LISTA 05 DE CÁLCULO NO $\mathbb{R}^n$

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Desenhar as regiões de integração para as seguintes integrais iteradas:

(a) $\int_{-1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$

(b) $\int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\right)dy$

(2) Calcular as seguintes integrais duplas:

(a) $\iint_R (2y^2 - 3xy^3)dxdy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x \leq 2)\&(0 \leq y \leq 3)\}$;

Resposta: $-\dfrac{585}{8}$

(b) $\iint_R x \cdot \sin(y)dxdy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x \leq 4)\&(0 \leq y \leq \pi/6)\}$;

Resposta: $\frac{15}{4} \cdot (2 - \sqrt{3})$

(c) $\iint_R \dfrac{1}{x+y}dxdy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$.

Resposta: $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$

(3) Calcular as seguintes integrais duplas:

(a) $\iint_D xydxdy$, onde $D = \{(0 \leq x \leq 1)\&(x^2 \leq y \leq \sqrt{x})\}$.

Resposta: $\frac{1}{12}$

(b) $\iint_D (x^2 - 2xy)dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 1)\&(\sqrt{x} \leq y \leq 2-x)\}$

Resposta: $-\frac{19}{42}$

*jeancb@ime.usp.br

(c) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq y \leq 2) \& (y \leq x \leq y^3)\}$.

Resposta: $\frac{1}{2}e^4 - 2e$

(d) $\displaystyle\iint_D x \cdot \cos(y) dxdy$, onde D é a região delimitada por $y = 0, y = x^2$ e $x = 1$.

Resposta: $\frac{1-\cos(1)}{2}$

(4) Determinar o volume do sólido S limitado pela superfície $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ e $z = 0$, seguindo o roteiro abaixo:

(a) Desenhe a superfície $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$ no espaço. Você pode fazer isto estudando as interseções dela com os planos coordenados Oxy (fazendo $z = 0$ na equação $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$), Oxz (fazendo $y = 0$ na equação $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$) e Oyz (fazendo $x = 0$ na equação $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$). Em seguida, estude a interseção da superfície com planos horizontais, ou seja, com planos de equação $z = k$ (fazendo $z = k$ na equação $z = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$). Faça primeiramente os desenhos separadamente nos planos e depois procure, se possível, colocar tudo em um desenho só, representado o sólido no $\mathbb{R}^3$.

(b) Descreva analiticamente a região S, ou seja, como um conjunto da forma:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \leq x \leq b) \& (g(x) \leq y \leq h(x)) \& (\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y))\}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $g, h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adequados.

Resposta: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0 \leq x \leq 1) \& (0 \leq y \leq 1) \& (0 \leq x \leq x \cdot \sqrt{x^2 + y})\}$

(c) Calcular $\displaystyle\iiint_S 1 dxdydz$.

Resposta: 36 unidades de volume

(5) Calcular o determinante jacobiano das seguintes transformações:

(a)

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y) \end{array}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes.

Resposta: $|\det J\varphi(x,y)| = a \cdot d - b \cdot c$

(b)

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\rho, \phi, z) & \mapsto & (\rho \cdot \cos(\phi), \rho \cdot \sin(\phi), z) \end{array}$$

Resposta: $|\det J\psi(\rho,\phi,z)| = |\rho|$

(c)

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (a\cdot\rho\cdot\cos(\theta), b\cdot\rho\cdot\sin(\theta)) \end{array}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

Resposta: $|\det J\varphi(\rho,\theta)| = a\cdot b\cdot\rho$

(d)

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x\cdot y, y) \end{array}$$

Resposta: $|\det J\varphi(x,y)| = y$

(6) Calcular as seguintes integrais usando o **Teorema da Mudança de Variável** para uma mudança de variável adequada.

(a) $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi\cdot(y-x)}{4\cdot(y+x)}\right) dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $x+y=1$ e $x+y=2$.

Resposta: $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$

(b) Sejam Q o quadrado de vértices $(-1,0), (0,-1), (1,0)$ e $(0,1)$ e $f(x,y) = (x+y)^4\cdot(x-y)^2$. Calcular $\displaystyle\iint_Q f(x,y)dxdy$.

Resposta: $\frac{2}{15}$

(c) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+4y^2)}dxdy$, onde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 4\}$.

Resposta: $2\pi\cdot\left(\frac{1}{e}-1\right)$