

LISTA DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

Observação: Nesta lista assume-se, além dos conhecimentos obtidos nas aulas da semana 01, apenas o conhecimento obtido no ensino básico das funções seno, cosseno, logaritmo, polinomial e exponencial. Assume-se, também, que o aluno saiba resolver inequações.

1 Sobre Métricas

1.1. Considere o conjunto $X = \{x, y, z, w\}$, e defina:

$d :$	$X \times X$	$\rightarrow$	$\mathbb{R}_+$
	(x, y)	$\mapsto$	2
	(x, z)	$\mapsto$	2
	(y, y)	$\mapsto$	2
	(x, w)	$\mapsto$	1
	(y, w)	$\mapsto$	1
	(z, w)	$\mapsto$	1
	(x, x)	$\mapsto$	0
	(y, x)	$\mapsto$	0
	(y, y)	$\mapsto$	0
	(z, x)	$\mapsto$	0
	(z, y)	$\mapsto$	0
	(z, z)	$\mapsto$	0
	(w, x)	$\mapsto$	0
	(w, y)	$\mapsto$	0
	(w, z)	$\mapsto$	0
	(w, w)	$\mapsto$	0

Verificar que d é uma métrica sobre X .

*jeancb@ime.usp.br

1.2 Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que as seguintes funções são métricas:

(i)

$$\begin{aligned} \alpha : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \min\{1, d(x, y)\} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \beta : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{d(x, y)} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \gamma : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

1.3 Seja $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções limitadas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Verifique se a função:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) &\mapsto \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \end{aligned}$$

é uma métrica. Justifique sua resposta.

1.4 Mostrar que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente então:

$$\begin{aligned} d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

1.5 Seja $\mathcal{G} = (G, +_G, -_G, e_G)$ um grupo abeliano, ou seja, valem:

$$(Ab1) \quad (\forall g_1 \in G)(\forall g_2 \in G)(\forall g_3 \in G)(g_1 +_G (g_2 +_G g_3) = (g_1 +_G g_2) +_G g_3);$$

$$(Ab2) \quad (\forall g \in G)(g +_G e_G = g = e_G +_G g);$$

$$(Ab3) \quad (\forall g \in G)(g +_G (-_G g) = e_G = (-_G g) +_G g);$$

$$(Ab4) \quad (\forall g_1 \in G)(\forall g_2 \in G)(g_1 +_G g_2 = g_2 +_G g_1)$$

e suponha que exista uma função:

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(a) \quad (\forall x \in G)((x \neq e_G) \Rightarrow f(x) > 0)$$

$$(b) \quad (\forall x \in G)(f(-_G x) = f(x));$$

$$(c) \quad (\forall x \in G)(\forall y \in G)(f(x +_G y) \leq f(x) + f(y)).$$

Mostrar que:

$$\begin{aligned} d : G \times G &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto f(x -_G y) \end{aligned}$$

é uma métrica em G .

1.6 Seja $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto tal que $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. Verifique que a função:

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (a_i, a_j) &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ \frac{1}{i} + \frac{1}{j}, & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

é uma métrica sobre M .

1.7 Construir um modelo no plano do espaço métrico $\mathcal{T} = (\{a, b, c\}, d)$, onde d é a métrica zero-um.

1.8 Numa folha de papel marque seis pontos quaisquer, de preferência não todos alinhados. Construa triângulos com esses pontos. Dê valores às distâncias entre os pontos mantendo a propriedade da desigualdade triangular: todo lado é menor que a soma dos outros dois. A figura que você obteve é um espaço métrico?

2 Sobre distâncias entre pontos e conjuntos, entre conjuntos e diâmetro de conjuntos

2.1 Seja $\mathcal{R}_E = (\mathbb{R}, d_E)$, onde $d_E(x, y) = |x - y|$. Mostre que para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$0 \leq d_E(a, \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2}.$$

2.2 Seja $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$ um espaço métrico. Determinar o diâmetro de $\mathbb{R}$ quando:

(i)

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \min\{1, |x - y|\} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{|x - y|} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \end{aligned}$$

- 2.3 Mostrar que o diâmetro de um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, onde estamos considerando o espaço métrico $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, d)$, com $d(x, y) = |x - y|$, é igual a $|b - a|$.
- 2.4 Exibir um exemplo de espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e de subespaços $A, B \subseteq M$ tais que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B \neq \emptyset$, mas $d(A, B) = 0$.
- 2.5 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$ subconjuntos limitados. Demonstrar que $A \cup B$ é limitado e que:

$$\text{diam}(A \cup B) \leq d(A, B) + \text{diam}(A) + \text{diam}(B).$$

- 2.6 Sejam $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$, $X =]2, 7[$ e $Y = [0, 1]$. Calcular:

- (a) A distância de $0 \in \mathbb{R}$ a X ;
- (b) A distância de $3 \in \mathbb{R}$ a X ;
- (c) A distância entre X e Y ;
- (d) A distância de 7 a Y .

- 2.7 Considere o espaço métrico $\mathcal{R}_S = (\mathbb{R}^2, d_S)$, onde $d_S((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

- (i) Esboçar o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_S((0, 0), (x, y)) < 2\}$;
- (ii) Calcular $d_S((1, 1), X)$, $d_S((2, 2), X)$, $d_S((0, 3), X)$ e $d_S((2, 0), (5, 3))$.

- 2.8 Considere o conjunto $X = \{x, y, z, w\}$ munido da métrica definida no exercício 1.1. Se $A = \{x, y\}$ e $B = \{z, w\}$, calcular:

- (a) $d(w, A)$;
- (b) $d(y, B)$;
- (c) $d(y, A)$;
- (d) $d(A, B)$;
- (e) $\text{diam}(A)$;
- (f) $\text{diam}(B)$.

- 2.9 Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico. Mostrar que $\text{diam}(A) = 0$ se, e somente se, A é um conjunto unitário.

- 2.10 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e

$$\Phi(M) = \{X \subseteq M \mid (X \neq \emptyset) \& (X \text{ é limitado}) \& (d(a, X) = 0 \iff a \in X)\}.$$

Considere a função:

$$\begin{aligned} \rho : \Phi(M) \times \Phi(M) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (X, Y) &\mapsto \max\{\sup\{d(x, Y) \mid x \in X\}, \sup\{d(y, X) \mid y \in Y\}\} \end{aligned}$$

Verificar que ρ define uma métrica em $\Phi(M)$. O número $\rho(X, Y)$ é conhecido como a **distância de Hausdorff** entre os conjuntos X e Y .

3 Sobre Bolas Abertas e outros Conceitos Métricos

3.1 Seja $\mathcal{R}_E = (\mathbb{R}, d_E)$, onde $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(i) Esboçar os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$;

(ii) Calcular $d_E(A, B)$;

3.2 Seja $\mathcal{R}_E = (\mathbb{R}, d_E)$, onde $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(i) Esboçar os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + y^2 = 9\}$;

(ii) Calcular $d_E(A, B)$;

3.3 Seja $\mathcal{R}_E = (\mathbb{R}, d_E)$, onde $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Calcular a distância entre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1\}$.

4 Produto de Espaços Métricos

4.1 Sejam $\mathcal{M}_1 = (M_1, d_1), \dots, \mathcal{M}_n = (M_n, d_n)$ espaços métricos, e sejam $d_E, d_S, d_M : (\prod_{i=1}^n M_i) \times (\prod_{i=1}^n M_i) \rightarrow \mathbb{R}_+$ as métricas canônicas das quais podemos munir o produto $\prod_{i=1}^n M_i$. Mostre que para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in (\prod_{i=1}^n M_i)$ tem-se:

$$d_M(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_E(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_S(\vec{x}, \vec{y}) \leq n \cdot d_M(\vec{x}, \vec{y})$$

5 Métricas Equivalentes

5.1 Em $\mathbb{R}^n$ considere as métricas d_E (métrica euclidiana), d_S (métrica do taxista) e d_M (métrica do máximo). Mostrar que $d_E \sim d_S \sim d_M$.

6 Vizinhanças, Conjuntos Abertos e Fechados

- 6.1 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $V \subseteq M$ e $x \in M$. Argumentar que V é uma vizinhança de x se, e somente se, V é uma vizinhança de $\{x\}$.
- 6.2 Mostrar que, em qualquer espaço métrico, o complemento de uma bola fechada é um conjunto aberto.
- 6.3 Exibir uma família de subconjuntos abertos de um espaço métrico cuja interseção não seja aberta.
- 6.4 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$. Mostrar que $\text{int.}(A \cap B) = \text{int.}(A) \cap \text{int.}(B)$.
- 6.5 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$. Mostrar que $\text{int.}(A \cup B) = \text{int.}(A) \cup \text{int.}(B)$. Exibir um exemplo em que $\text{int.}(A \cup B) \subsetneq \text{int.}(A) \cup \text{int.}(B)$.
- 6.6 Mostrar que um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ em que d é a métrica zero-um é discreto.
- 6.7 Mostrar que no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$, o subespaço $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$, onde $d_{\mathbb{Z}}$ é a métrica induzida por d em $\mathbb{Z}$, é discreto.
- 6.8 Mostrar que no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$, o subespaço $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$, onde $d_{\mathbb{Q}}$ é a métrica induzida por d em $\mathbb{Q}$, *nenhum* ponto é isolado.
- 6.9 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $x_0 \in M$, então $\text{int.}(V)$ também é uma vizinhança de x_0 .
- 6.10 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $C \subset M$ e de $D \subset M$, então V também é uma vizinhança de $C \cup D$.
- 6.11 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ e $W \subset M$ são vizinhanças de $C \subset M$, então $V \cap W$ também é uma vizinhança de C .
- 6.12 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $C \subset M$ se, e somente se, V é vizinhança de todos os pontos de C .
- 6.13 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, x_0 é um ponto de acumulação de $X \subseteq M$ se, e somente se, $d(x_0, X \setminus \{x_0\}) = 0$;
- 6.14 No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d_E)$, onde $d_E(x, y) = |x - y|$, determinar o derivado dos seguintes conjuntos:
- (a) $]a, b[$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$;
 - (b) $[a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$;
 - (c) $\emptyset$;

- (d) $\mathbb{Q}$;
- (e) $\mathbb{Z}$;
- (f) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- 6.15** Exibir um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e uma família infinita de abertos deste espaço cuja interseção não seja um conjunto aberto.
- 6.16** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, o complementar de um disco é um conjunto aberto.
- 6.17** Mostrar que, em $(\mathbb{R}^2, d_E)$, dados dois discos concêntricos de raios distintos, o maior é uma vizinhança do menor.
- 6.18** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é uma vizinhança de $C \subset M$, então $\text{int.}(V)$ também é uma vizinhança de C .
- 6.19** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se V é uma vizinhança de $C \subset M$ e de $D \subset M$, então V é uma vizinhança de $C \cup D$.
- 6.20** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se V e W forem vizinhanças de C , então $V \cap W$ é uma vizinhança de $C \subset M$.
- 6.21** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, V é uma vizinhança de C se, e somente se, V é uma vizinhança de cada um dos pontos de C .
- 6.22** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, dados quaisquer $A, B \subseteq M$, tem-se $\text{int.}(A \cap B) = \text{int.}(A) \cap \text{int.}(B)$.
- 6.23** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, dados quaisquer $A, B \subset M$, tem-se $\text{int.}(A) \cup \text{int.}(B) \subset \text{int.}(A \cup B)$. Dar exemplos em que os dois membros são distintos.
- 6.24** Mostrar que, para qualquer conjunto M , o espaço métrico (M, d) , onde d é a métrica zero-um, é um espaço discreto.
- 6.25** Mostrar que $(\mathbb{Z}, d)$, enquanto subespaço métrico de $(\mathbb{R}, d)$, é discreto.
- 6.26** Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, dado $X \subset M$, tem-se que $x_0 \in X' \iff d(x_0, X \setminus \{x_0\}) = 0$;
- 6.27** Mostrar que, no espaço métrico $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$, dados quaisquer $x_0 \in M$ e $\delta > 0$, $B(x_0, \delta)' = B[x_0, \delta]$
- 6.28** Exibir um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e conjuntos $A, B \subset M$ tais que $A \neq B$ mas $A' = B'$.

- 6.29** Mostrar que, no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, o conjunto $\mathbb{Q}$ não admite pontos isolados.
- 6.30** Mostrar que qualquer subconjunto de um espaço métrico discreto é, simultaneamente, aberto e fechado.
- 6.31** Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$ subconjuntos abertos e densos em $\mathcal{M}$. Mostrar que $A \cap B$ é um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{M}$.
- 6.32** Mostrar que o único subconjunto denso em um espaço métrico discreto é o próprio espaço.
- 6.33** Determinar, no espaço $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$, a fronteira do conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- 6.34** Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que, dado qualquer $A \subset M$, tem-se $\text{Cl.}(A) = \text{int.}(A) \cup \partial A$.
- 6.35** Mostrar que o interior da fronteira de um conjunto aberto é vazia.
- 6.36** Mostrar que são fechados:
- (a) $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$;
 - (b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$ em $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$;
 - (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0) \& (y \geq 0)\}$ em $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$. Generalizar este resultado.
- 6.37** Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|_{PN})$ um espaço vetorial pseudo-normado, ou seja, tal que $\|\cdot\|_{PS} : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma pseudo-norma, e considere o espaço pseudo-métrico $(V, d_{\|\cdot\|_{PN}})$, onde $d_{\|\cdot\|_{PN}}(x, y) = \|x - y\|_{PN}$. Mostrar que:
- (a) $E = \{x \in V \mid d_{\|\cdot\|_{PN}}(x, 0) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
 - (b) Mostrar que $\text{Cl.}(\{0\}) = E$.

7 Sequências em Espaços Métricos

- 7.1** Mostrar que uma progressão aritmética, $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ converge se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \dots$.
- 7.2** Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Mostrar que se $(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{2k-1}, \dots)$ e $(x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2k}, \dots)$ ambas convergem para $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $x_n \rightarrow \bar{x}$.
- 7.3** Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de M que converge para $\bar{x} \in M$, então a sequência de números reais $(d(x_n, \bar{x}))_{n \in \mathbb{N}} = (d(x_1, \bar{x}), d(x_2, \bar{x}), \dots, d(x_n, \bar{x}), \dots)$ converge para 0.

7.4 Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são duas seqüências de elementos de M tais que $x_n \rightarrow \bar{x} \in M$ e $y_n \rightarrow \bar{y} \in M$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(\bar{x}, \bar{y}).$$

7.5 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $x_0 \in M$. Definindo $x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$, mostre que se $f : (M, d) \rightarrow (M, d)$ é uma isometria e se $f(x_0) \neq x_0$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.

7.6 Mostrar que se (M, d) é um espaço pseudo-métrico [ou seja, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma pseudo-métrica], então toda seqüência de elementos de M tem um único limite.

7.6 Mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de números reais limitada inferiormente e monótona estritamente decrescente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \inf\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

7.7 Mostrar que se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |a| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$.

7.8 Mostrar que se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então existem seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $x_n \rightarrow \sup X$ e $y_n \rightarrow \inf X$.

7.9 Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

Mostrar que a seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sup X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. O valor de aderência desta seqüência é denominado “o limite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ”, e é denotado por $\limsup x_n$.

8 Sobre Funções Contínuas

8.1 Mostrar que, em um conjunto M , duas métricas, $d_1, d_2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ são equivalentes se, e somente se, $d_1 \succ d_2$ e $d_2 \succ d_1$.

8.2 Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial normado. Considerando o espaço métrico $(V, d_{\|\cdot\|})$, onde $d_{\|\cdot\|}$ é a métrica associada à norma $\|\cdot\|$, mostrar que a função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+, v \mapsto \|v\|$, é contínua.

8.3 Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial normado. A cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, temos associada a função:

$$\begin{aligned} H_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \alpha \cdot v \end{aligned}$$

que denominamos a “homotetia de escala α ”. Mostrar que H_α é uma função contínua.

8.4 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos, $X \subseteq M$ e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Demonstrar que $f|_X : X \rightarrow f[X]$ é contínua.

8.5 Seja $M = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. Mostrar que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ é contínua em todo ponto da forma $\frac{1}{n}$ mas não é contínua em 0.

8.6 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ satisfaz a **condição de Hölder de ordem** $k > 0$ se existir $c > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot [d_M(x, y)]^k)$$

Mostrar que toda função que satisfaz a condição de Hölder é contínua.

8.7 Considere a função:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} n+1, & \text{se } x = n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Mostrar que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, mas não é contínua em $\mathbb{N}$.

8.8 Considere a função:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

Argumentar por que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e mostrar que f não é contínua em $(0, 0)$. (**Dica:** mostre que f restrita à diagonal do plano não é contínua em $(0, 0)$.)

8.9 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Mostrar que $f : M \rightarrow N$ é contínua se, e somente se, para qualquer $X \subset M$ tivermos $f[\text{Cl.}(X)] \subset \text{Cl.}(f[X])$.

8.10 Sejam (M, d) um espaço métrico, $A \subset M$ e:

$$\chi_A : M \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Mostrar que χ_A é contínua em $x_0 \in M$ se, e somente se, $x_0 \notin \text{Fr.}(A)$.

8.11 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Se $\alpha = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$, mostrar que $f(\alpha) = 0$.

8.12 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f, g : M \rightarrow N$ funções contínuas. Mostrar que se existe $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, então existe $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in B(x_0, \eta))(\forall y \in B(x_0, \eta))(f(x) \neq f(y))$$

8.13 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Mostrar que:

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(f(x) = g(x)) \Rightarrow (f = g).$$

9 Sobre Funções Uniformemente Contínuas

9.1 Sejam $(M, d), (N_1, d_1), \dots, (N_n, d_n)$ espaços métricos e:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N_1 \times \dots \times N_n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Mostrar que f é uniformemente contínua se, e somente se, $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(f_i : M \rightarrow N_i \text{ é uniformemente contínua})$.

(9.2) Sejam $(M_1, d_{M_1}), \dots, (M_n, d_{M_n}), (N_1, d_{N_1}), \dots, (N_n, d_{N_n})$ espaços métricos. Considere:

$$\begin{aligned} f : M_1 \times \dots \times M_n &\rightarrow N_1 \times \dots \times N_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{aligned}$$

Mostrar que f é uniformemente contínua se, e somente se, $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(f_i : M_i \rightarrow N_i \text{ é uniformemente contínua})$.

(9.3) Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Mostrar que a função:

$$\begin{aligned} d(\cdot, X) : M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto d(x, X) \end{aligned}$$

é uniformemente contínua.

(9.4) Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos. Mostrar que a função $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua se, e somente se, para quaisquer sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de N , tivermos:

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$$

10 Sobre Homeomorfismos e Espaços Métricos Homeomorfos

- 10.1** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos, $x_0 \in M$ e $y_0 \in N$. Mostrar que $(M \times \{y_0\})$, munido de qualquer métrica no produto, é homeomorfo a M .
- 10.2** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo. Mostrar que, para qualquer $X \subseteq M$, $x_0 \in X' \iff f(x_0) \in f[X]'$.
- 10.3** Sejam M um conjunto e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma métrica. Mostrar que a métrica:

$$d_* : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto \min\{1, d(x, y)\}$$

é uniformemente equivalente a d .

- 10.4** Sejam M um conjunto e $d_1, d_2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ duas métricas. Mostrar que $d_1 \sim d_2$ se, e somente se, a função identidade $\text{id}_M : M \rightarrow M$ for um homeomorfismo.
- 10.5** Mostrar que $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$ e $(] - 1, 1[, d \restriction_{]-1, 1[\times] - 1, 1[})$, onde $d \restriction_{]-1, 1[\times] - 1, 1[}$ é a métrica induzida por d , são homeomorfos. Baseando-se nisto, dizer se “ser limitado” é uma propriedade topológica.
- 10.6** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Mostrar que:
- (a) Se d_1 for uma métrica uniformemente equivalente a d_M então o fato de $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ ser uniformemente contínua implica que $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_N)$ é uniformemente contínua.
 - (b) Se d_2 for uma métrica uniformemente equivalente a d_N então o fato de $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ ser uniformemente contínua implica que $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_2)$ é uniformemente contínua.
- 10.7*** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ um homeomorfismo. Mostrar que a função:

$$d'_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto d_N(f(x), f(y))$$

- (a) constitui uma métrica;
- (b) é tal que $d_M \sim d'_M$.

11 Sobre Compacidade Sequencial

- 11.1** As seguintes afirmações são verdadeiras quando em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$. Justifique-as:

- (a) $\mathbb{Q}$ não é sequencialmente compacto;
- (b) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$ é sequencialmente compacto;
- (c) $\mathbb{Z}$ não é sequencialmente compacto;
- (d) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ não é sequencialmente compacto;
- (e) $\mathbb{R}$ não é sequencialmente compacto.

11.2 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \rightarrow N$ uma bijeção aberta. Mostrar que:

- (a) Se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em N então $(f^{-1}(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em M .
- (b) Se $K \subset N$ é sequencialmente compacto então $f^{-1}[K] = \{x \in M \mid f(x) \in K\}$ é sequencialmente compacto.

11.3 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Mostrar que se M é sequencialmente compacto então $f[M] \subset N$ é fechado.

11.4 Sejam (K, d_K) um espaço métrico compacto, (N, d_N) um espaço métrico qualquer. Mostrar que se $f : K \rightarrow N$ é uma função bijetora contínua tal que para todo fechado $F \subseteq K$ tem-se $f[F] \subset N$ fechado, então f é um homeomorfismo.

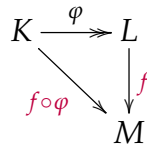
11.5 Sabe-se que todo intervalo fechado e limitado da reta é sequencialmente compacto, e que toda função contínua transforma subconjuntos compactos do domínio em subconjuntos compactos do contradomínio. Mostrar, usando os fatos acima, que são sequencialmente compactos os conjuntos:

- (a) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual;
- (b) O quadrado $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica usual; **dica:** use o item (a) e o fato de haver uma função contínua entre S^1 e Q ;
- (c) O conjunto:

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $\mathbb{R}^2$ é considerado com a métrica usual.

11.6 Sejam (K, d_K) um espaço métrico compacto, (L, d_L) um espaço métrico qualquer e $\varphi : K \rightarrow L$ uma sobrejeção contínua. Mostrar que, dado qualquer espaço métrico (M, d_M) , tem-se que $f : (L, d_L) \rightarrow (M, d_M)$ contínua se, e somente se, $f \circ \varphi : (K, d_K) \rightarrow (M, d_M)$ é contínua.



12 Sobre Conjuntos Conexos

- 12.1 Mostrar que $(\mathbb{R}^*, d)$, onde d é a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$, é desconexo.
- 12.2 Mostrar que $[0, 1] \cup [2, 3]$ é desconexo;
- 12.3 Mostrar que se $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ é uma função contínua e estritamente crescente tal que $f(a) = c$ e $f(b) = d$, então f é um homeomorfismo.
- 12.4 Mostrar que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ é contínua se, e somente se, f é constante;
- 12.5 Mostrar que $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ é conexo;
- 12.6 Sejam (M, d) um espaço métrico, $A, B \subset M$ partes conexas de M tais que $\text{Cl.}(A) \cap B \neq \emptyset$. Mostrar que $A \cup B$ é conexo.
- 12.7 Mostrar que S^1 não é homeomorfa a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$; **Dica:** use a conexidade e o **Teorema 338**.
- 12.8 Mostrar que o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.
- 12.9 Mostrar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é conexo por caminhos;
- 12.10 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \rightarrow N$ uma sobrejeção contínua. Mostrar que se M é conexo por caminhos então N é conexo por caminhos.

13 Sobre Completude

- 13.1 Verificar se as sequências abaixo, nos respectivos espaços métricos, são de Cauchy:
- a. $x_n = \frac{1}{n+1}$ em $(\mathbb{Q}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$;
 - b. $x_n = \frac{1}{n}$ em $(]0, 1], d)$, onde d é a métrica induzida da métrica usual sobre $\mathbb{R}$;
 - c. $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ em $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$;
 - d. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ em $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$;
 - e. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ em $(\mathbb{Q}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$;
- 13.2 Seja $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial normado. Mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy, então $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.
- 13.3 Mostrar que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$, então $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$.

13.4 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de números reais positivos. Mostrar que se uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M, d) é tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n)$$

então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

13.5 Seja $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |y - x|$. Pode-se afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, com a métrica induzida, é completo? Por quê?

13.6 Mostrar que todo espaço métrico finito é completo.

13.7 Mostrar que todo espaço métrico cuja métrica é a métrica zero-um é completo.

13.8 Seja (M, d) um espaço métrico no qual toda bola fechada é compacta. Mostrar que (M, d) é completo. **Dica:** mostrar que o conjunto dos termos de uma sequência de Cauchy é limitado e, portanto, está contido em uma bola fechada.

13.9 Dar um exemplo de espaço métrico completo, (M, d) e de uma função contínua sobrejetora $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ de modo que (N, d') não seja completo. **Sugestão:** considerar sobre $\mathbb{Q}$ as métricas usual e a zero-um.