

1 Lista de Exercícios de MAC 315 - Segundo semestre de 2004 [09/09/2004]

Leônidas de Oliveira Brandão

Exercício 1.1 *Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente, $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times t}$, \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^n . Prove que:*

- (a) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$;
- (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$;
- (c) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$;
- (d) $(\mathbf{Ax})'\mathbf{y} = \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{y})$ ($\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}'\mathbf{y} \rangle$).

Exercício 1.2 *Prove a desigualdade de Cauchy-Schwartz: $|\mathbf{a}'\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, para todo $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Dica: Note que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|^2 \geq 0$ e pode examinado como um polinômio em λ .

Exercício 1.3 *Sejam $B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 \leq r^2\}$, $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)' = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ e $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}'\mathbf{x} \leq r\sqrt{n}\}$. Prove que $B \subset H$ (use desenho no \mathbb{R}^2 para ilustrar sua prova).*

Exercício 1.4 *Prove que a união de convexos não necessariamente é convexo.*

Exercício 1.5 *Prove que o interior de um convexo é convexo (propriedade 7 do capítulo 1).*

Exercício 1.6 *Se A é convexo fechado com interior não vazio, então A coincide com o fecho de seu interior (propriedade 8 do capítulo 1). Apresente exemplos:*

- de conjunto sem a hipótese de convexidade, que não resulte na propriedade acima;
- de conjunto sem a hipótese de interior não vazio que não resulte na propriedade acima.