

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Relatório Científico FAPESP - 2º semestre

Orientadora: Joyce da Silva Bevilacqua

Função Peso no Algoritmo Backprojection: Estudo Aplicado a Imagens do Tórax

Elisa Pereira Kameda

São Paulo, 20 de maio de 2004

Sumário

1	Introdução	6
2	Algoritmo de Reconstrução por Projeção - Backprojection	6
2.1	Modelo Matemático	8
3	Função Peso Exponencial	10
3.1	Simulações	11
3.1.1	1 copo	12
3.1.2	2 copos	21
4	Interpolação Polinomial	28
5	Interface Gráfica	29
6	Simulações	35
6.1	Valor máximo	35
7	Etapas Seguintes	48

Lista de Figuras

1	Projeção de linhas equipotenciais.	7
2	Posição ω do dipolo no círculo unitário e sua rotação ω^\perp	9
3	Mapeamento de Ω no semi-plano P	9
4	Superfície da função peso $\Phi(x, \omega)$	10
5	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -2.5	12
6	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -1.25	12
7	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.625	13
8	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.15625	13
9	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = 0.15625	13
10	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = 0.625	13
11	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -2.5	14
12	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -1.25	14
13	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.3125	15
14	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.078125	15
15	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = 0.3125	15
16	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -2.5	16
17	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -1	16
18	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.5	17
19	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.625	17
20	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = 0.5	17
21	1 copo: Alfa = -0.5 e Gama = -0.5	18
22	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.5	19
23	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.5	19
24	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.5	19
25	1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.75	20
26	1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.75	20
27	1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.75	20
28	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -5	21

29	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -2.5	21
30	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -1.25	22
31	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -0.625	22
32	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -0.15625	22
33	2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = 0.15625	23
34	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -5.0	23
35	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -2.5	24
36	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -1.25	24
37	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -0.3125	24
38	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -0.078125	25
39	2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = 0.3125	25
40	2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -5.0	26
41	2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -2.5	26
42	2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -1.0	27
43	2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -0.625	27
44	2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = 0.625	27
45	Interface gráfica utilizada no primeiro semestre de trabalho	30
46	Interface gráfica - interpolação e perfil de polinômios	32
47	Interface gráfica - comparação de imagens	33
48	Interface Gráfica - Porcentagem de Corte	34
49	Função peso original	35
50	dist1 = 0.001 e weight1 = 800	36
51	dist1 = 0.001 e weight1 = 100	37
52	dist1 = 0.001 e weight1 = 40	37
53	dist1 = 0.001 e weight1 = 35	38
54	dist1 = 0.001 e weight1 = 10	38
55	dist1 = 0.001 e weight1 = 5	39
56	dist1 = 0.001 e weight1 = 1	39
57	dist1 = 0.01 e weight1 = 800	40
58	dist1 = 0.01 e weight1 = 100	41

59	dist1 = 0.01 e weight1 = 40	41
60	dist1 = 0.01 e weight1 = 35	42
61	dist1 = 0.01 e weight1 = 10	42
62	dist1 = 0.01 e weight1 = 5	43
63	dist1 = 0.01 e weight1 = 1	43
64	dist1 = 0.1 e weight1 = 800	44
65	dist1 = 0.1 e weight1 = 100	45
66	dist1 = 0.1 e weight1 = 40	45
67	dist1 = 0.1 e weight1 = 35	46
68	dist1 = 0.1 e weight1 = 10	46
69	dist1 = 0.1 e weight1 = 5	47
70	dist1 = 0.1 e weight1 = 1	47

1 Introdução

O objetivo principal do grupo, liderado pelo professor Marcelo Amato da *Faculdade de Medicina* da USP, do qual participam pesquisadores do *Instituto de Matemática e Estatística* e da *Escola Politécnica* da USP, é utilizar a técnica de tomografia por impedância elétrica (TIE) para monitoramento contínuo do pulmão de pacientes submetidos à ventilação artificial.

Imagens estáticas de uma secção transversal dos pulmões podem ser obtidas através de raio X, tomografia computadorizada ou ressonância magnética. Entretanto, não é possível monitorar um paciente com essas técnicas, pois elas utilizam fontes radioativas ou necessitam de contrastes. A vantagem da técnica utilizada pela tomografia por impedância elétrica (TIE) reside no fato de ela ser não invasiva, portátil (podendo ser levada à beira do leito) e utilizar o potencial elétrico como estímulo para a obtenção das imagens.

A impedância elétrica de uma região conexa e fechada fornece, para cada ponto contido nessa região, a razão entre o campo elétrico e a corrente elétrica deste ponto. Como gordura, ar, sangue e ossos possuem impedâncias distinguíveis, essa técnica pode ser aplicada para reconstrução de imagens que representam uma secção transversal do tórax.

O algoritmo utilizado neste trabalho para a reconstrução da imagem é o **backprojection**, uma adaptação do algoritmo clássico utilizado em tomografia computadorizada. Neste algoritmo, os valores de voltagens medidos na fronteira são projetados para o interior do domínio através de linhas equipotenciais, definidas pelo modelo do dipolo elétrico, e ponderadas em função da distância entre o ponto e o dipolo.

A proposta deste trabalho de iniciação científica é explorar modificações na função que pondera o algoritmo de reconstrução por projeção.

2 Algoritmo de Reconstrução por Projeção - Backprojection

Para se obter uma imagem por TIE, N eletrodos igualmente espaçados são distribuídos na superfície de uma secção transversal do tórax e correntes de 1 miliampère são aplicadas sucessivamente em pares adjacentes de eletrodos. Cada par de eletrodos será representado no modelo matemático como um dipolo elétrico, isto significa que o eletrodo de injeção e o eletrodo de saída da corrente devem estar próximos. Para cada dipolo, medidas de voltagens são coletadas em todos os eletrodos.

% COLOCAR IMAGEM EXPLICANDO O PADRÃO DE INJEÇÃO

Sejam um ponto x da imagem que será reconstruída e N eletrodos igualmente espaçados. Considere o arco da equipotencial que se origina em d , passa por x , e intersecta a fronteira do domínio no ponto x_b , localizado entre os eletrodos e_i e e_j ($i, j \in [1, N]$). Na *Figura 1*, estão ilustrados e_i e e_j , para $i, j \in [1, 8]$.

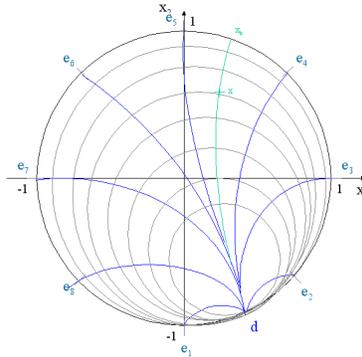


Figura 1: Projeção de linhas equipotenciais.

Na figura acima, as equipotenciais que partem do dipolo d são as equipotenciais de voltagens e as equipotenciais que passam por d (circunferências) são as equipotenciais de corrente.

% EXPLICAR MELHOR O PARÁGRAFO ACIMA?

Através das medidas de voltagens coletadas em e_i e e_j , interpolamos o valor da voltagem para x_b e projetamos este valor para o interior do domínio através do arco da equipotencial considerada acima.

A projeção sobre uma equipotencial definida por um dipolo d é ponderada por uma função que leva em consideração a distância entre o ponto do domínio e o dipolo. Esta função proposta por [2], é identificada por $\Phi(x, \omega)$ e será modificada neste trabalho de iniciação científica.

Com isso, além dos valores de voltagem medidos nos pontos da fronteira, valores interpolados e ponderados também são calculados e projetados para o interior do domínio de modo a obter a imagem final.

A imagem final que representa a distribuição da impedância no interior do tórax é obtida através da contribuição de cada conjunto de medidas obtido percorrendo todos os pares de eletrodos, ou seja, uma média entre N imagens. Para o monitoramento contínuo de pacientes é necessário construir 24 imagens completas a cada segundo.

2.1 Modelo Matemático

Foi assumido que o par de eletrodos por onde a corrente está sendo injetada pode ser aproximado por duas cargas elétricas de mesmo valor e sinais opostos, ou seja, por um dipolo localizado entre o par de eletrodos. Com isso, o modelo matemático baseia-se nas equações estáticas de Maxwell e a partir da seguinte suposição

$$\begin{cases} \nabla(\gamma \nabla u) = 0, \text{ em } \Omega \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = j, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{I})$$

onde

γ denota a condutividade,

u o potencial de voltagem,

j a corrente aplicada a um eletrodo,

Ω o domínio e

$\partial\Omega$ a fronteira do domínio.

O problema linearizado para uma pequena perturbação $\delta\gamma$ (de γ) e a correspondente perturbação δU (de u) é:

$$\begin{cases} \nabla(\gamma \nabla \delta U) = -\nabla(\delta\gamma \nabla U), \text{ em } \Omega \\ \gamma \frac{\partial(\delta U)}{\partial n} = -\delta\gamma \frac{\partial U}{\partial n}, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II})$$

Assumiu-se que Ω é o círculo unitário, ou seja, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $\gamma \equiv 1$ e $\delta\gamma = 0$ perto do dipolo. Com essas hipóteses o problema se reduz a

$$\begin{cases} \Delta \delta U = -\nabla(\delta\gamma) \nabla U, \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial(\delta U)}{\partial n} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III})$$

O problema original para TIE é determinar um γ consistente, conhecendo-se $u|_{\partial\Omega}$ (solução de (I)) para várias escolhas de j . Já o problema inverso linearizado associado a (III) é: dado $\delta U|_{\partial\Omega}$ para várias escolhas da solução U do dipolo, determinar um acréscimo $\delta\gamma$ consistente.

Sendo U uma solução do dipolo, temos que U é solução de

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = -\pi \frac{\partial \delta_\omega}{\partial \tau}, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{IV})$$

onde

$\frac{\partial \delta_\omega}{\partial \tau}$ é a derivada tangencial (no sentido horário) de uma função delta de Dirac e

$\delta_\omega, \omega \in \delta\Omega$.

Como Ω é o círculo unitário, a solução de (IV) é

$$U = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \text{ com } x_1 = \omega^\perp x \text{ e } x_2 = 1 - \omega^\perp x$$

onde

$\omega^\perp = (-\omega_2, \omega_1)$ é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ sobre a posição $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ do dipolo (*Figura 2*).

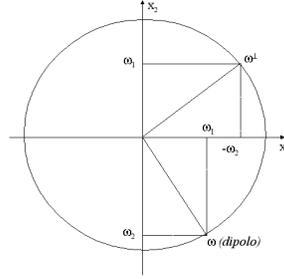


Figura 2: Posição ω do dipolo no círculo unitário e sua rotação ω^\perp .

A função $V = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ é a conjugada harmônica de $-U$ sobre Ω . Além disso, $x = (x_1, x_2) \rightarrow (-U, V)$ mapeia Ω no semi-plano superior $P = \{V > 1/2\}$. Realizando este mapeamento para a *Figura 1*, obtemos a *Figura 3*.

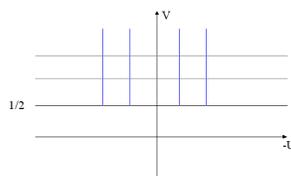


Figura 3: Mapeamento de Ω no semi-plano P

A partir deste mapeamento, dado um ponto x a ser construído, a a função peso que pondera a projeção sobre uma equipotencial definida por um dipolo d sugerida por [2] é

$$\Phi(x, \omega) = 2V(x, \omega) - 1$$

onde

$$V(x, \omega) = x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$$

tal que

$$x_1 = \omega^\perp x, \omega = \omega_1 + i\omega_2, \text{ e } \omega^\perp = -\omega_2 + i\omega_1.$$

Analisando as *Figuras 1 e 3*, pode-se notar que percorrer a equipotencial definida pelo dipolo d partindo de x_b e indo em direção ao próprio d na *Figura 1*, corresponde a partir de $V(x, \omega) = 1/2$ e ir em direção a ∞ na *Figura 3*. Este fato pode ser melhor observado através dos seguintes gráficos que representam a função $\Phi(x, \omega)$.

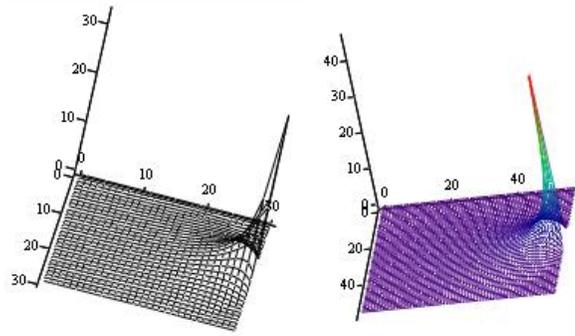


Figura 4: Superfície da função peso $\Phi(x, \omega)$

Logo, nota-se que existe uma singularidade para os pontos próximos ao dipolo, pois o valor da função $V(x, \omega)$ tende ∞ à medida ela se aproxima do dipolo, ou seja, a função que pondera a reconstrução de uma imagem tende a ∞ quando a distância do ponto x em relação ao dipolo diminui.

Por outro lado, os pontos próximos ao dipolo são os que mais sofrem ação da corrente elétrica, sendo, portanto, os pontos em que a diferença de condutividade é melhor percebida.

A proposta deste trabalho de iniciação científica é explorar diferentes funções peso, avaliar o impacto desta nova função sobre a imagem final e substituir as funções que apresentaram resultados favoráveis no **backprojection**.

Além da continuidade para a nova função peso e para suas derivadas (pelo menos de primeira ordem), não foi imposta nenhuma hipótese para realizar modificações na função $\Phi(x, \omega)$.

3 Função Peso Exponencial

Durante o primeiro semestre de trabalho, foram introduzidas alterações na função peso $\Phi(x, \omega)$ utilizando funções suaves aplicadas a todo o domínio.

A função estudada naquele semestre foi

$$W(x, \omega) = (\alpha + \beta \cdot x) \exp(\gamma + \delta \cdot x)$$

onde

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ são constantes,

x está definido como na função peso original $\Phi(x, \omega)$, ou seja, é a distância entre um ponto da imagem e um dado dipolo e

\exp é a função $f(x) = e^x$.

Esta função foi escolhida com base em experimentos numéricos realizados na tentativa de identificar uma função peso que fosse capaz de recuperar mais informações que a função peso $\Phi(x, \omega)$ original em pontos mais afastados do dipolo ou em pontos localizados no centro da imagem. Com a escolha dessa função, seria possível valorizar determinada região conforme necessário.

Para identificar a influência de $W_1(x, \omega)$ na qualidade das regiões central, intermediária e próxima à borda da imagem, foram realizados diversos testes com diferentes valores para os parâmetros α, β, γ e δ .

Os testes envolveram o estudo dos seguintes casos:

- 1 copo: imagem de um copo dentro de uma cuba salina em diferentes distâncias do centro;
- 2 copos: imagem de dois copos dentro de uma cuba salina em diferentes distâncias do centro.

Com o objetivo de atenuar a influência da singularidade na região próxima ao dipolo sobre o interior do domínio e, ao mesmo tempo, valorizar as informações contidas próximas ao centro da cuba, foram exploradas modificações na função $W_1(x, \omega)$ considerando β e γ nulos e foram avaliados os resultados de variações em α e δ , verificando quais regiões da imagem são valorizadas por quais funções. Portanto, a função peso estudada foi

$$W(x, \omega) = \alpha \exp(\delta \cdot x)$$

3.1 Simulações

Conforme solicitado na avaliação do primeiro relatório, as simulações realizadas serão melhor explicadas neste relatório.

3.1.1 1 copo

1. α constante e γ variando

- $\alpha = 0.5$

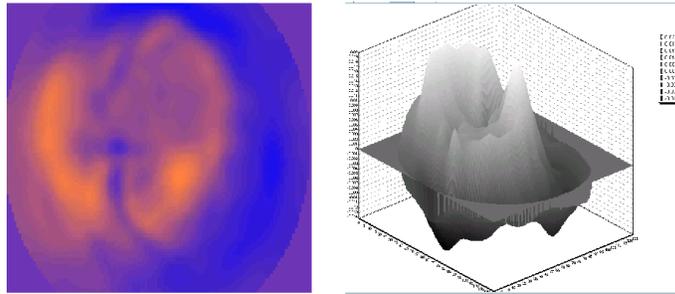


Figura 5: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -2.5

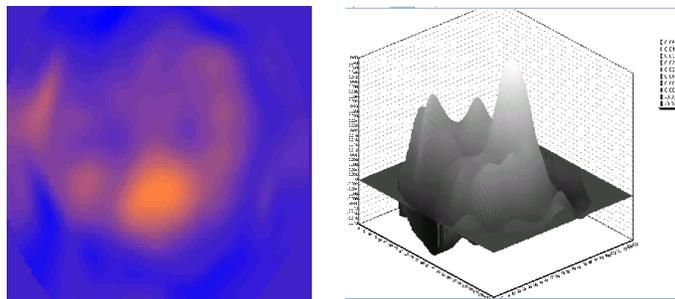


Figura 6: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -1.25

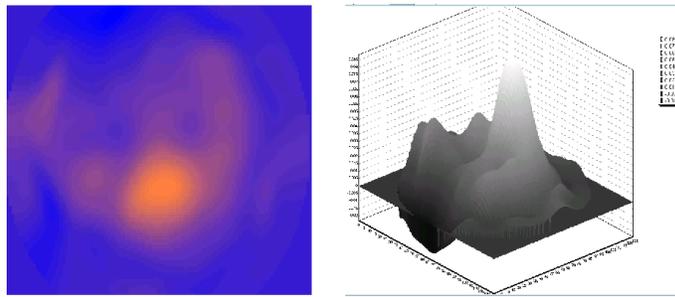


Figura 7: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.625

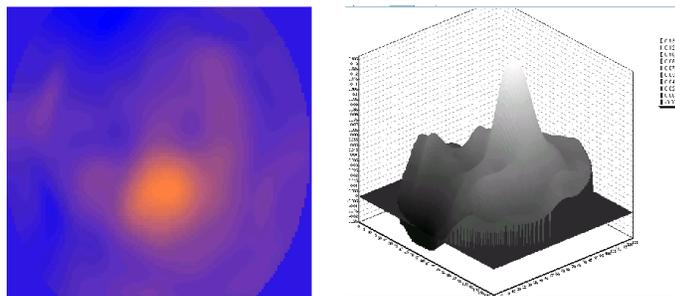


Figura 8: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.15625

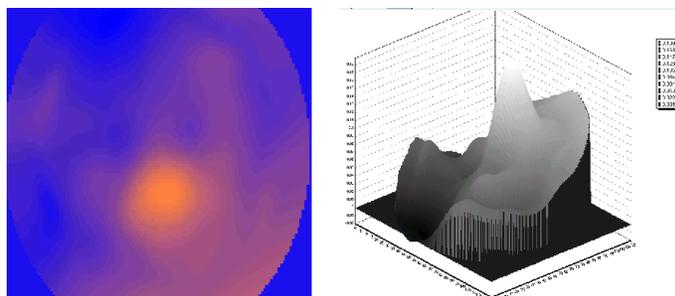


Figura 9: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = 0.15625

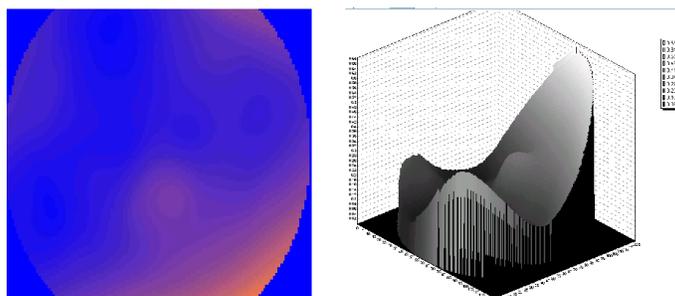


Figura 10: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = 0.625

Considerando-se valores negativos para γ tem-se que valores inferiores a -1.25 levam à destruição da imagem. Quanto mais próximo de zero o valor de γ , maior o ruído na borda e mais valorizada é a altura do copo, ocorrendo pouco espalhamento no topo e espalhamento considerável na base deste. Agora, considerando-se valores positivos para γ tem-se uma rápida destruição da imagem (a partir de $\gamma \approx 0.625$) e o ruído apresentado pela borda é bastante significativo.

- $\alpha = 1.0$

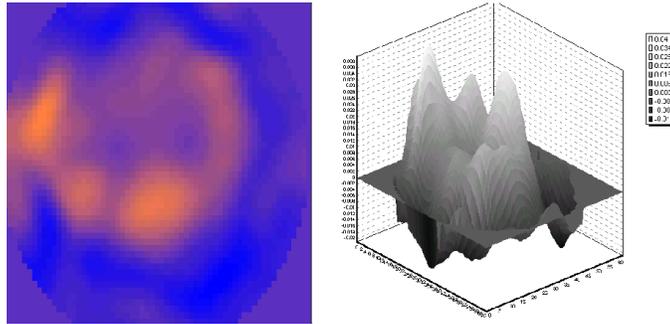


Figura 11: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -2.5

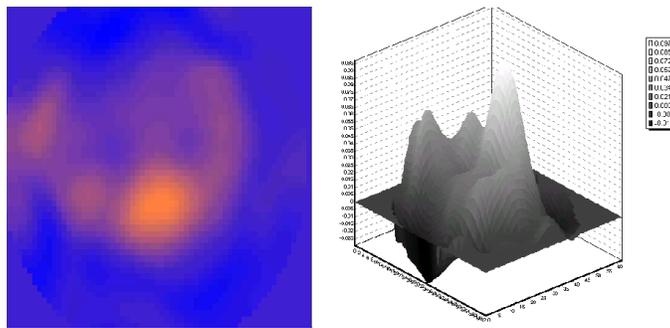


Figura 12: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -1.25

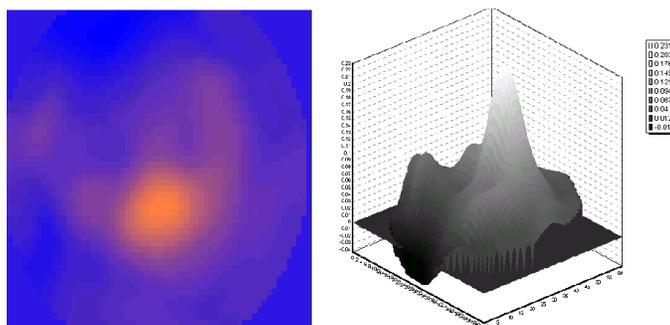


Figura 13: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.3125

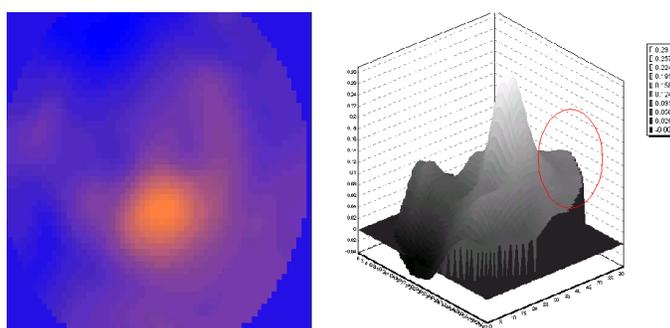


Figura 14: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.078125

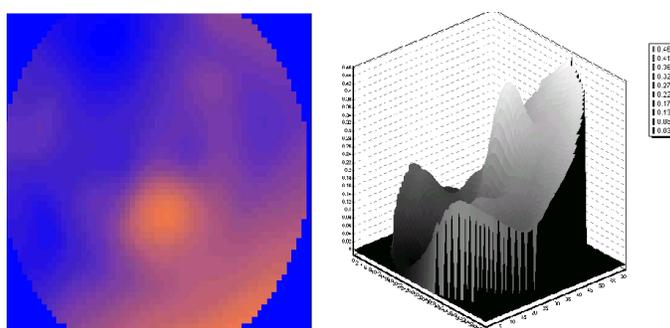


Figura 15: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = 0.3125

Valores negativos para γ inferiores a -1.25 também levam à destruição da imagem. Para valores entre -1.25 e -0.3125 o ruído da borda tende a diminuir e a altura do copo tende a ser mais valorizada. A partir de $\gamma = -0.3125$ o ruído da borda tende a aumentar em pontos específicos, mesmo assim, a altura do copo continua sendo valorizada. Novamente para valores positivos de γ a imagem é destruída rapidamente (valores acima de 0.3125).

- $\alpha = 2.0$

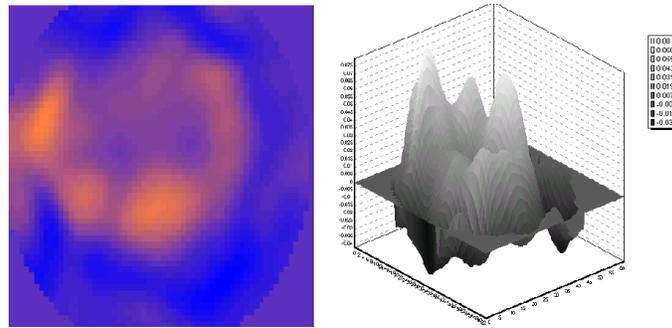


Figura 16: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -2.5

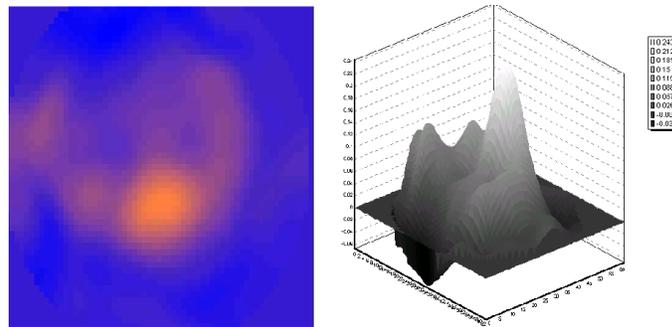


Figura 17: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -1

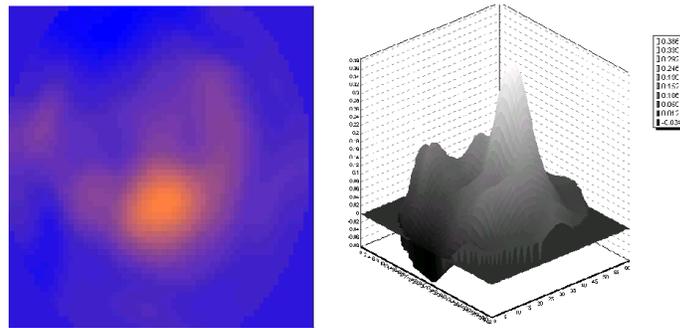


Figura 18: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.5

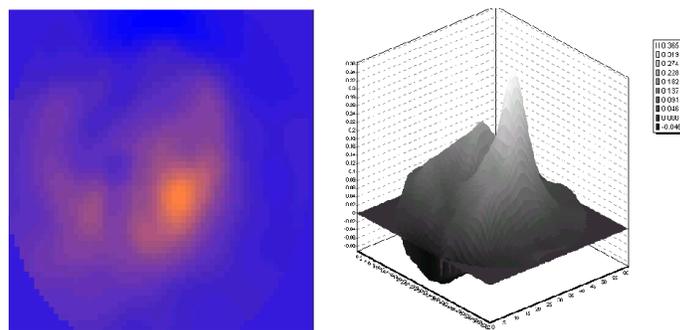


Figura 19: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.625

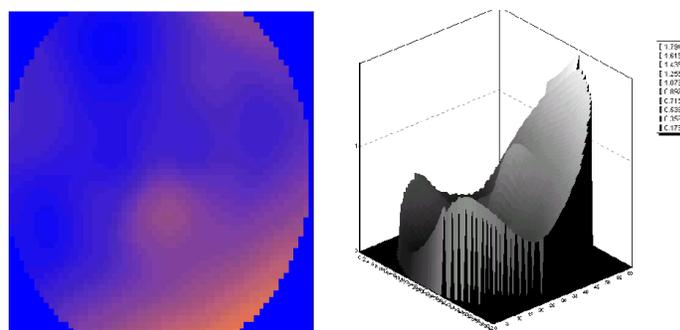


Figura 20: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = 0.5

Neste caso, para valores negativos para γ inferiores a -1.0 tem-se a destruição da imagem. No intervalo $[-1.0, -0.625]$ o ruído da borda tende a diminuir e a altura também tende a ser mais valorizada. A partir de $\gamma = -0.625$ o ruído da borda tende a aumentar em pontos específicos, mas, a altura do copo continua sendo valorizada. Novamente para valores positivos de γ a imagem é destruída rapidamente (valores acima de $\gamma \approx 0.5$).

- Conclusões

Através da exploração de alterações nas constantes α e γ da função peso adotada, pôde-se notar que para valores de α e γ negativos, o referencial para a orientação do copo é invertido. Quando α recebe valores positivos e se o valor de γ é negativo, existe um intervalo em que o ruído da borda tende a diminuir. E quanto mais próximo de zero o valor de γ , mais valorizada é a altura do copo e o espalhamento na base do copo tende a aumentar.

Valores positivos para γ não são favoráveis, pois tendem a ampliar o ruído na borda e mesmo valores muito pequenos (próximos de zero) ocasionam a destruição da imagem.

Também pôde-se notar que pequenas alterações no valor de γ levam-nos a resultados semelhantes na imagem final do 1 copo.

2. α variando e γ constante

- $\gamma = -0.5$

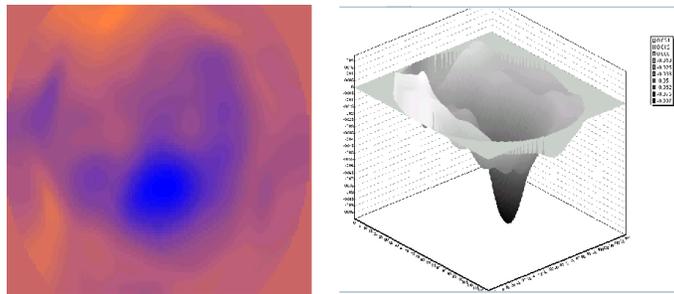


Figura 21: 1 copo: Alfa = -0.5 e Gama = -0.5

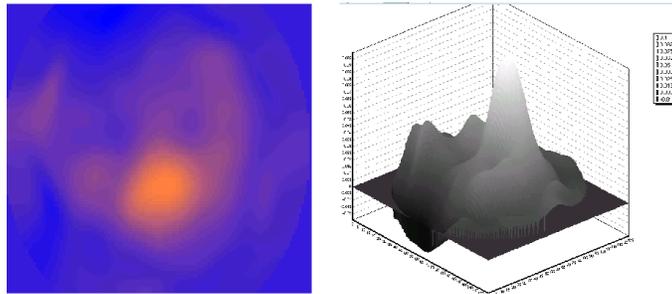


Figura 22: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.5

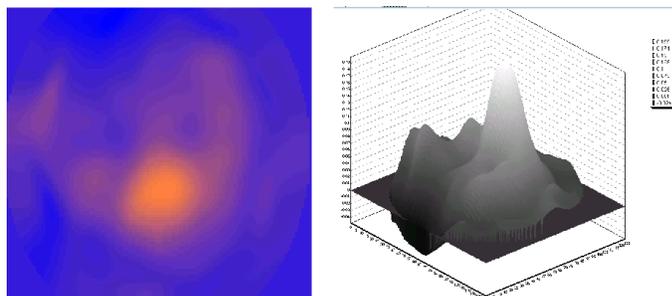


Figura 23: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.5

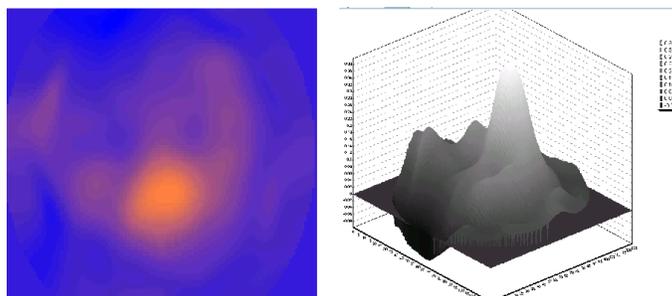


Figura 24: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.5

Os testes realizados com com valores negativos para α e γ também mostraram que o sentido de orientação do copo é invertido.

Além disso, mantendo-se γ fixo e efetuando pequenas alterações no valor de α notou-se que não ocorem alterações consideráveis na qualidade da imagem reconstruída final.

- $\gamma = -0.75$

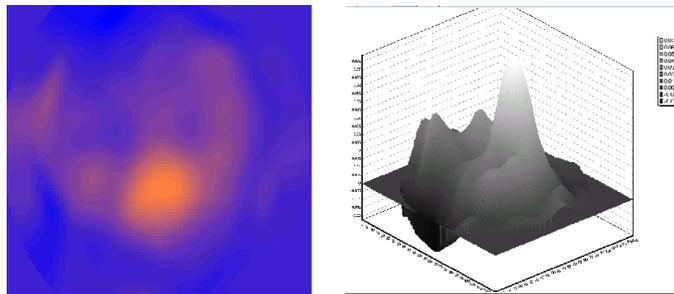


Figura 25: 1 copo: Alfa = 0.5 e Gama = -0.75

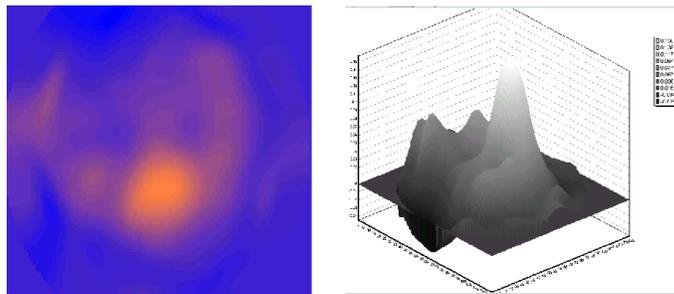


Figura 26: 1 copo: Alfa = 1.0 e Gama = -0.75

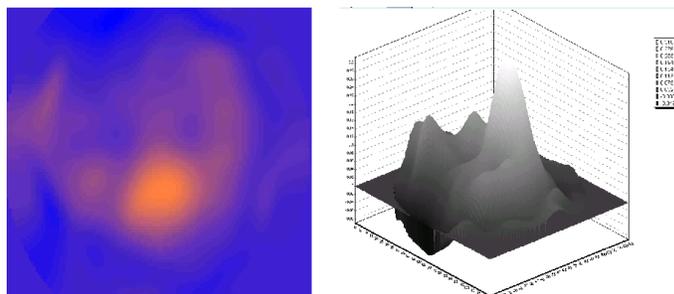


Figura 27: 1 copo: Alfa = 2.0 e Gama = -0.75

Também não são apresentadas alterações significativas na imagem reconstruída final, à medida que aumentamos o valor de α e mantemos γ constante.

- Conclusões

Através dos testes em que γ é constante e varia-se o valor de α , pode-se notar que pequenas alterações no valor de α não ocasionam alterações significativas na imagem reconstruída final, pois os resultados obtidos para $\gamma = -0.5$ e $\gamma = -0.75$ são muito parecidos.

3.1.2 2 copos

1. α constante e γ variando

- $\alpha = 0.5$

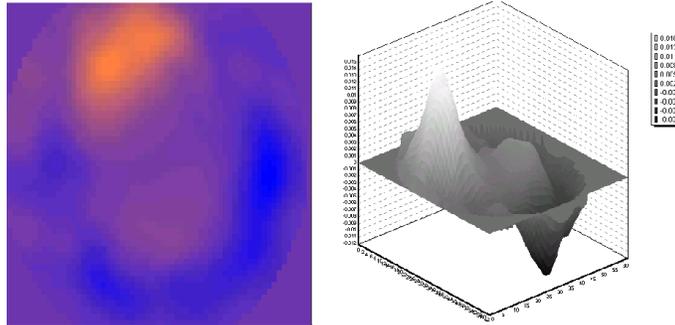


Figura 28: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -5

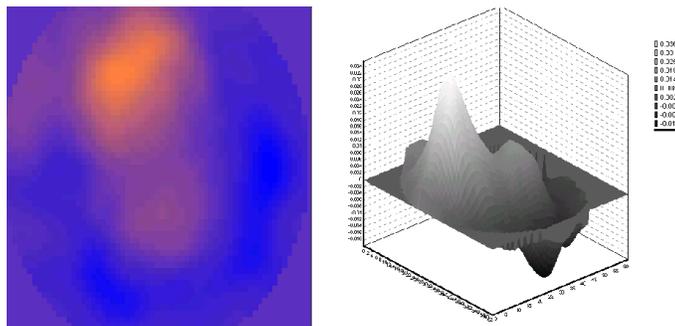


Figura 29: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -2.5

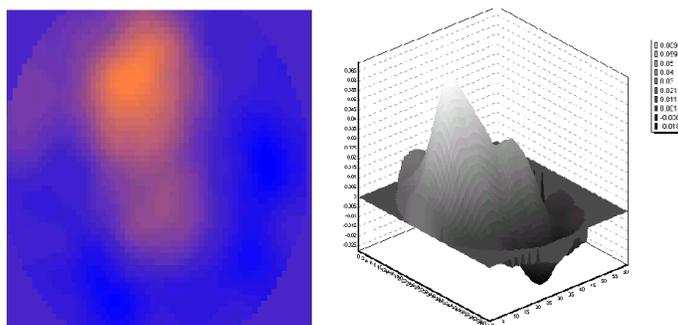


Figura 30: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -1.25

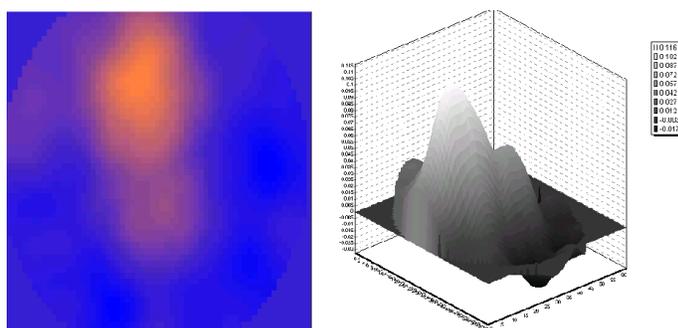


Figura 31: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -0.625

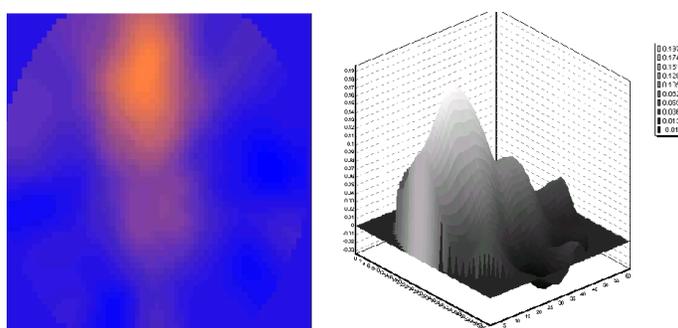


Figura 32: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = -0.15625

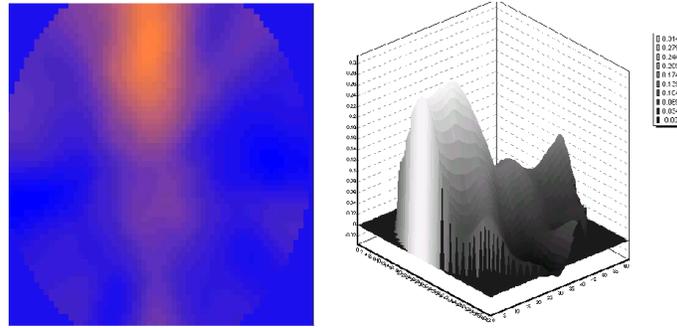


Figura 33: 2 copos: Alfa = 0.5 e Gama = 0.15625

Pode-se notar que à medida que o valor de γ aumenta, a separação entre os dois copos fica menos definida e o copo mais alto aproxima-se da borda, este fato começa a ser notado para $\gamma = -1.25$ e fica evidente para $\gamma = -0.15625$. Além disso, o ruído na borda também tende a aumentar.

Da mesma maneira que para o caso do 1-copo valores positivos para γ não são favoráveis, pois ocasionam a destruição da imagem para valores muito próximos de zero, como ocorre para $\gamma = 0.15625$.

- $\alpha = 1.0$

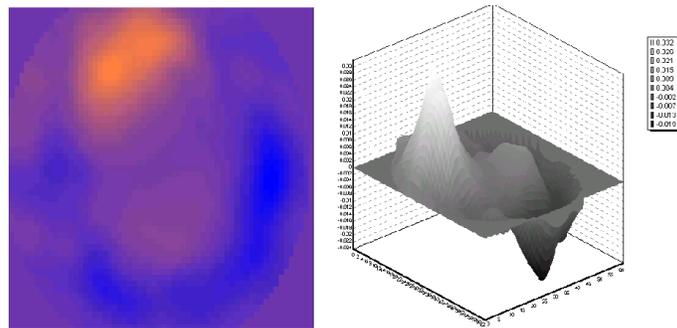


Figura 34: 2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -5.0

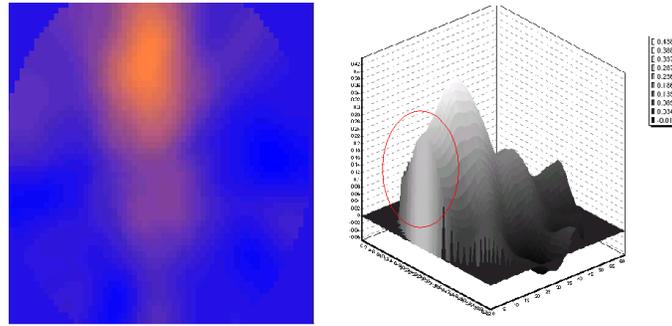


Figura 38: 2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = -0.078125

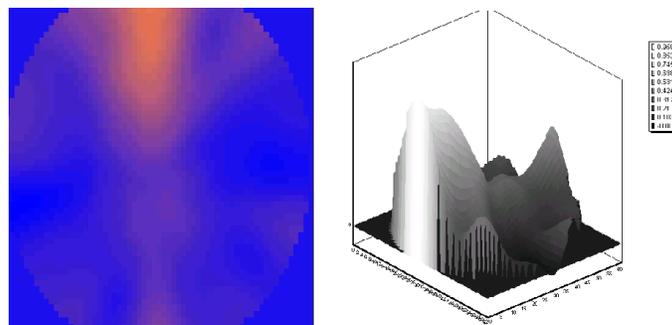


Figura 39: 2 copos: Alfa = 1.0 e Gama = 0.3125

Pode-se notar que à medida que o valor de γ aumenta, a separação entre os dois copos fica menos definida e o copo mais alto aproxima-se da borda, este fato começa a ser notado para $\gamma = -0.625$ e fica evidente para $\gamma = -0.15625$. Além disso, o ruído na borda, a altura do copo e o espalhamento na base do copo também tendem a aumentar.

Da mesma maneira que para o caso do 1-copo valores positivos para γ não são favoráveis, pois ocasionam a destruição da imagem para valores muito próximos de zero, como ocorre para $\gamma = 0.15625$.

- $\alpha = 2.0$

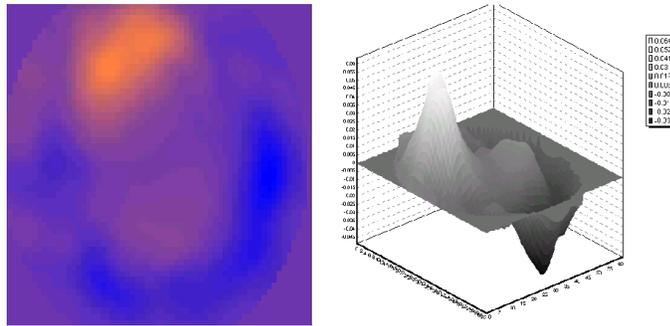


Figura 40: 2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -5.0

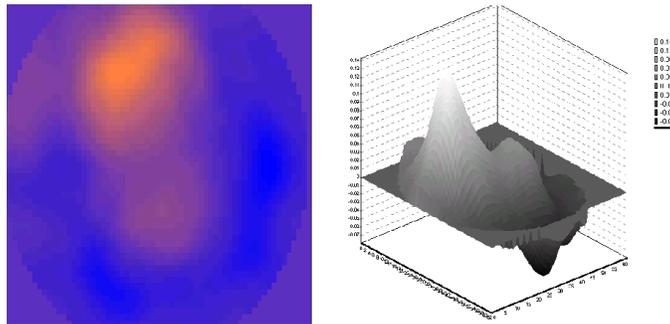


Figura 41: 2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -2.5

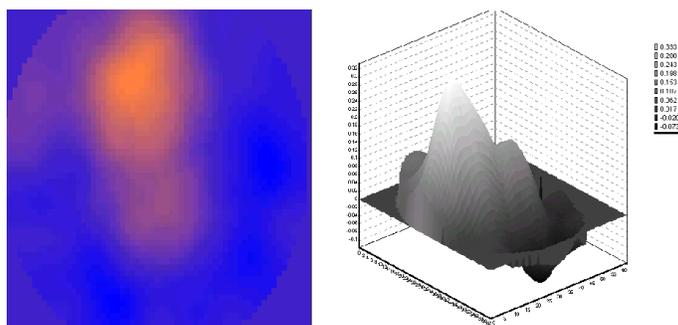


Figura 42: 2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -1.0

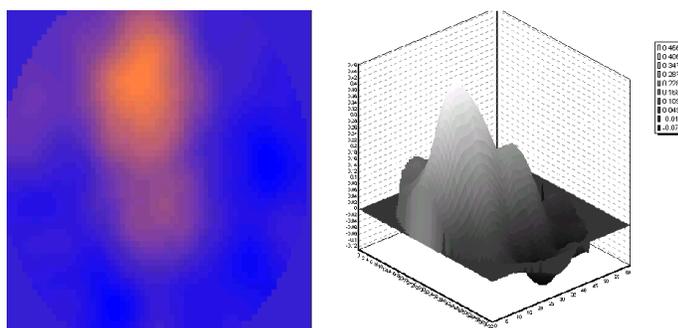


Figura 43: 2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = -0.625

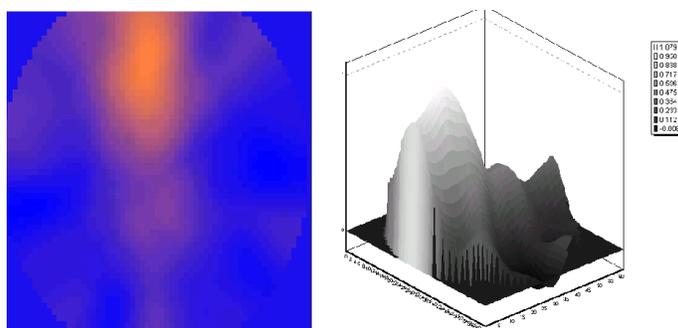


Figura 44: 2 copos: Alfa = 2.0 e Gama = 0.625

Os mesmos fatos observados para $\alpha = 1.0$ são vistos para $\alpha = 2$, mas a velocidade com que os copos se aproximam da borda e a separação entre eles diminui é maior, pois para $\alpha = 2.0$ e $\gamma = -0.625$ tem-se uma imagem semelhante à obtida para $\alpha = 1.0$ e $\gamma = -0.3125$.

- Conclusões

Para os três valores de α testados, pode-se notar que os resultados são bastante semelhantes. Existe um valor a partir do qual a imagem de 1 dos copos (o mais baixo) é destruída e o ruído da borda é bastante significativo. A partir deste valor e em um certo intervalo, os copos tendem a se aproximar da borda e suas alturas aumentam à medida que aumentamos o valor de α . Assumindo valores positivos para γ , a imagem é rapidamente destruída a partir de um dado valor que depende de α .

Assim, permitimos a construção de funções híbridas, que possuem características diferentes em diferentes regiões do domínio.

4 Interpolação Polinomial

A função peso proposta em [2] é baseada no fenômeno físico, ou seja, está intimamente relacionada ao fenômeno de propagação de corrente em um dado meio. Já a *função peso exponencial* ou apresentou um comportamento muito semelhante àquela proposta em [2] ou então ocasionava a destruição da imagem.

Neste segundo semestre de trabalho, a função peso $\Phi(x, \omega)$ foi substituída por dois polinômios interpoladores $P_1(x)$ e $P_2(x)$, que são construídos a partir de seis pares de pontos $(x_i, f(x_i))$, com x_i definido como o x da função $\Phi(x, \omega)$ e $f(x_i)$ o peso aplicado no ponto que determina x .

A escolha de uma função peso construída com polinômios interpoladores é mais uma tentativa de obter-se um controle maior da influência da função peso na qualidade da imagem reconstruída final. Esse controle pode ser obtido observando-se o “perfil” da função a ser aplicada. Além disso, um polinômio interpolador permite que seu comportamento seja mais facilmente controlado em determinadas regiões da imagem.

Foram utilizados dois polinômios interpoladores, pois conforme foi verificado no modelo matemático, a função peso apresenta atuações diferentes em principalmente duas regiões da imagem: na região próxima ao dipolo e na região central.

O algoritmo utilizado para o cálculo destes polinômios foi o algoritmo clássico na forma de Newton com diferenças divididas.

Os testes envolveram o estudo do caso em que tem-se um objeto com aproximadamente 0.5 centímetro de diâmetro localizado próximo à borda em diferentes posições dentro de uma cuba salina.

5 Interface Gráfica

A interface gráfica que foi utilizada no primeiro semestre de trabalho (Figura 5), foi implementada em *Delphi*[®] e possuía as seguintes “abas”:

1. **Gray Scale**: imagem reconstruída representada através de cores em escala de cinza;
2. **Level Curves**: representação da imagem reconstruída através de curvas de nível;
3. **Surface**: representação da imagem reconstruída através de uma superfície;
4. **Colours**: imagem reconstruída representada através de cores.

Além disso, esta interface possuía as seguintes opções:

1. **Mesh type**: tipo de malha a ser considerada para a reconstrução da imagem:
 - **Cartesian**: malha cartesiana
 - **Polar**: malha polar
 - **Equipotential**
2. **Smooth data**: pré processamento nos dados de entrada;
3. **Neighbourhood Filter**: aplicação do filtro da vizinhança com dimensões dadas por **Filter Dimensions** à imagem final;
4. **Image Resolution(pixels)**: dimensões da imagem final;
5. **Range**: valores máximo e mínimo para as condutividades da imagem reconstruída;
6. **Ignore V_k equal or greater than**: condutividades a serem desconsideradas após a ponderação da imagem;

7. `Vk type index`: opção de função peso a ser aplicada na reconstrução da imagem;
8. `Grounded electrode`: indica qual eletrodo foi aterrado;
9. `Derivative's skip`: quantos eletrodos correspondem à alternância entre injeção e coleta de corrente elétrica.

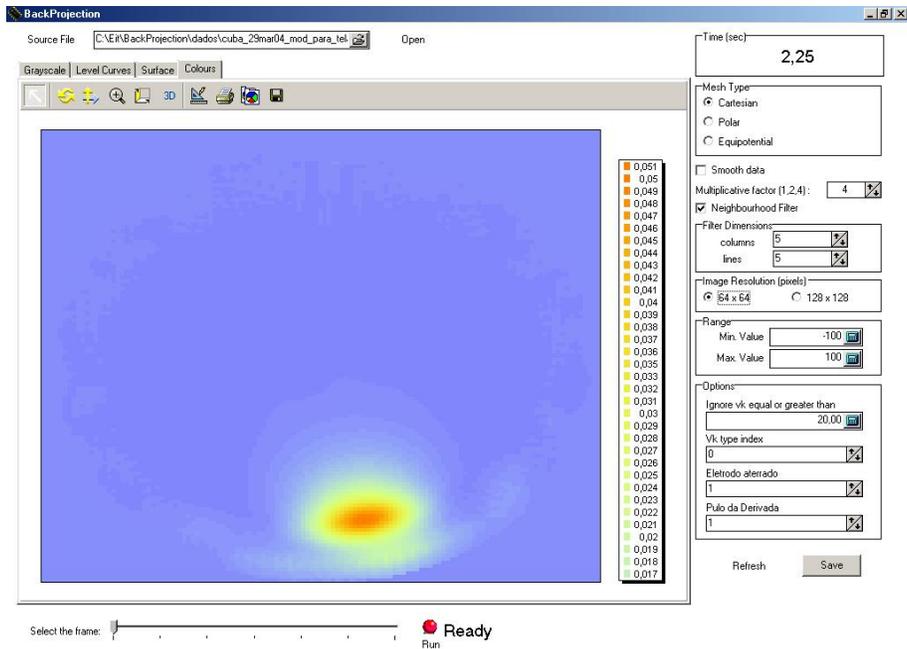


Figura 45: Interface gráfica utilizada no primeiro semestre de trabalho

Para o estudo da função peso, mantendo-se as mesmas opções anteriores, esta interface foi ampliada através da implementação das seguintes “abas”:

1. **Interpolation:** o usuário fornece os seis pontos necessários para o cálculo dos polinômios interpoladores $P_1(x)$ e $P_2(x)$. Com isso, o gráfico da função peso $W_2(x, \omega)$ (distância em função do peso) é apresentado e a imagem ponderada pelo polinômio $W_2(x, \omega)$ é mostrada em **Gray Scale**, **Level Curves**, **Surface** e **Colours**.

Para a construção de $P_1(x)$ são utilizados três pares de pontos, obtendo-se um polinômio de grau dois e para a construção de $P_2(x)$ são utilizados quatro pares de pontos, obtendo-se um polinômio de grau três.

Com isso, pode-se notar que um dos pontos é utilizado tanto para a construção de $P_1(x)$ quanto para a de $P_2(x)$ e este é o ponto que “liga” os dois polinômios fazendo com que a função $W_1(x, \omega)$, que foi estudada neste semestre, seja contínua no domínio.

As distâncias que determinam os polinômios interpoladores são atribuídas partindo-se do dipolo e atingindo-se a fronteira, ou seja, distâncias próximas de zero correspondem a região próxima ao dipolo.

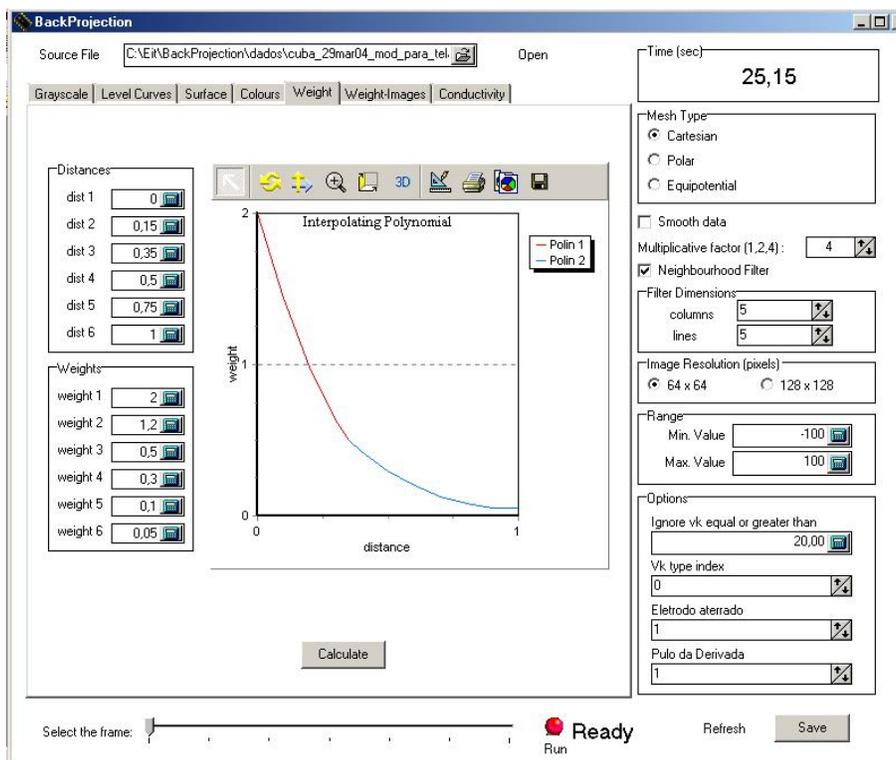


Figura 46: Interface gráfica - interpolação e perfil de polinômios

2. **Weighted Images:** são apresentadas as imagens representadas através de **Surface** e **Colours** ponderadas pelo peso original sugerido por [2] e pelo peso $W_2(x, \omega)$, que foi calculado através dos dados fornecidos pelo usuário.

Esta “aba” permite uma melhor comparação visual do efeito de diferentes ponderações aplicadas à imagem. Esta comparação auxilia na identificação de qualidades específicas de cada função testada.

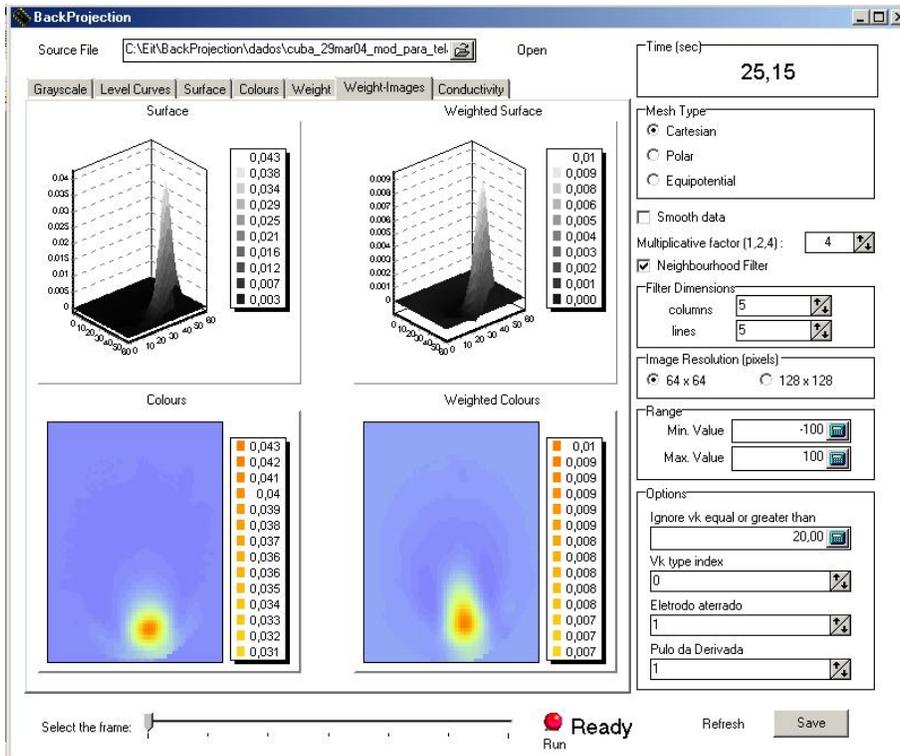


Figura 47: Interface gráfica - comparação de imagens

3. **Conductivity:** são apresentados os valores máximo e mínimo de condutividade da imagem e as coordenadas do pixel que possui a condutividade máxima. O usuário pode fornecer uma porcentagem e são mostrados os pixels que tem condutividade maior ou igual a esta porcentagem do valor máximo.

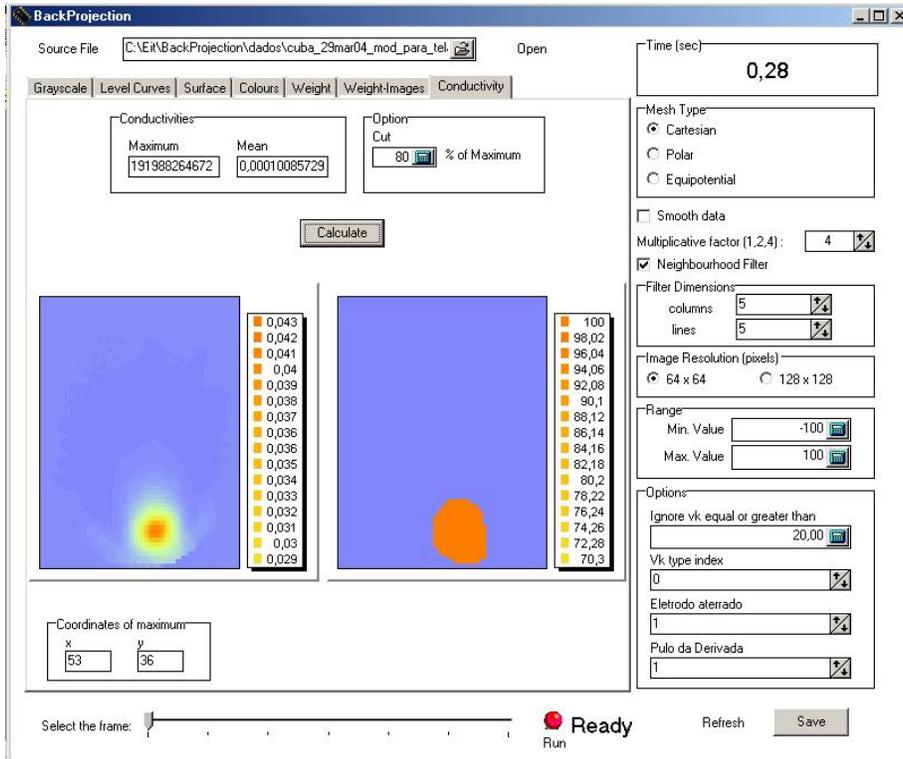


Figura 48: Interface Gráfica - Porcentagem de Corte

6 Simulações

6.1 Valor máximo

Os testes a seguir foram realizados para identificar a influência da singularidade apresentada na região próxima ao dipolo da imagem reconstruída.

A seguir é apresentada a imagem, sua superfície em 2 e 3 dimensões, resultante da aplicação do peso proposto em [2].

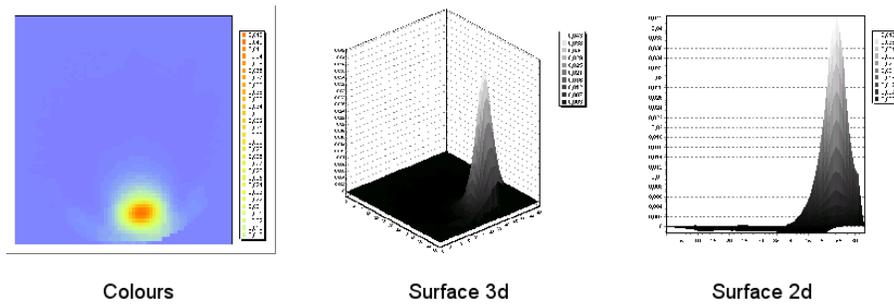


Figura 49: Função peso original

- $\text{dist1} = 0.001$ e weight1 variando

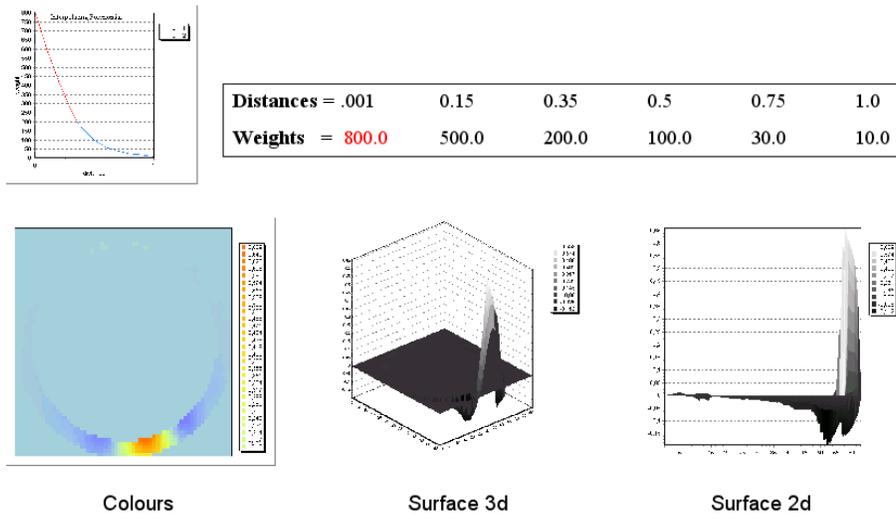


Figura 50: $\text{dist1} = 0.001$ e $\text{weight1} = 800$

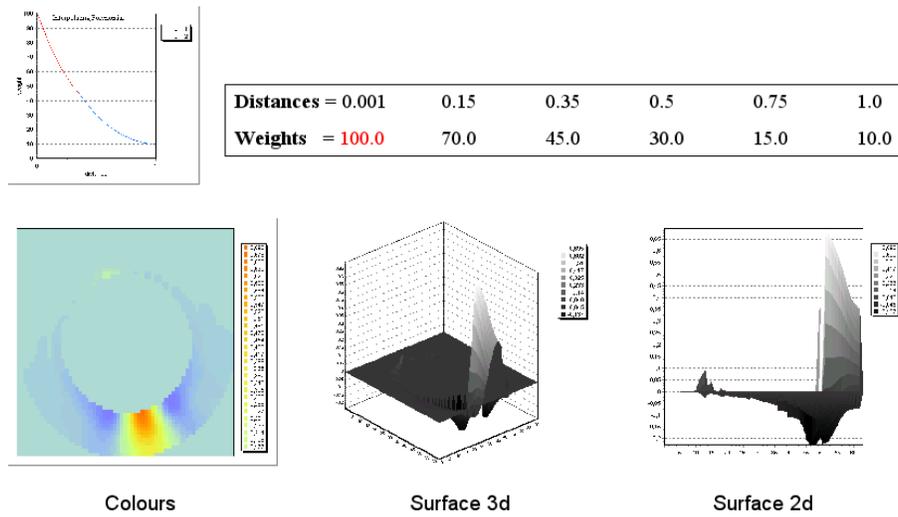


Figura 51: dist1 = 0.001 e weight1 = 100

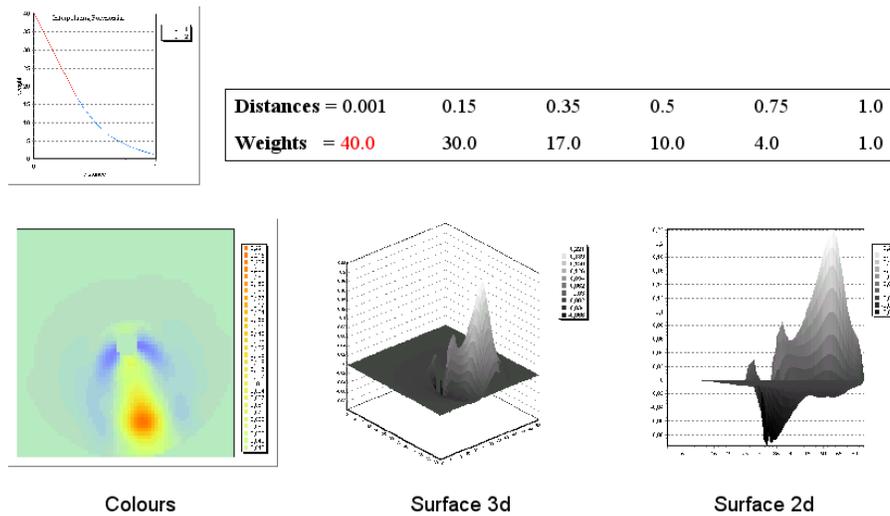


Figura 52: dist1 = 0.001 e weight1 = 40

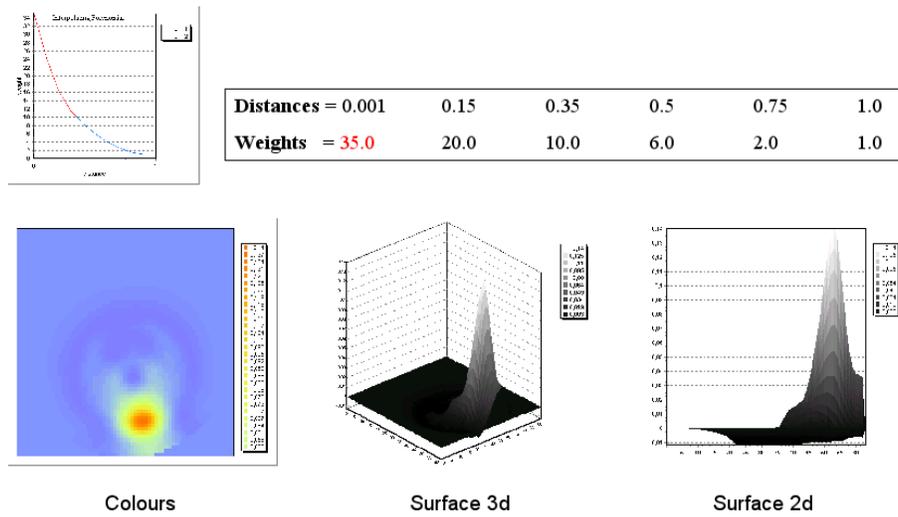


Figura 53: dist1 = 0.001 e weight1 = 35

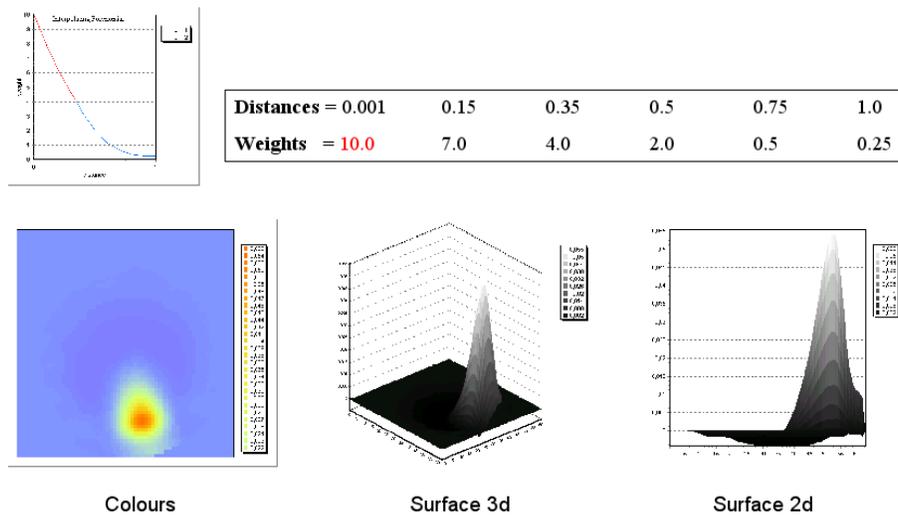


Figura 54: dist1 = 0.001 e weight1 = 10

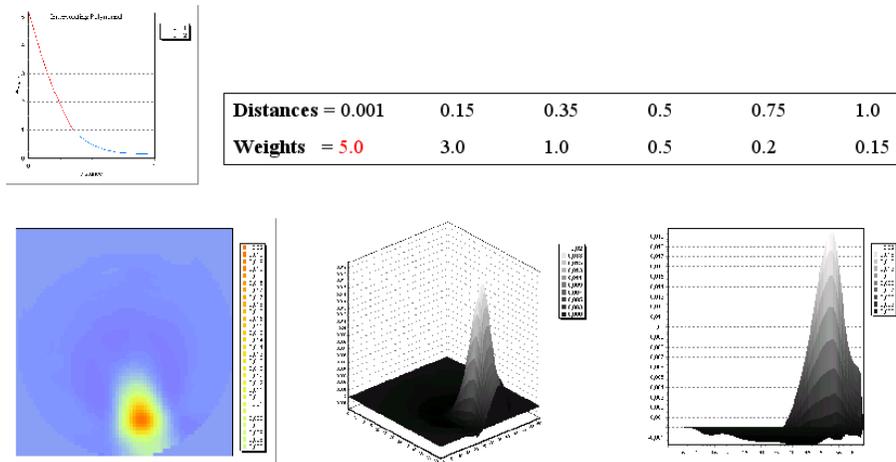


Figura 55: $dist1 = 0.001$ e $weight1 = 5$

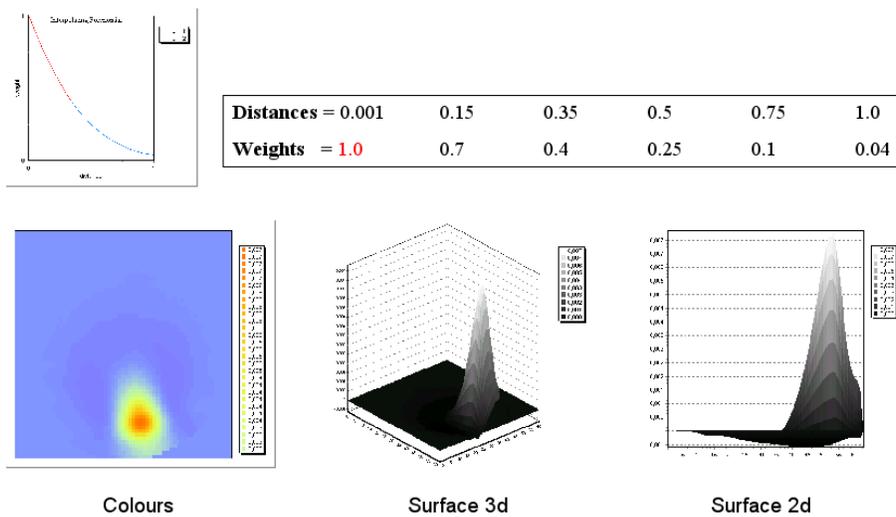


Figura 56: $dist1 = 0.001$ e $weight1 = 1$

Pode-se notar que ao atribuir valores muito altos para o peso aplicado na região próxima ao dipolo a imagem não pode ser reconstruída. A imagem passa a ser reconstruída a partir de $weight1 \approx 35$, mas o espalhamento na base do copo para estes valores é muito grande. Além disso, à medida que diminuimos o valor de $weight1$, o ruído na borda da imagem e o espalhamento na base do copo diminuem.

- $dist1 = 0.01$ e $weight1$ variando

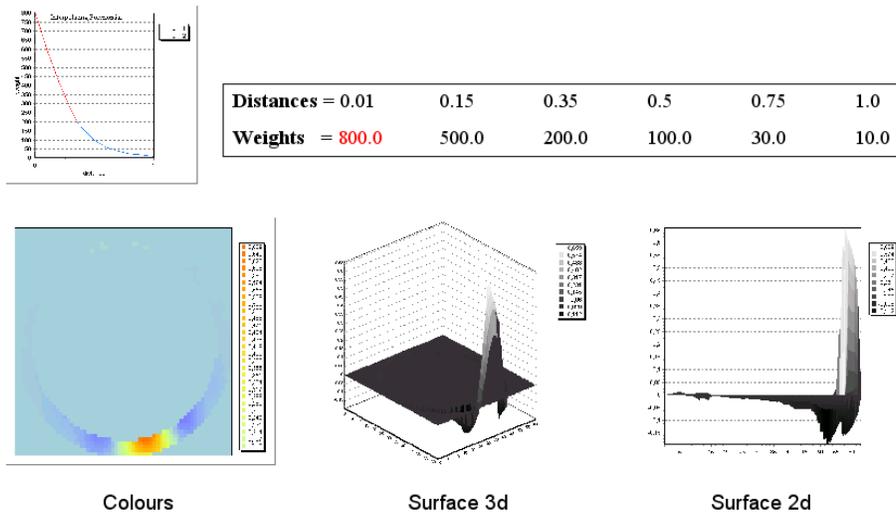


Figura 57: $dist1 = 0.01$ e $weight1 = 800$

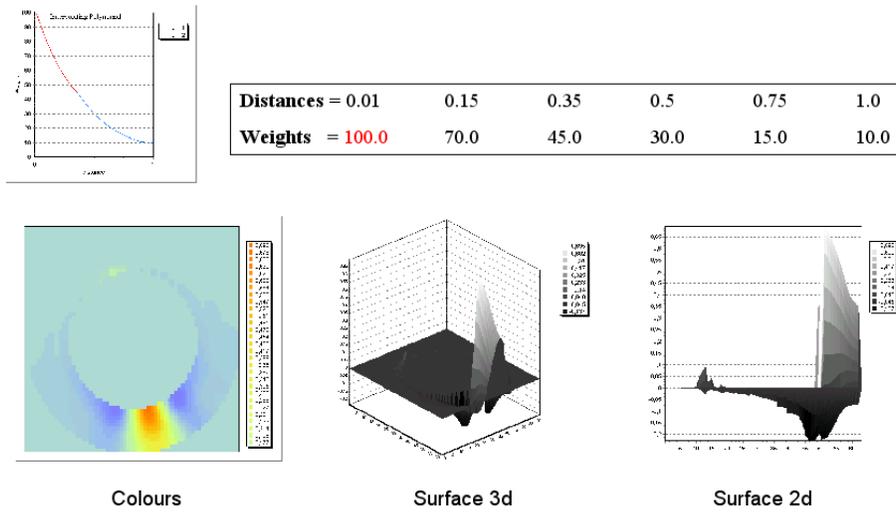


Figura 58: $\text{dist1} = 0.01$ e $\text{weight1} = 100$

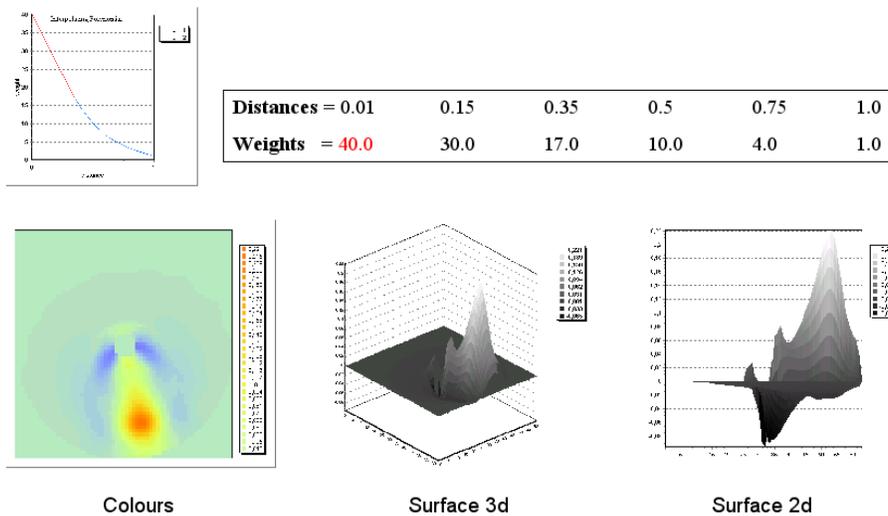


Figura 59: $\text{dist1} = 0.01$ e $\text{weight1} = 40$

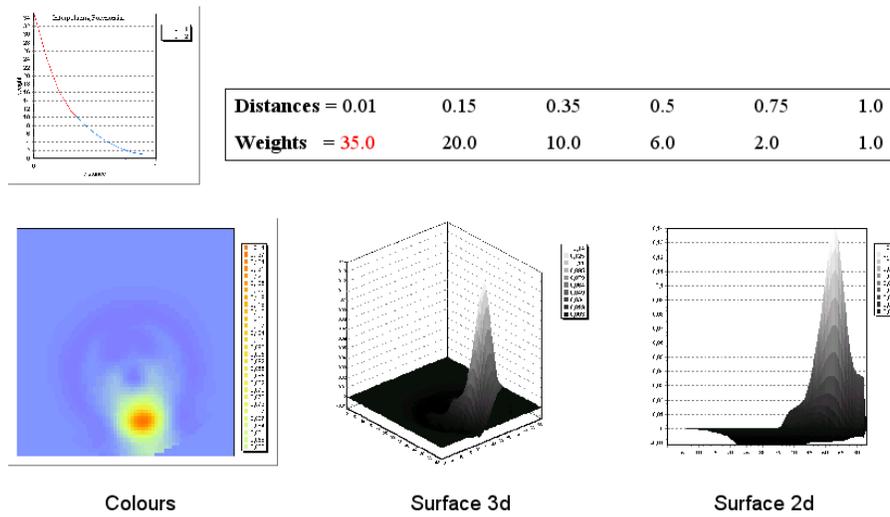


Figura 60: $dist1 = 0.01$ e $weight1 = 35$

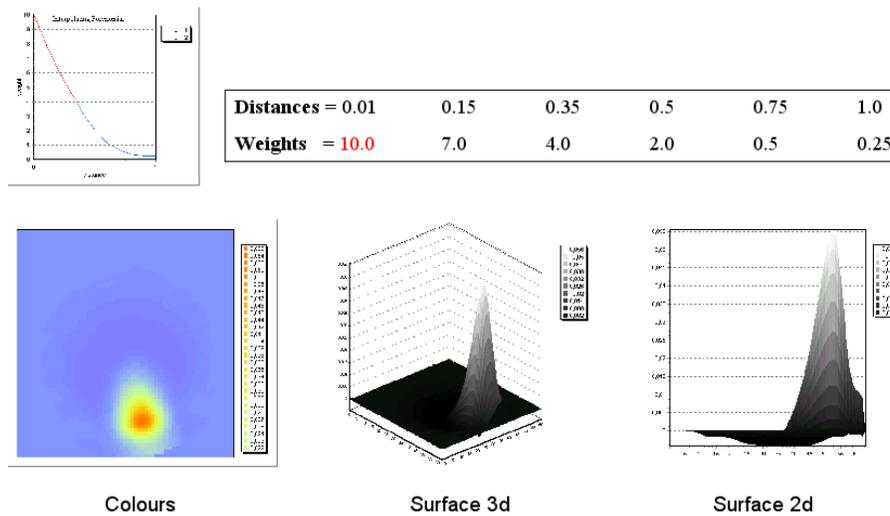


Figura 61: $dist1 = 0.01$ e $weight1 = 10$

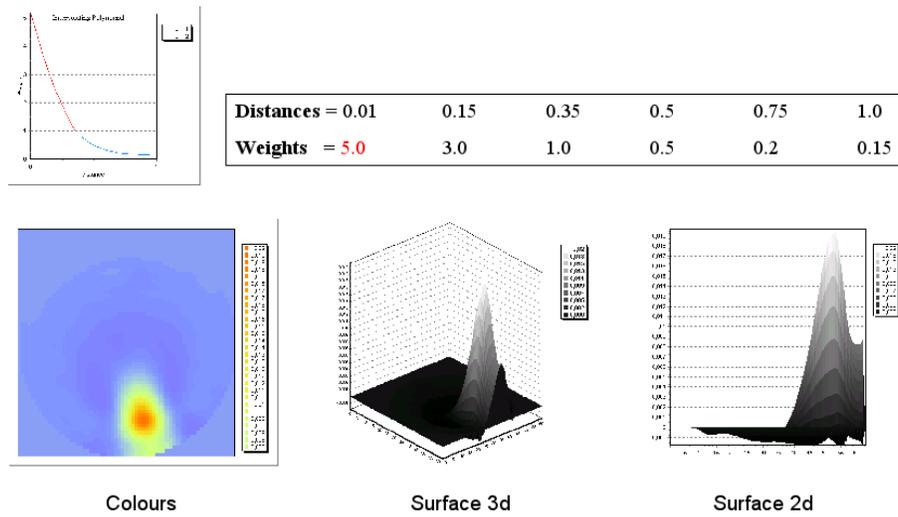


Figura 62: dist1 = 0.01 e weight1 = 5

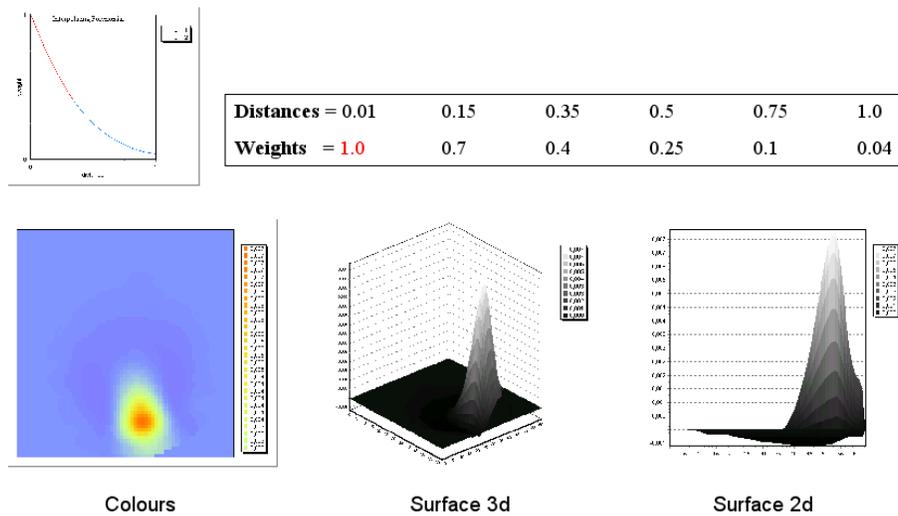


Figura 63: dist1 = 0.01 e weight1 = 1

Pôde-se notar que esta pequena alteração no valor de $dist1$ não produziu alterações significativas na imagem final em relação à $dist1 = 0.001$, pois as mesmas observações válidas para aquele caso, valem para este. Exceto para o caso em que $weight1 = 5$ (conforme pode ser observado na figura 6.1).

- $dist1 = 0.1$ e $weight1$ variando

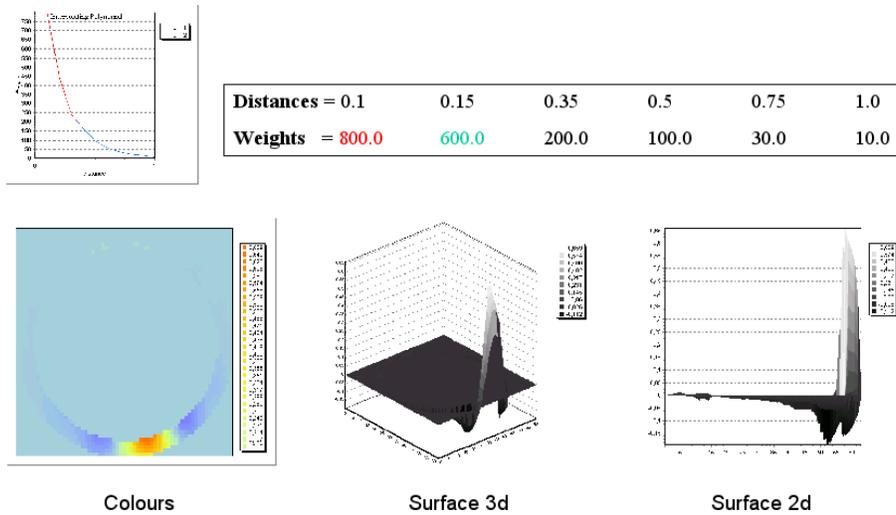


Figura 64: $dist1 = 0.1$ e $weight1 = 800$

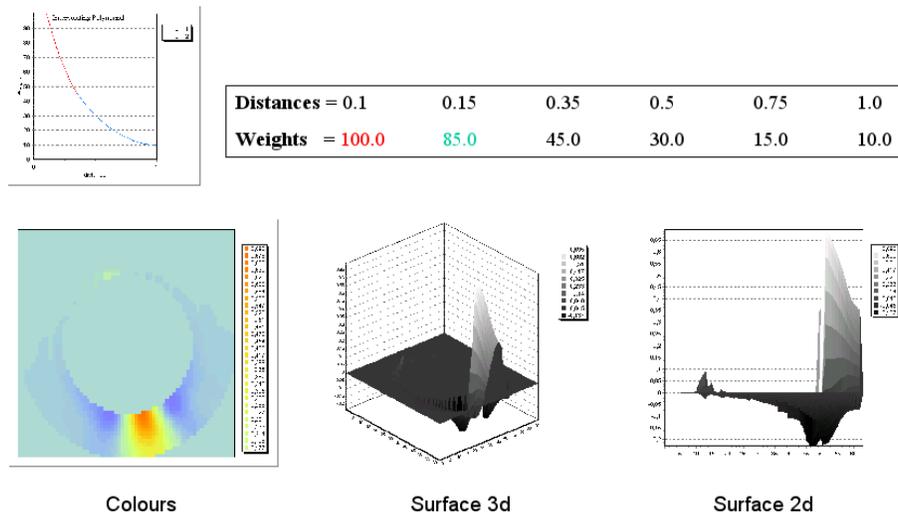


Figura 65: $dist1 = 0.1$ e $weight1 = 100$

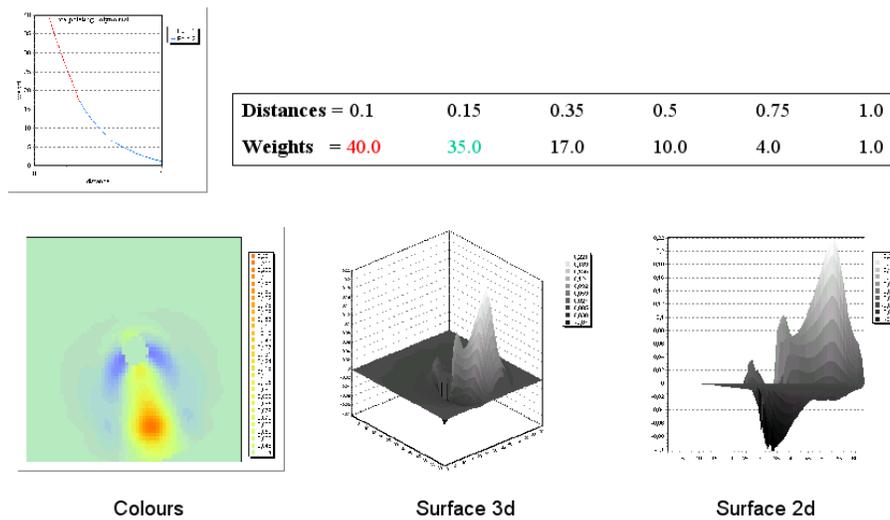


Figura 66: $dist1 = 0.1$ e $weight1 = 40$

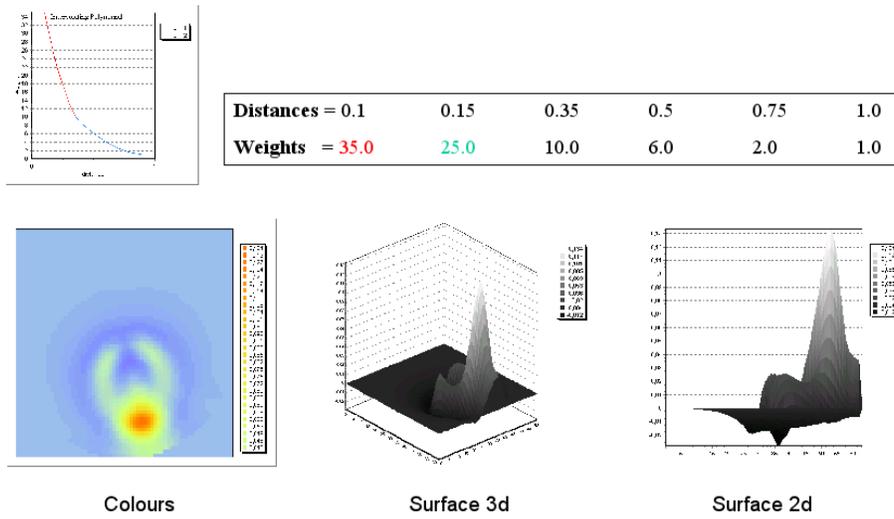


Figura 67: dist1 = 0.1 e weight1 = 35

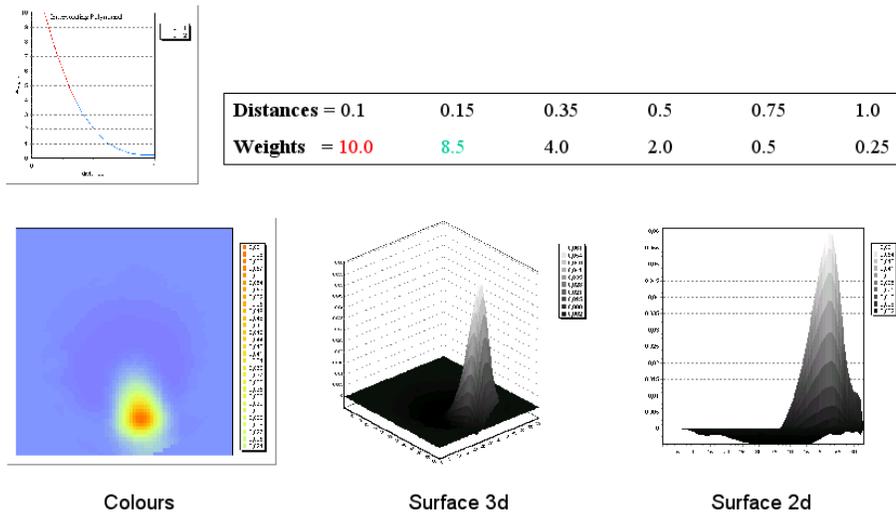


Figura 68: dist1 = 0.1 e weight1 = 10

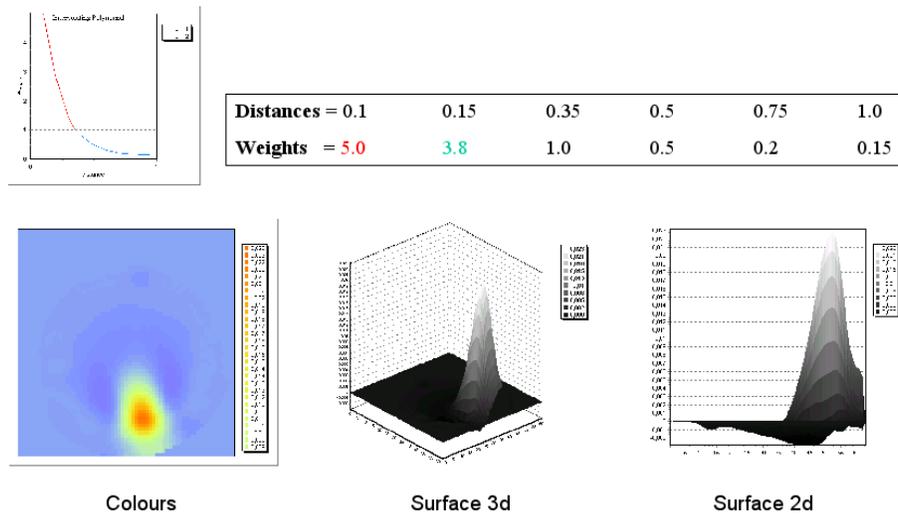


Figura 69: dist1 = 0.1 e weight1 = 5

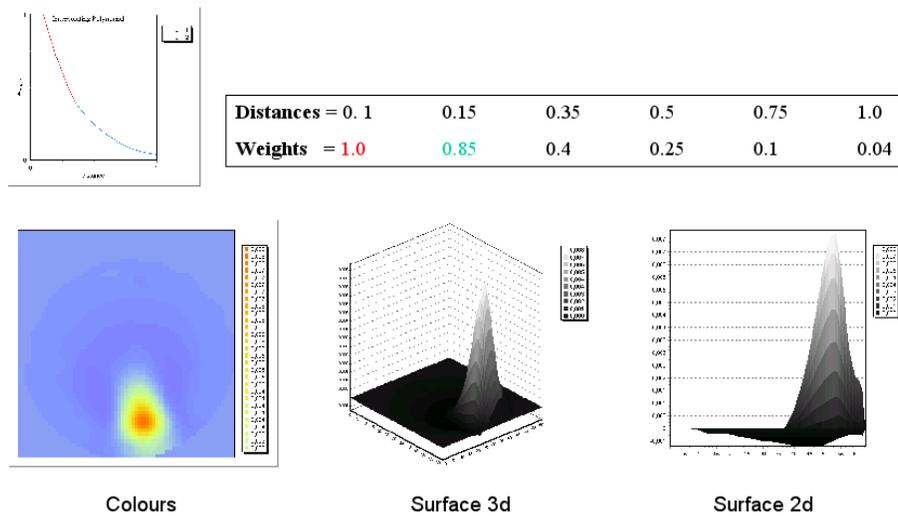


Figura 70: dist1 = 0.1 e weight1 = 1

Também notou-se que ao atribuir valores muito altos para o peso aplicado na região próxima ao dipolo a imagem não pode ser reconstruída. A imagem passa a ser reconstruída a partir de $weight1 \approx 35$, mas, para este valor de $dist1$, além do espalhamento na base do copo ser muito grande, pôde-se observar que o ruído na região central da imagem é bem maior que nos casos anteriores. À medida que diminuimos o valor de $weight1$, o ruído na borda da imagem e o espalhamento na base do copo também diminuem.

- Conclusões Através das observações realizadas, pôde-se notar que valores pequenos para $weight1$ são mais favoráveis para a melhoria da qualidade da imagem final, pois eles tendem a diminuir o ruído na borda da imagem e também diminuem o espalhamento na base do copo. Além disso, notou-se que à medida que aumentamos o valor de $dist1$, são necessários $weight1$ menores para que a imagem final apresente pouco ruído tanto na borda, quanto em sua região central.

7 Etapas Seguintes

- Implementação de *spline cúbico*, com o objetivo de suavizar a atuação da função peso em regiões específicas da imagem.
- Implementação de *curvas de Bézier*.

Referências

- [1] A. Allers, F. Santosa, Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography, *Inverse Problems* 7 , pp. 515-533, 1991.
- [2] D. Barber, B. Brown, Applied Potential Tomography, *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 17, pp.723-733. 1984.
- [3] C. F. Gerald, P. O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 5 ed., pp. 210-233, 1994.