y = \sqrt{2}$) que existe um número natural n tal que $n \cdot (b - a) > \sqrt{2}$. Neste caso, basta tomarmos $t = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$, que é um número irracional tal que $a < t < b$.

□

Lema 24. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que para qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se:*

$$\alpha - \varepsilon < \beta < \alpha + \varepsilon$$

então $\alpha = \beta$.

Proof. Suponha que para todo $\varepsilon > 0$ tenhamos

$$\alpha - \varepsilon < \beta < \alpha + \varepsilon$$

mas que (por absurdo) $\alpha \neq \beta$. Sem perda de generalidade, suponhamos $\alpha < \beta$. Em particular, tomando $\varepsilon = \beta - \alpha$, concluímos que:

$$\alpha - (\beta - \alpha) < \beta < \alpha + (\beta - \alpha)$$
$$2\alpha - \beta < \beta < \beta,$$

logo $\beta < \beta$, o que é um absurdo. □

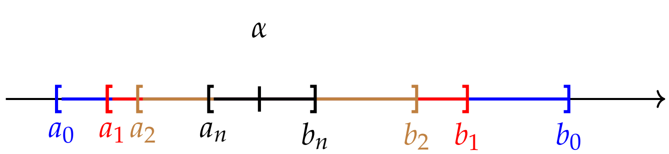
Teorema dos Intervalos Encaixados: Seja $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$ uma sequência de intervalos satisfazendo as condições:

(i) $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n < \varepsilon$, ou seja, à medida que n cresce, o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ vai se aproximando de zero.

Nestas condições existe um único número real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único número real α tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \alpha \leq b_n).$$



Proof. **Existência:** O conjunto $A = \{a_0, \cdots, a_n, \cdots\}$ certamente é não vazio e limitado superiormente (por qualquer um dos b_is, $i \in \mathbb{N}$). Pelo **Axioma do Supremo**, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$\alpha = \sup A$. Ademais, como α é, por definição, a menor das cotas superiores de A e para todo $n \in \mathbb{N}$, b_n é cota superior de A, segue que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \alpha \leq b_n).$$

Unicidade: Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ seja tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \beta \leq b_n).$$

Como $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \alpha)$, segue que $(\forall n \in \mathbb{N})(-\alpha \leq -a_n)$. Assim,como para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\beta \leq b_n$, segue que :

$$\beta - \alpha \leq b_n - \alpha \leq b_n - a_n.$$

Como $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha \leq b_n)$, segue que $(\forall n \in \mathbb{N})(-b_n \leq -\alpha)$. Também, como $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \beta)$, segue que:

$$a_n - b_n \leq \beta - b_n \leq \beta - \alpha$$

Logo,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n - b_n \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n)$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(-(b_n - a_n) \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n)$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(|\beta - \alpha| < b_n - a_n)$$

Por (ii) segue que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha - \beta| < b_n - a_n < \varepsilon$.
Desta forma, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se:

$$\alpha - \varepsilon < \beta < \alpha + \varepsilon$$

de onde se conclui, pelo **Lema 24**, que $\alpha = \beta$. □

Note que o fato de considerarmos X como subconjunto de $\mathbb{R}$ é essencial para garantir a existência do supremo (que é um elemento do conjunto do qual X é subconjunto). A propriedade dada pelo **Axioma do Supremo** não é válida, em geral, se não estivermos trabalhando em $\mathbb{R}$. Consideremos o seguinte exemplo que nos ilustra que em $\mathbb{Q}$, nem todo conjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo em $\mathbb{Q}$.

Exemplo 25. *Considere:*

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Note que X é limitado superiormente, pois o número 2 é uma cota superior para X. Com efeito, se $x^2 < 2$ então, em particular, $x < 2$.

Observe, também, que $X \neq \varnothing$, pois $1 \in X$.

Vamos demonstrar que embora este conjunto seja não vazio e limitado em $\mathbb{Q}$, X não admite supremo em $\mathbb{Q}$.

Faremos isto decompondo $\mathbb{Q}$ como reunião de dois subconjuntos, a saber, X e $\mathbb{Q} \setminus X$.

***Afirmação (1):** Nenhum elemento de X é supremo de X;*

Com efeito, para todo $d \in X$, mostraremos que existe $h > 0$ tal que $d + h \in X$ - de modo que nenhum elemento de X é cota superior de X e, muito menos o supremo de X.

Dado qualquer número racional $d \in X$, ou seja, tal que $d^2 < 2$, é sempre possível obter um número racional $d + h$, com h número racional positivo, tal que $(d + h)^2 < 2$. Esta desigualdade se verifica se, e somente se:

$$d^2 + 2dh + h^2 < 2,$$

ou seja, se, e somente se:

$$2dh + h^2 < 2 - d^2.$$

Note que como $d \in X$, $2 - d^2 > 0$. Assim, a desigualdade anterior fica:

$$h \cdot (2d + h) < 2 - d^2,$$

ou seja:

$$h < \frac{2 - d^2}{2d + h}.$$

Como $h < 1$, segue que $2d + h < 2d + 1$ e que:

$$\frac{2 - d^2}{2d + 1} < \frac{2 - d^2}{2d + h},$$

de modo que se exigirmos que:

$$0 < h < \frac{2 - d^2}{2d + 1}$$

teremos, consequentemente, $h < (2 - d^2)/(2d + h)$ e, portanto $(d + h)^2 < 2$.

***Afirmação (2):** Nenhum elemento de $\mathbb{Q} \setminus X$ é a <u>menor</u> das cotas superiores de X;*

Seja $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus X$, de modo que α é uma cota superior para X. Mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon$ ainda é cota superior para X.

Um tal $\varepsilon > 0$ deverá ser tal que $2 < (\alpha - \varepsilon)^2$, ou seja, tal que:

$$2 < \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2,$$

e como $\alpha^2 > 2$, segue que:

$$2\alpha\varepsilon - \varepsilon^2 < \alpha^2 - 2$$

$$(2\alpha - \varepsilon) \cdot \varepsilon < \alpha^2 - 2$$

e portanto bastaria tomarmos ε satisfazendo:

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha - \varepsilon}.$$

Como $\varepsilon > 0$, tem-se $2\alpha - \varepsilon < 2\alpha$ e, assim:

$$\frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{2\alpha - \varepsilon}$$

$$\frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha - \varepsilon}$$

Basta, portanto, tomarmos $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$, e teremos que $(\alpha - \varepsilon)$ ainda é cota superior de X - de modo que α <u>não é</u> a <u>menor</u> das cotas superiores de X e, muito menos o supremo de X.

*Das afirmações **(1)** e **(2)** segue que nenhum elemento de $X \cup (\mathbb{Q} \setminus X) = \mathbb{Q}$ pode ser supremo de X. Logo, embora $X \subseteq \mathbb{Q}$ seja não vazio e limitado superiormente, X **não admite supremo em** $\mathbb{Q}$.*

De fato, o **Axioma do Supremo** é uma das propriedades que diferenciam $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ (o Teorema dos Intervalos Encaixados também distingue R de $\mathbb{Q}$). De fato:

Table 1: Comparação entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Propriedade	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$
Fechado por somas	✓	✓
Fechado por produtos	✓	✓
Todo elemento não-nulo tem inverso	✓	✓
Satisfaz a Propriedade Arquimediana	✓	✓
Satisfaz o Axioma do Supremo	✓	×

4 Um (contra)Exemplo Importante para o Estudo de Limites

Vamos considerar a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

Primeiramente analisamos o comportamento de f para $x \geq 2/\pi$:

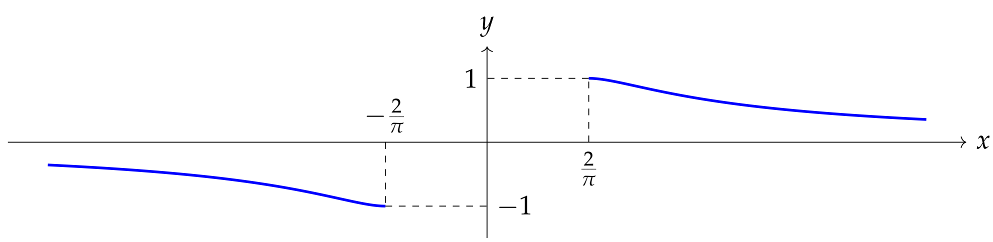
$$x \geq \frac{2}{\pi} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim, para $x \geq 2/\pi$ tem-se $\sin(x) > 0$. Conforme x aumenta, $1/x$ vai se aproximando de zero. Nossa intuição nos permite afirmar que, quanto mais próximo um número positivo estiver de zero, mais próximo o seno deste número estará de zero.

Para $x \leq -2/\pi$, temos $\sin(x) < 0$. Conforme x vai ficando mais e mais negativo, $\sin(x)$ [que é um número negativo] se aproxima mais e mais de 0. O gráfico de $\sin(1/x)$ para $x \leq -2/\pi$ pode ser obtido facilmente, observando-se que f é uma função ímpar.

Observe que para $x = 2/\pi$, tem-se:

$$y = \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$



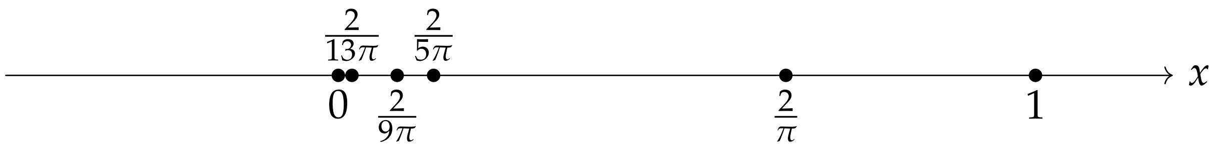
Vejamos o comportamento de f para $0 < x < \frac{2}{\pi}$ procurando pontos x *do domínio de* f onde $f(x)$ assume certos valores notáveis: $-1, 0$ e 1.

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff \frac{1}{x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{2}{4k\pi + \pi}, \text{para todo } k \text{ inteiro.}$$

Atribuindo os valores $0, 1, 2$ e 3 para k, respectivamente, obtemos a tabela:

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$\to$	0
y	1	1	1	1	$\cdots$	

ou seja, os pontos da reta $x = \dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{5\pi}, \dfrac{2}{9\pi}$ e $\dfrac{2}{13\pi}$ são tais que sua imagem por f é 1. Estes pontos estão distribuídos na reta real como segue:

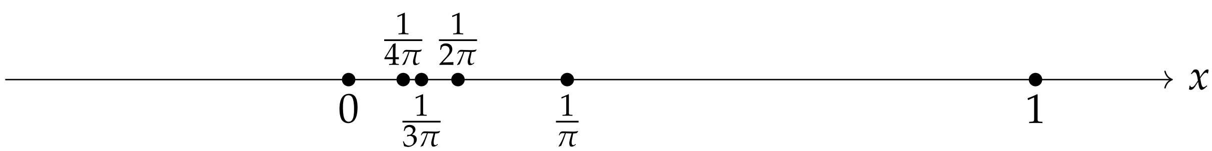


Temos, por outro lado,

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \iff x = \frac{1}{k\pi}$$

x	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\to$	0
y	0	0	0	0	$\cdots$	

Estes pontos estão distribuídos na reta real como segue:



Finalmente,

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \iff \frac{1}{x} = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi \iff x = \frac{2}{4k\pi + 3\pi}$$

x	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$\frac{2}{15\pi}$	$\to$	0
y	-1	-1	-1	-1	$\cdots$	

Estes pontos estão distribuídos na reta real como segue:

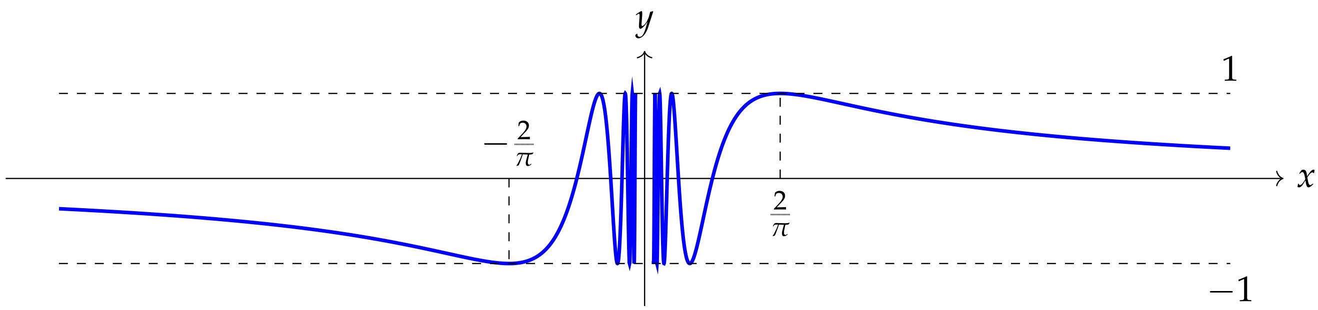
Observe também que, conforme x percorre o intervalo $]0, 2/\pi]$, tem-se:

$$-1 \leq f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Note também que, como a função seno é limitada, o mesmo ocorre com f, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem-se:

$$|f(x)| = \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$$

O gráfico de f terá, assim, o seguinte aspecto:



Pergunta: você pode dar algum palpite sobre o que acontece com $f(x)$ conforme nos aproximamos mais e mais de zero?

References

[1] Aguilar, I., Dias, M. S., A construção dos números reais e suas extensões. Disponível em https://www.sbm.org.br/coloquio-centro-oeste-4/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/Mini

[2] Figueiredo, D. G., **Análise I**, 2^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1996.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Lima, E. L., **O Princípio da Indução**, disponível em http://www.mat.uc.pt/~mat0829/A.Peano.htm, acessado em 27 de agosto de 2020.

[5] Maurer, W. A., **Curso de Cálculo Diferencial e Integral: Fundamentos Aritméticos e Topológicos**, Editora Edgard Blücher LTDA, 1977.

[6] Neves, W., **Uma Introdução à Análise Real**, Editora UFRJ, 2014.