1 Exercícios sobre Dualidade - MAC 315 - Segundo semestre de 2004

Leônidas de Oliveira Brandão

Convenções: $X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\}$
(PLC) $\equiv \langle$ encontrar o $\boldsymbol{x}$ em X que maximiza $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ $\rangle$;
Fixado $B \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $N = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$;
$\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{A}_B^{-1'}\boldsymbol{c}_B$;
$\boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda}$

Exercício 1 *Dado o problema:*

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcrcr} min & 2x_1 & + & 15x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & & \\ s.a. & x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geqq & 2 \\ & -2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leqq & -3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geqq & 0. \end{array}\right.$$

(a) *Deduza o dual utilizando a regra de jogo primal-dual de dois jogadores;*

(a) *Escreva o dual utilizando a forma canônica (reduzindo ao PLC e depois simplificando);*

(b) *Apresente o teorema fraco de dualidade para este caso;*

(c) *Resolva o dual geometricamente;*

(d) *Apresente um par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ viável primal-dual e verifique que vale o teorema fraco de dualidade.*

Exercício 2 *Considere o problema:*

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \text{min} & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \textit{tal que} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{l} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{u} \end{array}\right.$$

onde $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{u}$ tem componentes finitas e $\boldsymbol{l} \leqq \boldsymbol{u}$.

(a) *Escreva o dual.*

(b) *Mostre que o dual é sempre viável.*

(c) *Se o primal possui um ponto viável o que podemos afirmar?*

(d) *Supondo que $l_1 > u_1$, encontre uma semi-reta de ilimitação para o problema dual.*

Exercício 3 *Escreva o dual dos seguintes PL's desenvolvendo via jogo de dois jogadores:*

$$a)\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} max & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leqq & 8 \\ & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geqq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geqq & 4 \\ & & & & & x & \geqq & 0 \end{array}\right.$$

$$b)\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} max & -3x_1 & + & 4x_2 & & & & \\ s.a. & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leqq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \geqq & 4 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & & & & x & \geqq & 0 \end{array}\right.$$

$$
c)\begin{cases}
max & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
s.a. & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leqq & 6\\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geqq & 2\\
 & x_1, & & x_2 & & & \geqq & 0\\
 & & & & & x_3 & \in & \Re
\end{cases}
$$

Exercício 4 *Dados os PL's abaixo e os pontos indicados para cada um deles, verifique o que folgas complementares podem afirmar a respeito desses pontos:*

$$
a)\begin{cases}
max & x_1 & + & 2x_2 & & & & & & \\
s.a. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 4\\
 & 10x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 20\\
 & & & & & & & x & \geqq & 0
\end{cases}
$$

e o ponto $\boldsymbol{x} = (2,\ 0,\ 2,\ 0)^t$.

$$
b)\begin{cases}
max & x_1 & + & x_2 & & & & \\
s.a. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\\
 & -x_1 & & & + & x_3 & \leqq & 0\\
 & & & & & x & \geqq & 0
\end{cases}
$$

e o ponto $\boldsymbol{x} = (1/2,\ 0,\ 1/2)^t$

$$
c)\begin{cases}
max & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
s.a. & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0\\
 & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0\\
 & x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & -1\\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geqq & 0
\end{cases}
$$

e o ponto $\boldsymbol{x} = (0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0)^t$.

Exercício 5 *Para um PL da forma* $\min_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, *deduza a condição de otimalidade do Simples para este problema de minimização.*

Exercício 6 *Utiliando os sistemas* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$, *definidos por*

$$
\mathcal{A} := \left\{\boldsymbol{a} \in \mathrm{I\!R}^n : \mathbf{M}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \geqq \mathbb{0}\right\} \quad e \quad \mathcal{B} := \left\{\boldsymbol{b} \in \mathrm{I\!R}^m : \mathbf{M}'\boldsymbol{b} \geqq \mathbb{0}, \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} > 0\right\},
$$

mostre que

(a) $\nexists(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$;

(b) $\nexists\boldsymbol{a} \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \exists\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$