Convenções: Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $\boldsymbol{a}^i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$;
$X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\ \}$;
$V(X)$ é o conjunto dos vértice de X;
$I(\boldsymbol{x}) := \{i : x_i \neq 0\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$;
$H_x := \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{h} = \mathbb{0} \text{ e } I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x})\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$.

Exercício 1 *Sejam* $\boldsymbol{x} \in X$ *(convexo),* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ *e* $S_{\mathbf{c},\alpha} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leqq \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$*. Prove que* $X \bigcap S_{\mathbf{c},\alpha}$ *é convexo.*

Exercício 2 *Usando apenas a definição de vértices, encontre os vértices dos poliedros* X_1 *e* X_2*, deixando anotado os argumentos utilizados:* $X_1 := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\}$ *e* $X_2 := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1 \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\}$.

Exercício 3 *Prove pela definição que os pontos encontrados no exercício 2 são de fato vértices (não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).*

Exercício 4 *Mostre que* $X_2 = [V(X_2)] + C$*, onde* X_2 *definido no exercício 2 e* $C := \{\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^3 : h_1 + h_2 = 0 \text{ e } \boldsymbol{h} \geqq \mathbb{0}\}$ *(não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).*

Exercício 5 *Complete a tabela abaixo dizendo se o conjunto gerado mantém a propriedade inicial, demonstrando o resultado ou apresentando contra-exemplo (se não couber na tabela, coloque demonstração noutra folha).*

	prop. inicial *A e B*	$C := A \bigcup B$	$C := A \bigcap B$	$C := A + B$	$C := \lambda A,\ \lambda\in\mathbb{R}_+$
1.	*subespaço*				
2.	*convexo*				
3.	*cone*				
4.	*cone conv.*				

Exercício 6 *Mostre que no fato* 2.2, *se* $\boldsymbol{x} \in V(X)$, *então* $\boldsymbol{h} = \mathbb{0}$ *(obrigatório usar apenas as convenções acima e o fato* 2.1*).*

Exercício 7 *Faça o exercício* 2.9*: prove que*

$$\left.\begin{array}{r} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} \in X, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{h} = 0 \\ \boldsymbol{h} \neq \mathbb{0} \text{ e } I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \exists \overline{\lambda} > 0 \textit{ tal que}: \\ i)\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \overline{\lambda}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} - \overline{\lambda}\boldsymbol{h}) \in X \times X \\ ii)\ I(\boldsymbol{y}) \subseteq I(\boldsymbol{x}),\ I(\boldsymbol{z}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \text{ e} \\ \quad \#I(\boldsymbol{x}) > \min\{\#I(\boldsymbol{y}), \#I(\boldsymbol{z})\}. \end{array}\right.$$

Exercício 8 *Faça o exercício* 2.11*: prove que* H_x *é um subespaço linear e portanto um cone convexo.*

Exercício 9 *Usando os resultados das seções* 2.4 *e* 2.5*, faça o exercício* 2.15*: prove que*

(i) $C \equiv \{\mathbb{0}\} \implies X$ *limitado*

(ii) X *limitado não vazio* $\implies C \equiv \{\mathbb{0}\}$

(iii) X *limitado* $\not\Longleftarrow C \equiv \{\mathbb{0}\}$

Exercício 10 *Considere os poliedros*

$$X_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqq 0 \text{ e } x_1 + 2x_2 \leqq 4\}$$
$$X_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x_1 \leqq 1\}.$$

(1) *Transcreva ambos os poliedros para a forma canônica* $\overline{X}_1$ *e* $\overline{X}_2$ *(deixe claro porque vale a equivalência);*

(2) *Usando o resultado de caracterização de vértices, teorema* 2.2*, determine os vértices de* $\overline{X}_1$ *e* $\overline{X}_2$*;*

(3) *Encontre os pontos correspondentes, em* X_1 *e* X_2*, a cada vértice de* $V(\overline{X}_1)$ *e* $V(\overline{X}_2)$*, provando que estão nos poliedros originais, e indicando se são ou não vértices.*