

# 1 Segunda Lista de Exercícios de MAC 315 - Segundo semestre de 2003

## 1.1 Exercícios “teóricos”

**Convenções:** Se  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , então  $\mathbf{a}^i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$ ;  
 $X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ;  
 $V(X)$  é o conjunto dos vértices de  $X$ ;  
 $I(\mathbf{x}) := \{i : x_i \neq 0\}$ , para qualquer  $\mathbf{x} \in X$ ;  
 $H_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0} \text{ e } I(\mathbf{h}) \subseteq I(\mathbf{x})\}$ , para qualquer  $\mathbf{x} \in X$ .

**Exercício 1.1** Sejam  $\mathbf{x} \in X$  (convexo),  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  e  $S_{\mathbf{c},\alpha} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}'\mathbf{x} \leq \alpha\}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Prove que  $X \cap S_{\mathbf{c},\alpha}$  é convexo, ou apresente um contra-exemplo (no caso de não ser).

**Exercício 1.2** Usando apenas a definição de vértices, encontre os vértices dos poliedros  $X_1$  e  $X_2$ , deixando anotado os argumentos utilizados:  $X_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  e  $X_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1 \text{ e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ .

**Exercício 1.3** Prove pela definição que os pontos encontrados no exercício 1.2 são de fato vértices (não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).

**Exercício 1.4** Mostre que  $X_2 = [V(X_2)] + C$ , onde  $X_2$  definido no exercício 1.2 e  $C := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3 : h_1 + h_2 = 0 \text{ e } \mathbf{h} \geq \mathbf{0}\}$  (não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).

**Exercício 1.5** Complete a tabela abaixo dizendo se o conjunto gerado mantém a propriedade inicial, demonstrando o resultado ou apresentando contra-exemplo (se não couber na tabela, coloque demonstração noutra folha).

	prop. inicial $A$ e $B$	$C := A \cup B$	$C := A \cap B$	$C := A + B$	$C := \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}_+$
1.	subespaço				
2.	convexo				
3.	cone				
4.	cone conv.				

**Exercício 1.6** Mostre que no lema 2.2, se  $\mathbf{x} \in V(X)$ , então  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  (use apenas as convenções acima e o lema 2.1).

**Exercício 1.7** Faça o exercício 2.9: prove que

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \text{ e } I(\mathbf{h}) \subseteq I(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists \bar{\lambda} > 0 \text{ tal que :} \\ i) (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \bar{\lambda}\mathbf{h}, \mathbf{x} - \bar{\lambda}\mathbf{h}) \in X \times X \\ ii) I(\mathbf{y}) \subseteq I(\mathbf{x}), \quad I(\mathbf{z}) \subseteq I(\mathbf{x}) \text{ e} \\ \quad \#I(\mathbf{x}) > \min\{\#I(\mathbf{y}), \#I(\mathbf{z})\}. \end{array} \right.$$

**Exercício 1.8** Faça o exercício 2.11: prove que  $H_x$  é um subespaço linear e portanto um cone convexo.

**Exercício 1.9** Usando os resultados das seções 2.4 e 2.5, faça o exercício 2.15: prove que

- (i)  $C \equiv \{\mathbf{0}\} \implies X$  limitado
- (ii)  $X$  limitado não vazio  $\implies C \equiv \{\mathbf{0}\}$
- (iii)  $X$  limitado  $\not\Rightarrow C \equiv \{\mathbf{0}\}$

**Exercício 1.10** Coloque na forma canônica os seguintes poliedros (mostre cada passo da transformação):

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{llll} \max & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ \text{s. a.} & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \leq 8 \\ & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \geq 4 \\ & & & & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{llll} \max & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ \text{s. a.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \geq 2 \\ & & & (x_1; \quad x_2) & \geq & \mathbf{0} \\ & & & & & x_3 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

## 1.2 Exercícios “práticos”

A partir do exemplo Scilab de enumeração explícita, disponível no endereço

<http://www.ime.usp.br/~leo/scilab/enumeracao-explicita.sci>:

**Exercício 1.11** Resolva os problemas 1 e 2 do exercício 1.10, encontre o vértice ótimo e seu valor ótimo, se existir.

Escreva num arquivo os dados que definem o poliedro.

**Exercício 1.12** Para os dois poliedros considerados no exercício anterior, se a resposta foi vértice ótimo (portanto limitado), mostre que de fato  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}'\mathbf{x}$  é o valor ótimo obtido pelo Scilab.