Introdução à Programação Linear
Algoritmo Simplex - versão 2.7.4

Leônidas de Oliveira Brandão
http://www.ime.usp.br/~leo/pl
http://www.matematica.br
11 de janeiro de 2024 16:17

Sumário

Índice Remissivo

Capítulo 4

Introdução ao Algoritmo Simplex

Neste capítulo sistematizaremos os resultados anteriores visando a obtenção de um algoritmo mais eficaz na resolução de problemas lineares. Nosso objetivo é desenvolvermos o primeiro algoritmo genérico de programação linear, introduzido por George B. Dantzig em 1951[1]. Este algoritmo tem pior caso exponencial, porém se comportando muito bem na prática.

Fixados uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, para simplificar a notação adoremos as seguintes convenções:

1. Denotaremos o problema canônico por (PLC): $\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}. \end{array}$

2. Admitiremos sempre que $m \leqq n$ e fixados m elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, representaremos estes pela letra B, muitas vezes como uma lista $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, noutras como um conjunto $B = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Sempre que estiver implicito a existência do conjunto/lista B, definiremos por $N := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ (usando a forma de conjunto).

3. A razão da convenção acima está associada com a matriz $\mathbf{A}_B$ formada pelas colunas indexadas por B, neste caso utilizada como uma lista, pois, por exemplo, a inversa (se existir) de $[\boldsymbol{a}^{j_1}|\boldsymbol{a}^{j_2}|\boldsymbol{a}^{j_3}]$ pode ser diferente da inversa de $[\boldsymbol{a}^{j_2}|\boldsymbol{a}^{j_1}|\boldsymbol{a}^{j_3}]$.

   Já a forma de conjunto é útil quando desejarmos, por exemplo, apenas analisar se $\{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in B}$ é l.i.

   Analogamente definiremos $\boldsymbol{x}_B$ como o vetor do $\mathbb{R}^m$, cuja componente i é x_{j_i}. Da mesma forma, se $N := (l_1, l_2, \ldots, l_{n-m})$, então a i-ésima componente de $\boldsymbol{x}_N$ é x_{l_i}.

4. Fixada a lista B, $B := (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, diremos que:
   - ∘ B é **base** $\iff$ $\{\boldsymbol{a}^j\}_{j\in B}$ é l.i.
   - ∘ B é **base viável** $\iff$ B é base e $\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$.

5. Se B é uma base viável, diremos que cada componente de $\boldsymbol{x}_B$ é uma **variável básica** e cada linha de $\boldsymbol{x}_N$ é uma **variável não básica** ou **variável fora da base**.

   Além disso, da caracterização de vértice por colunas l.i. é fácil ver que, se B é base viável e $\overline{\boldsymbol{x}}$ o vértice associado, então

$$\overline{\boldsymbol{x}}_B := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0} \tag{4.1}$$
$$\overline{\boldsymbol{x}}_N := \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

[1] *Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities*, em Activity Analysis of Production and Allocation, pp. 339-347, John Wiley & Sons, 1951.

e o vértice $\overline{\boldsymbol{x}}$ definido pela equação acima será dito **vértice gerado por** B.

Gostaríamos de resolver o (PLC) e já sabemos que vértices desempenham um papel chave nesta resolução. Além disso:

(1) Para um dado $\boldsymbol{x} \in X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \, \boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\}$, podemos reescrever a identidade $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ separando as colunas de $\mathbf{A}$ segundo $I(\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} x_i \boldsymbol{a}^i + \sum_{i \notin I(\boldsymbol{x})} x_i \boldsymbol{a}^i.$$

Do capítulo anterior, sabemos que,

$$\text{se } \boldsymbol{x} \text{ é vértice de } X, \ \text{ então } \{\boldsymbol{a}^i\}_{i \in I(\boldsymbol{x})} \text{ é l. i.}$$

(2) Por outro lado, também sabemos gerar vértices a partir de bases do $\mathbb{R}^n$ formadas por colunas de $\mathbf{A}$. Dado um conjunto B, para o qual $\{\boldsymbol{a}^i\}_{i \in B}$ é base, podemos verificar se existe um $\boldsymbol{x} \in V(\mathrm{X})$ associado a esta base.

Para isso reordenaremos as colunas de $\mathbf{A}$ e os correspondentes multiplicadores x_i, colocando nas primeiras posições as colunas de B. Assim, seja $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ definido por $\boldsymbol{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$. Deste modo teremos

Lema 4.1 *Se $\{\boldsymbol{a}^i\}_{i \in B}$ é uma base, então qualquer que seja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, vale a equivalência*

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_B \boldsymbol{x}_B + \mathbf{A}_N \boldsymbol{x}_N \iff \boldsymbol{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}_N \boldsymbol{x}_N) = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \boldsymbol{x}_N. \tag{4.3}$$

Lembre que, se colocarmos $\boldsymbol{x}_N := \boldsymbol{0}$ e obtivermos $\boldsymbol{x}_B := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, então teremos $\boldsymbol{x} \in V(X)$ (a base será viável).

A partir da caracterização de vértice por colunas l.i. e das definições (4.1) e (4.2), podemos deduzir um primeiro algoritmo (combinatório) para resolver o (PLC).

Algoritmo 4.1 Algoritmo combinatório para seleção do melhor vértice do (PLC)

// Para decidir o melhor vértice e se $X \neq \emptyset$ rode com $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$
// Para decidir se problema ilimitado rode com C^1
// Rodar algoritmo para gerar todas as combinações de n tomados m a m, armazenado em P_B
P_B := { B: B *é lista com m elementos* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *sem repetições* }
$c_{ot} \leftarrow -\infty$
enquanto $P_B \neq \emptyset$
  $B \leftarrow$ *primeiro* (P_B)
  $P_B \leftarrow P_B \backslash B$
  Seja $\overline{\mathbf{A}}$ *tal que* $\overline{\boldsymbol{a}}^i = \boldsymbol{a}^{j_i}$, $j_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
  se $\det(\overline{\mathbf{A}}) \neq 0$ *então*   *//* $\overline{\mathbf{A}}$ *forma base de* $\mathbb{R}^m$
    $\boldsymbol{x}_B \leftarrow \overline{\mathbf{A}}^{-1}\boldsymbol{b}$
    $\boldsymbol{x}_N \leftarrow \boldsymbol{0}$
    se $\boldsymbol{x}_B \geqq \boldsymbol{0}$ *então*   *//* $\boldsymbol{x}$ *é vértice de* X
      se $\boldsymbol{c}_B' \boldsymbol{x}_B > c_{ot}$ *então*
        $c_{ot} \leftarrow \boldsymbol{c}_B' \boldsymbol{x}_B$
        $\boldsymbol{x}_{ot_B} \leftarrow \boldsymbol{x}_B$
        $\boldsymbol{x}_{ot_N} \leftarrow \boldsymbol{0}$
// fim enquanto

Entretanto os resultados expostos nos itens (1) e (2), acima, podem ser aproveitados para derivar um algoritmo mais eficiente que esse.

Usando a equação (4.3) na função objetivo $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, conseguiremos uma identidade envolvendo o valor objetivo de $\boldsymbol{x}$ e de $\overline{\boldsymbol{x}}$ (associado à B),

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}'_N\boldsymbol{x}_N \overset{(4.3)}{=} \boldsymbol{c}'_B(\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}'_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}'_N - \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\boldsymbol{x}_N. \tag{4.4}$$

Se definirmos $\boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B$ e usarmos as equações (4.1) e (4.2), da última identidade vem que

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \overset{(4.4)}{=} \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\gamma}'_N\boldsymbol{x}_N \overset{(4.1)}{=} \boldsymbol{c}'_B\overline{\boldsymbol{x}}_B + \boldsymbol{\gamma}'_N\boldsymbol{x}_N \overset{(4.2)}{=} \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\gamma}'_N\boldsymbol{x}_N.$$

No restante deste texto, sempre que usarmos $\boldsymbol{\gamma}_N$ deverá estar implicito a existência de uma base viável B. Note que podemos calcular $\gamma_i := c_i - \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^i = c_i - (\boldsymbol{a}^i)'(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}'_B$ também para $i \in B$, e isso resulta sempre em: $\boldsymbol{\gamma}_B = \mathbf{0}$.

Deste modo, fixada uma base viável B, tomando $\boldsymbol{\gamma}'_N$ definido por $\gamma_i := c_i - \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^i = c_i - (\boldsymbol{a}^i)'(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}'_B$ **(para** $i \in N$**)**, então qualquer que seja $\boldsymbol{x} \in X$, podemos calcular a função objetivo em $\boldsymbol{x}$ pela equação abaixo

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\gamma}'_N\boldsymbol{x}_N. \tag{4.5}$$

Usando esta equação podemos decidir se $\boldsymbol{x}$ é "melhor" ou "pior" que $\overline{\boldsymbol{x}}$:

- $\boldsymbol{x}$ é melhor: $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} > \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}$, se $\boldsymbol{\gamma}'_N\ \boldsymbol{x}_N > \mathbf{0}$;
- $\overline{\boldsymbol{x}}$ é melhor: $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}$, se $\boldsymbol{\gamma}'_N\ \boldsymbol{x}_N \leqq \mathbf{0}$;

Mais ainda, a relação (4.5) nos fornece uma condição suficiente para otimalidade de um vértice qualquer.

Se fixarmos uma base B e denotarmos por $\overline{\boldsymbol{x}}$ o vértice associado, devemos notar que $\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}'_B\overline{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{\gamma}_N$ são constantes. Portanto, acabamos de produzir um **critério de parada** para qualquer algoritmo baseado em vértices: para um dado vértice $\boldsymbol{v} \in V(X)$, com $B := I_{\boldsymbol{v}} = \{i : v_i \neq 0\}$

$$\boldsymbol{\gamma} \leqq \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} \text{ é ótimo.}$$

Lema 4.2 *Se* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *é o vértice gerado por* B*, com* $\boldsymbol{\gamma}_N \leqq \mathbf{0}$*, então* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *é uma solução ótima do (PLC).*

Demonstração Trivial a partir dos resultados anteriores. ■

Deste modo, sobra a questão: o que fazer quando $\boldsymbol{\gamma}_N \nleqq \mathbf{0}$?
Iremos analisar separadamente $\boldsymbol{\gamma}_N \nleqq \mathbf{0}$ em dois casos:

1. $\gamma_k > 0$ e $\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \leqq \mathbf{0}$; e
2. $\gamma_k > 0$ e $\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \nleqq \mathbf{0}$.

O primeiro caso produz um nova condição de parada, desta vez detectando ilimitação, enquanto o segundo terá desdobramentos a serem explorados nas próxima subseção.

Para algum $k \in N$, definiremos $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k$.

Lema 4.3 *Se* $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ *é uma base viável, para a qual* $\langle \gamma_k > 0$ *e* $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \leqq \mathbf{0}\rangle$, *então o (PLC) é ilimitado e* $\boldsymbol{h}$, *definido por*[2] $h_i := \begin{cases} -\pi_{j_l}, & i = j_l \in B \\ 1, & i = k \\ 0, & i \notin B \cup \{k\} \ (\equiv i \in N \setminus \{k\}) \end{cases}$, *é uma direção de ilimitação.*

Demonstração Seja $\boldsymbol{v}$ o vértice gerado por $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ e notemos que $\boldsymbol{h} = \sum_{i \in B} h_i \boldsymbol{e}^i + \sum_{j \in N} h_j \boldsymbol{e}^j = -\sum_{i=1}^{m} \pi_i \boldsymbol{e}^{j_i} + \boldsymbol{e}^s$ (com $k = j_s$, ou seja, coluna $\boldsymbol{a}^k$ está na posição s de N). Mostraremos que o vetor $\boldsymbol{h}$, acima definido é uma direção de ilimitação, provando que: $\boldsymbol{x}_\lambda := \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{h} \in X$ $(\forall \lambda \geqq 0)$ e que $\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_\lambda = +\infty$. De fato:

$$\boldsymbol{x}_\lambda \geqq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{A}\boldsymbol{x}_\lambda = \mathbf{A}\boldsymbol{v} + \lambda \mathbf{A}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} + \lambda(\mathbf{A}_B \boldsymbol{h}_B + \mathbf{A}_N \boldsymbol{h}_N) = \boldsymbol{b} + \lambda(-\mathbf{A}_B \boldsymbol{\pi} + \mathbf{A}_N \boldsymbol{e}^s) = \boldsymbol{b} + \lambda(-\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_B \boldsymbol{a}^k + \boldsymbol{a}^k) = \boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{c}'\boldsymbol{h} \overset{\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k}{=} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{v} + \lambda(-\boldsymbol{c}'_B \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{c}'_N \boldsymbol{h}_N) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{v} + \lambda(-\boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k + c_k) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{v} + \lambda \gamma_k \underset{\lambda \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \blacksquare$$

Quanto ao segundo caso, $\gamma_k > 0$ e $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \nleqq \mathbf{0}$, podem ocorrer dois casos: existir um vértice "melhor" que $\boldsymbol{v}$ ou existir outra base para o mesmo vértice (neste caso é um vértice degenerado). A ocorrência deste último caso não implica necessariamente $\boldsymbol{v}$ não ser ótimo, conforme pode ser observado no exercício abaixo.

Exercício 4.1 *Sejam* $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $\overline{\boldsymbol{x}} := (0; 2; 0; 0)$.

1. *prove (pela definição!) que* $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ *(nesse caso a base associada* B *seria* $(1, 2)$, $(2, 3)$ *ou* $(2, 4)$*);*
2. *construa* $\boldsymbol{c}$, *de modo que:* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *é vértice ótimo com* $\boldsymbol{\gamma}_N \leqq \mathbf{0}$;
3. *construa* $\boldsymbol{c}$, *de modo que:* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *é vértice ótimo com* $\boldsymbol{\gamma}_N \nleqq \mathbf{0}$;
4. *(PLC) ilimitado, com* $\boldsymbol{\gamma}_N \geqq \mathbf{0}$.

Tente justificar os itens 2 *a* 4 *(quem é* $\boldsymbol{\gamma}_N$ *e por que a solução é ótima ou o problema é ilimitado); note que* $\boldsymbol{\gamma}_N \nleqq \mathbf{0}$ *ou* $\boldsymbol{\gamma}_N \ngeqq \mathbf{0}$ *implica que* $\boldsymbol{\gamma}_N \neq \mathbf{0}$.

No caso 2, $\langle\ k \in N,\ \gamma_k > 0$ e $\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \nleqq \mathbf{0}\ \rangle$, a equação (4.5) dá uma pista sobre como melhorar a função objetivo: se encontrarmos um novo ponto viável para o qual $\overline{x}_k > 0$ e $\overline{x}_i = 0$, para $i \in N \setminus \{k\}$, então o valor objetivo deste será maior que o do vértice gerado por B. Isso será examinado na próxima subseção.

4.1 Troca de bases viáveis

Nesta seção analisaremos o caso 2 apontado no quadro anterior. Sendo $\boldsymbol{x}$ o vértice gerado pela base viável $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, se

- $0 < \gamma_k = c_k - \boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k$, $k \neq j_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, e
- $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \nleqq \mathbf{0}$,

gostaríamos de obter um novo ponto viável $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$, preferivelmente vértice, de tal forma que $\overline{\overline{x}}_k > 0$ e $\overline{\overline{x}}_i = 0$, para $i \in N \setminus \{k\}$. Com um tal procedimento poderemos melhorar "substancialmente" o algoritmo 4.1, nunca enumerando um vértice "pior" (menor valor objetivo) que o anterior.

[2] Observe que $\boldsymbol{a}^{j_i}$ é a i-ésima coluna da lista B.

Lema 4.4 *Sejam* $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}\in X$*,* $B=(i_1,i_2,\ldots,i_m)$ *uma base viável,* $k=j_s$ *em* $N=(j_1,j_2,\ldots,j_{n-m})$ *e* $\boldsymbol{x}$ *o vértice gerado por* B*.*

Se $\langle \gamma_k > 0$ *e* $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N = \overline{\overline{x}}_k \boldsymbol{e}^s \geqq \boldsymbol{0}\rangle$[3] *então* $\boldsymbol{c}'\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \geqq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$*.*

Demonstração Como B gera $\boldsymbol{x}\in V(X)$, segue que $\boldsymbol{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ e assim

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}'_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad (\star)$$

Além disso, da definição de $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$,

$$\begin{array}{l} \overline{\overline{x}}_k \geqq 0, \\ \overline{\overline{x}}_j = 0, \quad j\in N\setminus\{k\}, \end{array} \qquad (\star\star)$$

portanto, usando a equação (4.4) para separar $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ segundo os índices em B, segue que

$$\boldsymbol{c}'\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\gamma}'_N\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N \overset{(\star)}{=} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}'_N\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N \overset{(\star\star)}{=} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \gamma_k\overline{\overline{x}}_k \geqq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x},$$

concluindo a demonstração. ∎

Devemos notar que um mesmo vértice degenerado[4] pode ter mais de uma base garadora, e como a condição suficiente de otimalidade depende apenas da base ($\boldsymbol{\gamma}_N = \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B \leqq \boldsymbol{0}$). Ou seja, é possível existir um vértice ótimo degerado que não satisfaça esta condição sob determinada base enquanto sob outra base a condição se verifique. O resultado abaixo mostra em que circunstância ocorre esta múltipla representação: quando o vértice for degenerado (componentes nulas na base).

Lema 4.5 *Se* $I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ *é tal que* $\langle\{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in I}$ *é l.i. e* $\boldsymbol{b}\in C(\,[\{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in I}]\,)\rangle$*,*
então para toda base B*, tal que* $I\subseteq B$*, tem-se que* $\langle\forall\boldsymbol{x}:\mathbf{A}_B\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{b}\Rightarrow x_i=0,\forall i\notin I\rangle$*.*

Demonstração Como $\boldsymbol{b}\in C(\,[\{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in I}]\,)$, existe $\overline{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathbb{R}^n$ para o qual

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i\boldsymbol{a}^i = \sum_{i\in I}\overline{\alpha}_i\boldsymbol{a}^i + \sum_{i\notin I}\overline{\alpha}_i\boldsymbol{a}^i = \sum_{i\in I}\overline{\alpha}_i\boldsymbol{a}^i, \qquad (\star)$$

notando que, para $i\notin I$, $\overline{\alpha}_i$ não tem qualquer relevância na soma, pois, $\overline{\alpha}_i = 0, \forall i\notin I$.

Tome agora uma base qualquer B (não necessariamente viável), contendo I (vem daqui a necessidade da hipótese $\{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in I}$ ser l.i.). Então qualquer que seja $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, para o qual $\boldsymbol{b}=\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$, teremos

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{a}^i = \sum_{i\in I}\alpha_i\boldsymbol{a}^i + \sum_{i\in B\setminus I}\alpha_i\boldsymbol{a}^i + \sum_{i\notin B}\alpha_i\boldsymbol{a}^i \overset{\alpha_i=0,i\notin B}{=} \sum_{i\in I}\alpha_i\boldsymbol{a}^i + \sum_{i\in B\setminus I}\alpha_i\boldsymbol{a}^i = \mathbf{A}_B\boldsymbol{\alpha}_B.$$

Como $\mathbf{A}_B$ é não singular, o sistema $\mathbf{A}_B\boldsymbol{\alpha}_B=\boldsymbol{b}$ tem solução única $\boldsymbol{\alpha}_B=\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$. Entretanto $(\star)$ é uma solução deste sistema, daí segue a tese: $\alpha_i=\overline{\alpha}_i$, $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ e em particular, $\alpha_i=\overline{\alpha}_i\overset{(\star)}{=}0$, $\forall i\notin i$. ∎

Devemos notar que no algoritmo 4.1, o invariante mais importante do laço (*enquanto*) é: B ser base viável. Deste modo, para conseguirmos aprimorar o referido algoritmo de modo a nunca gerar um vértice "pior" (usando a direção $\boldsymbol{h} := \sum_{i\in B}\pi_{j_i}\boldsymbol{e}^i + \boldsymbol{e}^k$ obtida no lema 4.3), devemos responder às seguintes questões:

1. como gerar $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ que seja viável (com as propriedades desejadas: viável e com $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N = \overline{\overline{x}}_k\boldsymbol{e}^s \geqq \boldsymbol{0}$) ?

2. como garantir que $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ seja vértice ?

3. como gerar a primeira base viável ?

[3] Supomos $k\in N$ na posição s ($j_s=k$) e note que a dimensão de $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N=\overline{\overline{x}}_k\boldsymbol{e}^s$ é $n-m$ e deste modo $\boldsymbol{e}^s\in\mathbb{R}^{n-m}$. Isso implica que $\mathbf{A}_N\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N=\sum_{i\in N}\overline{\overline{x}}_i\boldsymbol{a}^i=\overline{\overline{x}}_k\boldsymbol{a}^k$.

[4] $x_i=0$, para algum $i\in B$, B base geradora de $\boldsymbol{x}$.

Nas duas próximas subseções trabalharemos com as seguintes premissas:

> Fixado uma base viável B e denotando por $\boldsymbol{x}$ o vértice gerado por B, lembrando que $\boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B$, suporemos a existência de um índice $k \in N$ tal que

$$\langle 0 < \gamma_k = c_k - \boldsymbol{c}'_B(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{a}_k\rangle \;\text{ e }\; \langle \boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \not\leqq \mathbf{0}\rangle. \tag{4.6}$$

4.1.1 Como garantir viabilidade

Para garantir a viabilidade do novo vetor, $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$, precisamos assegurar que: $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \geqq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{b}$. Entretanto, considerando o lema 4.4, desejamos que alterar apenas a componente k de N, ou seja, para todo $j \in N\setminus\{k\} \Rightarrow \overline{\overline{x}}_j = 0$ e $\overline{\overline{x}}_k \geqq 0$, assim, $\mathbf{A}_N\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N = \overline{\overline{x}}_k\boldsymbol{a}^k$.

Lema 4.6 *Sejam B uma base qualquer*[5]*, $\lambda \geqq 0$, $s \in B$ e $k \in N$ (com $k = j_s$).*
Se $\langle \overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_B := \bar{\boldsymbol{b}} - \lambda\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \lambda\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \geqq \mathbf{0}$ e $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N = \lambda\boldsymbol{e}^s \geqq \mathbf{0}\rangle$, então $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \in X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n /\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$.

Demonstração Por hipótese $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \geqq \mathbf{0}$, resta examinar se $\mathbf{A}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{b}$. Para isso considere $\mathbf{A}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$:

$$\mathbf{A}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{A}_B\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_B + \mathbf{A}_N\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N = \mathbf{A}_B(\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \lambda\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k) + \lambda\mathbf{A}_N\boldsymbol{e}^s = \mathbf{A}_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \lambda\mathbf{A}_B\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k + \lambda\boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{b}.$$

Note que a identidade $\lambda\mathbf{A}_N\boldsymbol{e}^s = \lambda\boldsymbol{a}^k$ é correta devido à hipótese $k = j_s \in N$, logo $\mathbf{A}_N\boldsymbol{e}^s = \sum_{i\in N\setminus\{s\}} 0\boldsymbol{a}^i + \boldsymbol{a}^s$. Portanto, segue a tese $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \in X$. ■

Em função deste lema, para conseguirmos $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ viável basta escolhermos um $\lambda \geqq 0$, tal que, $\lambda\boldsymbol{\pi} \leqq \bar{\boldsymbol{b}}$.

Considerando uma base viável B e sendo $\boldsymbol{x}$ o vértice gerado por esta base, teremos $\boldsymbol{x}_B := \bar{\boldsymbol{b}} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$. Deste modo, para escolher um tal $\lambda \geqq 0$, devemos nos preocupar apenas com os índices dentre $\{i \in B : \pi_i > 0\}$, uma vez que, para todo $i \in B$ tal que $\pi_i \leqq 0$, segue que $\overline{\overline{x}}_i = \bar{b}_i - \lambda\pi_i \geqq \bar{b}_i \geqq 0,\ \forall\lambda \geqq 0$.

Lema 4.7 *Sejam B uma base viável qualquer, $k \in N = (j_1, \ldots, j_i = k, \ldots, j_{n-m})$ tal que $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \not\leqq \mathbf{0}$, $s \in \arg\min\limits_{i\in B:\pi_i>0}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\pi_i}\right\}$ e $\lambda := \frac{\bar{b}_s}{\pi_s}$ $(\geqq 0)$.*
Se $\langle$ $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ é definido por: $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_B := \bar{\boldsymbol{b}} - \lambda\boldsymbol{\pi}$ e $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}_N := \lambda\boldsymbol{e}^{j_s}$ $\rangle$ então $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \in X$.

Demonstração Inicialmente note que existe $s \in B$ com a propriedade desejada, pois estamos supondo $\boldsymbol{\pi} \not\leqq \mathbf{0}$. Usando os mesmos argumentos do lema 4.6, podemos mostrar que $\mathbf{A}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{b}$. Assim, resta mostrarmos que $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \geqq \mathbf{0}$. Analisaremos separadamente os conjuntos: $B_n := \{j_i \in B : \pi_i \leqq 0\}$ e $B_p := \{j_i \in B : \pi_i > 0\}$.

Como $\lambda \geqq 0$, para os índices $j_i \in B_n$, teremos $\overline{\overline{x}}_i = \bar{b}_i - \lambda\pi_i \geqq \bar{b}_i \geqq 0$, e para $j_i \in B_p$, lembrando que $\frac{\bar{b}_s}{\pi_s} \leqq \frac{\bar{b}_j}{\pi_j}$ $(\bar{b}_j \geqq 0, \forall j \in B \Rightarrow \lambda = \frac{\bar{b}_s}{\pi_s} \geqq 0)$, segue que

$$\overline{\overline{x}}_i = \bar{b}_i - \lambda\pi_i = \pi_i(\frac{\bar{b}_i}{\pi_i} - \lambda) = \pi_i(\frac{\bar{b}_i}{\pi_i} - \frac{\bar{b}_s}{\pi_s}) \geqq 0, \quad \text{para todo } j_i \in B_p\ (\pi_i > 0).$$

Portanto, $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} \in X$. ■

Assim, quando tivermos uma base viável B para a qual $\gamma_k > 0$ e $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k \not\leqq \mathbf{0}$, se tomarmos $s \in B$ como no lema acima, obteremos um ponto viável com valor objetivo nunca menor que o vértice gerado pela base B.

[5]Note que B não precisa gerar vértice, por tanto, pode-se considerar um base não viável.

4.1.2 Como garantir base viável

Com a teoria até aqui examinada, sabemos gerar um novo ponto viável a partir de uma base B (que nem precisa ser viável). Entretanto, estamos interessado em construir um algoritmo a partir destes resultados, assim, é necessário que $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ seja não apenas viável, mas também um vértice. Ou seja, associando o vértice $\boldsymbol{x}$ com $\boldsymbol{x}^i$ e $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ com $\boldsymbol{x}^{i+1}$, é necessário que:

B_i base viável	$\boldsymbol{x}^i_{B_i} = \mathbf{A}^{-1}_{B_i}\boldsymbol{b} - \mathbf{A}^{-1}_{B_i}\mathbf{A}_{N_i}\boldsymbol{x}^i_{N_i} = \mathbf{A}^{-1}_{B_i}\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$	$\boldsymbol{x}^i_N = \mathbf{0}$
B_{i+1} base viável	$\boldsymbol{x}^{i+1}_{B_{i+1}} = \mathbf{A}^{-1}_{B_{i+1}}\boldsymbol{b} - \mathbf{A}^{-1}_{B_{i+1}}\mathbf{A}_{N_{i+1}}\boldsymbol{x}^{i+1}_{N_{i+1}} \geqq \mathbf{0}$	$\boldsymbol{x}^{i+1}_{N_{i+1}} = \mathbf{0}$

Portanto, se numa interação i tivermos uma base $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ para a qual $\langle 0 < \gamma_k = c_k - \boldsymbol{c}'_B\mathbf{A}^{-1}_B\boldsymbol{A}_k\rangle$ e $\langle \boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}^{-1}_B\boldsymbol{a}^k \not\leqq \mathbf{0}\rangle$, para aproveitarmos o ponto viável obtido pela atualização derivada no lema 4.6, precisaríamos que o $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ obtido fosse vértice (e consequentemente fosse gerado por uma base $\overline{B}$).

Observando o lema 4.6, notamos que a componente $s \in B$ de $\boldsymbol{x}$ foi "zerada" em $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ e a componente x_k deixou de ser zero em $\overline{\overline{x}}_k$ (na verdade $\overline{\overline{x}}_k > 0 \Leftrightarrow \lambda := \frac{\overline{b}_s}{\pi_s} > 0$). Deste modo, é natural pensar que $\boldsymbol{a}^{j_s}$ deixa a base, sendo substituida pela coluna $\boldsymbol{a}^k$, e assim $\overline{B}$ pode ser definida por

$$\overline{B} := (j'_1, j'_2, \ldots, j'_m), \quad \text{sendo } j'_i := \begin{cases} j_i, & i \neq s \\ k, & i = s \end{cases} \tag{4.7}$$

faça o papel de B_{i+1} na iteração $i+1$.

> Daí surge nova questão: precisamos impor condição adicionais sobre $B_p = \{i \in B : \pi_i > 0\}$ para selecionar um $s \in B_p$ de tal forma que $\overline{B}$ acima definida seja base viável ?

Felizmente, como veremos no lema abaixo, não é necessário qualquer hipótese adicional para garantir que $\overline{B}$, definido pela equação (4.7), seja base viável. Na verdade, o resultado que assegura esta feliz conclusão para nosso futuro algoritmo é um resultado típico de Álgebra Linear, notando que no caso em estudo: $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}^{-1}_B\boldsymbol{a}^k \Leftrightarrow \mathbf{A}_B\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{a}^k$, com $0 \neq \pi_s > 0$.

Lema 4.8 *Sejam $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ uma base (i.e., $\{\boldsymbol{a}^{j_i}\}_{j_i \in B}$ é l.i.) e $k \notin B$.*

Se $\boldsymbol{a}^k = \sum_{j_i \in B} \alpha_i\boldsymbol{a}^{j_i} = \mathbf{A}_B\boldsymbol{\alpha}$, com $\alpha_s \neq 0$ $(s \in B)$, então $\overline{B}$ definido pela equação (4.7) é l.i.

Demonstração Seja $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$, tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\overline{B}}\boldsymbol{\beta} = \sum_{j'_i \in \overline{B}} \beta_i\boldsymbol{a}^{j'_i} = \beta_s\boldsymbol{a}^k + \sum_{j_i \in B \wedge i \neq s} \beta_i\boldsymbol{a}^{j_i} = \beta_s \sum_{j_i \in B} \alpha_i\boldsymbol{a}^{j_i} + \sum_{j_i \in B \wedge i \neq s} \beta_i\boldsymbol{a}^{j_i} \\ &= \beta_s\alpha_s\boldsymbol{a}^{j_s} + \sum_{j_i \in B \wedge i \neq s} (\beta_i + \beta_s\alpha_i)\boldsymbol{a}^{j_i} = \sum_{j_i \in B} \overline{\beta}_i\boldsymbol{a}^{j_i}, \end{aligned}$$

sendo $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ definido por:

$$\overline{\beta}_i := \begin{cases} \beta_i + \beta_s\alpha_i, & i \neq s \\ \beta_s\alpha_s, & i = s \end{cases}. \tag{$\star$}$$

Como $\{\boldsymbol{a}^{j_i}\}_{j_i \in B}$ é l.i., segue que $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$. Além disso, $\alpha_s \neq 0$, por hipótese, e da segunda linha de $(\star)$, teremos $\beta_s = 0$. Assim, da primeira linha, $0 = \beta_i + \beta_s\alpha_i = \beta_i$.

Portanto $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, concluindo daí que $\overline{B}$ é base. ■

Deste lema e da subseção anterior, $\overline{B}$ gerado pela equação (4.7) é uma base viável, o que nos fornece ferramentas para construir um algoritmo baseado na geração de vértice $\boldsymbol{x}^i$ nunca "piores", ou seja: $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^i \leqq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^{i+1}$.

4.1.3 Como gerar a primeira base viável

Os resultados das duas subseções anteriores conseguimos detectar vértices ótimos, semi-retas de ilimitação e, se necessário, atualizar uma base viável para outra nunca pior (i.e., com valor objetivo nunca menor que a base anterior - no caso de degenerescência de vértice pode empatar, mas quando o vértice é não degenerado a valor objetivo é estritamente maior).

Deste modo, o problema ainda não resolvido é:

1. detectar conjunto inviável ($X = \emptyset$);
2. se conjunto viável, encontrar uma primeira base viável.

Para isso usaremos variáveis artificiais para conseguirmos $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Se $\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$, bastaria tomarmos $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{b}$ e considerarmos o sistema $[\mathbf{AI}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$. Entretanto, se para algum i tivessemos $b_i < 0$, ficaríamos com $y_i < 0$!

Deste modo, podemos resolver este problema de dois modos: multiplicar -1 as linhas i, do sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, que tiverem $b_i < 0$; ou usar como coluna de i o vetor $-\boldsymbol{e}^i$. No restante do texto adotaremos a segunda solução.

Assim, dado um problema $(\mathbf{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ na forma canônica, montaremos um problema auxiliar (PLC_0) ((**PLC**) **fase** 0), que resolverá os itens 1 e 2 acima apontados.

Fase 0 do Simplex: detecta inviabilidade ou obtém base inicial

- A partir dos dados originais, definem-se as matrizes

$$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad : \quad \boldsymbol{j}^i := \begin{cases} \boldsymbol{e}^i, & b_i \geqq 0 \\ -\boldsymbol{e}^i, & b_i < 0; \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}|\mathbf{J}] \in \mathbb{R}^{m\times n+m} \quad : \quad \overline{\boldsymbol{a}}^i := \begin{cases} \boldsymbol{a}^i, & i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \boldsymbol{j}^k, & i = n+k \in \{n+1, \ldots, n+m\}; \end{cases} \tag{4.9}$$

- Resolve-se o (PLC_0), (**PLC**) **fase** 0, que procura "zerar" as variáveis artificiais $\boldsymbol{y}$ (busca viabilidade X):

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min \mathbf{1}'\boldsymbol{y} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{J}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\} \equiv (PLC_0) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\max(\mathbf{0}'; -\mathbf{1}')\boldsymbol{z} & \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{z} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

O (PLC_0) da fase 0 é resolvido pelo *Simplex*, deduzido anteriormente, pois:

- Este problema é sempre viável, com $(\mathbf{0}; |\boldsymbol{b}|)$ pertencente ao poliedro estendido (definindo $|\boldsymbol{v}|$ como sendo o vetor cuja i-ésima componente é o módulo de b_i, $v_i := |b_i|$;
- A base viável inicial é composta pelas últimas colunas de $\tilde{\mathbf{A}}$: como $\mathbf{J}$ é uma matriz claramente não singular e com inversa simples ($\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$), então base para o problema estendido é $\tilde{\mathbf{A}}_B := \mathbf{J}$, cuja inversa é $\tilde{\mathbf{A}}_B^{-1} = \mathbf{J}$.

Podemos mostrar que este problema inicial devolve um valor negativo, $v = -y_1 - y_2 - \ldots - y_m < 0$, quando $X = \emptyset$ e 0 quando $X \neq \emptyset$.

Lema 4.9 *Sendo $vo(PLC_0)$ o valor ótimo de (PLC_0), então $vo(PLC_o) \leqq 0$.*

Demonstração O poliedro estendido (do (PLC_0)) é sempre viável, pois $(\mathbf{0}; \tilde{\boldsymbol{y}}) \in PLC_0$, para $\tilde{\boldsymbol{y}} := |\boldsymbol{b}|$ (i.é., $\tilde{y}_i := |b_i|$). Além disso, o valor objetivo desse ponto é $\|\boldsymbol{b}\|_1$, pois $(\mathbf{0}; -\mathbf{1})'(\mathbf{0}; \tilde{\boldsymbol{y}}) = -\sum_{i=1}^m |b_i| = -\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_1 \leqq 0$. Portanto, o máximo é limitado por zero, ou seja, $vo(PLC_0) \leqq 0$. ■

Lema 4.10 $X \neq \emptyset \iff vo(PLC_0) = 0.$

Demonstração ($\Rightarrow$) Como $X \neq \emptyset$, tome $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$ e observe que $(\tilde{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}) \in PLC_0$, cujo valor objetivo é $(\mathbf{0}; -\mathbf{1})'(\tilde{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}) = 0$.
Portanto, $vo(PLC_0) \geqq 0$. Mas do lema 4.9, $vo(PLC_0) \leqq 0$, seguindo daí a tese $vo(PLC_0) = 0$.
($\Leftarrow$) Como $vo(PLC_0) = 0$, deve existir $(\tilde{\boldsymbol{x}}; \tilde{\boldsymbol{y}}) \in PLC_0$ com $0 = (\mathbf{0}; -\mathbf{1})'(\tilde{\boldsymbol{x}}; \tilde{\boldsymbol{y}}) = -\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_1$. Mas da propriedade de norma ($\|\boldsymbol{z}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = 0$), segue que $\tilde{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$.
Desse modo, $(\tilde{\boldsymbol{x}}; \tilde{\boldsymbol{y}}) \geqq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{b} = [\mathbf{A}|\mathbf{J}](\tilde{\boldsymbol{x}}; \tilde{\boldsymbol{y}}) = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \mathbf{J0} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Portanto, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$, seguindo a tese. ■

Se o problema fase 0 retornar $v = 0$, podemos construir uma base viável inicial, tomando

$$B := (i : (\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\boldsymbol{b})_i > 0, i \leqq n).$$

Note que:

1. as componentes de $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ são nulas para $i > n$, i.e., $z_{j+n} = y_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$);
2. se $\#B < m$, será necessário completar a base com colunas de $\mathbf{A}$, neste caso o vértice inicial será degenerado.

Exercício 4.2 *Prove a afirmação* 1 *acima.*

Exercício 4.3 *Mostre o porquê da validade da afirmação* 2 *acima.*

4.2 Algoritmo Simplex

Da discussão anterior poderíamos estabelecer alguma melhoria no algoritmo 4.1 (na página 2):

Algoritmo 4.2 Método Simplex - atualização de base viáveis, enumerando vértices "melhores"

1. *Seja* $B = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ *uma base viável*
   $i \leftarrow 1$
2. *Calcule* $\mathbf{A}_B^{-1}$ *e* $\bar{\boldsymbol{b}} \leftarrow \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$
3. *Defina* $\boldsymbol{x}^i$ *por:* $\boldsymbol{x}_B^i \leftarrow \bar{\boldsymbol{b}}$ *e* $\boldsymbol{x}_N^i \leftarrow \mathbf{0}$
   $\boldsymbol{\lambda} := (\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B$
   $\boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N'\boldsymbol{\lambda}$
4. *Se* $\boldsymbol{\gamma}_N \leqq \mathbf{0}$, *então*
   Pare: $\boxed{\boldsymbol{x}^i := \sum_{j \in B} \bar{b}_j \boldsymbol{e}^j \text{ é vértice ótimo com valor objetivo } \boldsymbol{c}_B'\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}}$
5. *Senão* *Sejam:* $k \in N$ *para o qual* $\gamma_k > 0$ *e* $\boldsymbol{\pi} \leftarrow \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^k$
6. *Se* $\boldsymbol{\pi} \leqq \mathbf{0}$, *então*
   Seja $\boldsymbol{h}$ *definida por* $\boldsymbol{h}_B \leftarrow -\boldsymbol{\pi}$ *e* $\boldsymbol{h}_N \leftarrow \boldsymbol{e}^s$ // *coluna* $\boldsymbol{a}^k$ *na posição* s *de* N, *i.e.,* $k = j_s$
   Pare: $\boxed{\boldsymbol{x}^i + \lambda\boldsymbol{h} := \sum_{j \in B} \bar{b}_j \boldsymbol{e}^j + \lambda\left(\sum_{j \in B} -\pi_j \boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{e}^s\right) \ (\lambda \geqq 0) \text{ semi-reta de ilimitação}}$
7. *Senão* *Sejam* $s \in \arg\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\pi_i} : i \in B \text{ e } \pi_i > 0\right\}$ *e* $\lambda \leftarrow \frac{\bar{b}_s}{\pi_s}$
   Defina $\boldsymbol{x}^{i+1}$ *por:* $\boldsymbol{x}_B^{i+1} \leftarrow \bar{\boldsymbol{b}} - \lambda\boldsymbol{\pi}$ *e* $\boldsymbol{x}_N^{i+1} \leftarrow \lambda\boldsymbol{e}^s$ // *coluna* $k = j_s$
   Sejam $B \leftarrow B - \{s\} + \{k\} \equiv (j_1, \ldots, j_{s-1}, k, j_{s+1}, \ldots, j_m)$ *e* $i \leftarrow i + 1$
   Volte ao passo 2

Algumas observações importantes:

1. Note que o passo 7 é a única condição de finalização do *Simplex* que permite verificação rápida da resposta. Bastaria verificar que $\boldsymbol{x}^i + \lambda \boldsymbol{h} \in X$ e que $\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{x}^i + \lambda \boldsymbol{h}) \to \infty$ (esta última implicação segue do fato de nesta linha ter-se $\gamma_k > 0$ e portanto $\lambda \boldsymbol{c}'\boldsymbol{h} = \lambda(\boldsymbol{c}'_B \boldsymbol{h}_B + \boldsymbol{c}'_N \boldsymbol{h}_N) = \lambda(-\boldsymbol{c}'_B \boldsymbol{\pi} + c_k) = \lambda(-\boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{a}^k + c_k) = \lambda(c_k - \boldsymbol{a}^{k\prime} \mathbf{A}_B^{-1\prime} \boldsymbol{c}_B + c_k) = \lambda(c_k - \boldsymbol{a}^{k\prime} \boldsymbol{\lambda}) = \lambda \gamma_k \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty$).

2. Note que o passo 2 é o mais "caro" computacionalmente e por isso merece maior atenção.

3. Note também que $\boldsymbol{a}^k$ na base B é: $\boldsymbol{a}^k = \mathbf{A}_B \boldsymbol{\pi}$, pois $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{a}^k$

4. Se $\mathbf{P}$ for o produto de matrizes elementares (de pivotações) tal que $\mathbf{P}\mathbf{A}_B = \mathbf{I}$, então
$$[\mathbf{A}_B | \mathbf{A}_N | \mathbf{I}] \xrightarrow{\mathbf{P}} [\mathbf{I} | \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N | \mathbf{A}_B^{-1}] = [\mathbf{I} | \cdots \boldsymbol{\pi} \cdots | \mathbf{A}_B^{-1}]$$

5. Se estendermos a matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ para uma $\tilde{\mathbf{A}}_{m+1\times n+1} := \left[\begin{array}{cc} 1 & -\boldsymbol{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{array}\right]$ e o vetor $\boldsymbol{b}$ para $(0; \boldsymbol{b})'$, teremos
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \implies \left\langle \begin{array}{rl} \max \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}: & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{rl} \max z: & \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle$$

6. Se notarmos que na definição de $\boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N (\mathbf{A}_B^{-1})' \boldsymbol{c}_B$, podemos também definir $\boldsymbol{\gamma}_B := \boldsymbol{c}_B - \mathbf{A}'_B (\mathbf{A}_B^{-1})' \boldsymbol{c}_B = \mathbf{0}$. Deste modo, podemos pensar em atualizar $\boldsymbol{\gamma}_N$ também através da pivotação. Para isso denotando novamente $\boldsymbol{\lambda} := (\mathbf{A}_B^{-1})' \boldsymbol{c}_B$, fica fácil obter a inversa de $\tilde{\mathbf{A}}_B$ a partir de $\mathbf{A}_B^{-1}$ e de $\boldsymbol{\lambda}$:
$$\tilde{\mathbf{A}}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\lambda}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_B^{-1} \end{bmatrix} \iff \tilde{\mathbf{A}}_B \tilde{\mathbf{A}}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{m+1\times m+1}. \tag{4.11}$$
Com a matriz estendida podemos obter todas as variáveis do sistema através do produto abaixo,
$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\lambda}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_B^{-1} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -\boldsymbol{c}'_B & -\boldsymbol{c}'_N & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N & \boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -\boldsymbol{c}'_B + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{A}_B & -\boldsymbol{c}'_N + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{A}_N & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_B & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N & \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \mathbf{0}' & -\boldsymbol{\gamma}' & \boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N & \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right].$$

7. Será que o procedimento acima, que denominamos apressadamente de algoritmo, efetivamente pára ?

Nosso objetivo atual é conseguir transformar $\mathbf{P}$ em uma matriz $\mathbf{P}'$ para a qual: $\mathbf{P}'\mathbf{A}_{\overline{B}} = \mathbf{I}$. Para isso basta construir uma matriz elementar que pivote o vetor coluna $\boldsymbol{\pi}$, usando como pivô $\pi_s > 0$. A razão disso é esquematizada abaixo:

$$\text{se } \overline{\mathbf{P}}[\boldsymbol{e}^1 | \cdots | \boldsymbol{e}^{s-1} | \boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{e}^{s+1} | \cdots | \boldsymbol{e}^m] = [\boldsymbol{e}^1 | \cdots | \boldsymbol{e}^{s-1} | \boldsymbol{e}^s | \boldsymbol{e}^{s+1} | \cdots | \boldsymbol{e}^m] = \mathbf{I}, \text{ então } [\mathbf{A}_{\overline{B}} | \mathbf{A}_{\overline{N}} | \mathbf{I}] \xrightarrow{\overline{\mathbf{P}}} [\mathbf{I} | \mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\overline{N}} | \mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1}]$$

Deste modo, para obter $\mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1}$ a partir de $\mathbf{A}_B^{-1}$ basta fazer uma pivotação na sua coluna k, segundo o vetor $\boldsymbol{\pi}$ como pivô π_s. Devemos "pivotar" a coluna $\boldsymbol{\pi}$ de modo a produzir a $\boldsymbol{e}^s$: $P_s(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{e}^s \implies P_s(\mathbf{A}_B^{-1}) = \mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1}$

Uma vez conhecido um bom método de atualização das inversas de bases, agora em ordem $o(n^2)$, devemos nos preocupar com a questão 4 acima: será que o procedimento anterior é finito ?

Esta questão será respondida com o exemplo 4.4. No próximo exemplo examinaremos uma atualização de inversa a partir de uma pivotação.

Exemplo 4.1 *Para a matriz* $\mathbf{A}$ *abaixo definida e a inversa da base* $B = (1, 2, 4)$, *obter a inversa de* $\overline{B} = (1, 3, 4)$, *isto é, entra a coluna* 3 *e sai a coluna* 2. *Logo o pivô deve ser o elemento* $a_{2,4}$.
$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 9 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{então:}\ \mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & 9 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{a}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Pivotando a inversa segundo o elemento $a_{3,2}$, *obteremos*

$$\mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \boxed{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{l_1 \leftarrow l_1 - l_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{l_2 \leftarrow 2l_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] = \mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1}.$$

Apenas para conferir o resultado da pivotação, podemos testar o produto

$$\mathbf{A}_{\overline{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 9 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.4 *Considere o seguinte (PLC)*

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 - 25x_5 \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_5 + \quad + x_7 = 0 \\ & 2x_4 + x_8 = 1 \\ & x_i \geqq 0 \quad , \quad i \in \{1, 2, \ldots, 8\} \end{array}$$

Para este problema, implemente o procedimento[6] *4.2, usando como base inicial* $B_0 := (6, 7, 8)$*, usando como sequência de entrada/saída na base a tabela abaixo. Se as contas estiverem corretas, deverão obter: todos os* $\gamma_k > 0$ *e* $\frac{\bar{b}_s}{\pi_s} = \min_{i \in B \wedge \pi_i > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\pi_i} \right\}$.

Iteração i	*Entra na base (k)*	*Sai da base (s)*	*Base* B_i
0			$B_0 = (6, 7, 8)$
1	x_1	x_6	$B_1 = (1, 7, 8)$
2	x_2	x_7	$B_2 = (1, 2, 8)$
3	x_3	x_1	$B_3 = (3, 2, 8)$
4	x_4	x_2	$B_4 = (3, 4, 8)$
5	x_6	x_3	$B_5 = (6, 4, 8)$
6	x_7	x_4	$B_6 = (6, 7, 8)$

Para evitar o problema ilustrado no exercício acima (**ciclagem**), uma regra bastante simples é selecionar sempre os primeiros índices:

Regra de Bland[7] - entrada: selecione o menor índice k, tal que $\gamma_k > 0$
saída: selecione o menor índice s, tal que $\min\limits_{i \in B \wedge \pi_i > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\pi_i} \right\}$.

4.2.1 Simplex Tabular

Da discussão anterior podemos enunciar um algoritmo "manual" para resolver problemas canônicos, algoritmo este denominado **Simplex Tabular**.

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{ll} \max & z \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right.$$

[6] Sugiro usar o Scilab a partir do exemplo http://www.ime.usp.br/~leo/scilab/pivoteamento1.sci.

[7] Para ver uma demonstração de que esta regra evita ciclagem, consulte a seção 5.3 de *Programação Linear: um primeiro curso*, de Carlos Humes Jr. e Ana Flora P. de Castro Humes, apresentado como mini-curso no *IX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, realizado em Brasília em agosto de 1986.

Deste modo, se trocarmos a matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ pela sua extensão $\tilde{\mathbf{A}}_{m+1\times n+1} := \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\boldsymbol{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{array}\right]$ e o vetor $\boldsymbol{b}$ por $\left[\begin{array}{c} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{array}\right]$, podemos estender o conceito da equivalência

$$\mathbf{A}_B^{-1} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \ \equiv \mathbf{A}_B^{-1} \times ([\mathbf{A}_B|\mathbf{A}_N] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{array}\right] = \boldsymbol{b}) \ \equiv [\mathbf{I}|\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{array}\right] = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

pela seguinte equivalência,

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & -\boldsymbol{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{array}\right] \times \left(\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -\boldsymbol{c}_B{}' & -\boldsymbol{c}_N{}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z \\ \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{array}\right] \right) \equiv \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -\boldsymbol{\gamma}_B{}' & -\boldsymbol{\gamma}_N{}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z \\ \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{c}_B`\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{c}`\overline{\boldsymbol{x}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{x}}_B \end{array}\right]$$

uma vez que $\tilde{\mathbf{A}}_B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{\lambda}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_B^{-1} \end{array}\right]$, lembrando que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}_B^{-1}{}'\boldsymbol{b}$ e que $\overline{\boldsymbol{x}}$ é o vértice associado à base B..
É recomendável verificar que $\tilde{\mathbf{A}}_B^{-1}$ é de fato a inversa de $\tilde{\mathbf{A}}_B$.
Dada uma base viável inicial[8] B, deve-se montar o primeiro **tableau**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & z \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{multiplicada (pela esquerda) por } \tilde{\mathbf{A}}, \\ \longrightarrow \\ \text{dada pela equação (4.11), resulta em} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_n & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B'\bar{\boldsymbol{b}} \\ \hline \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{1,2} & \cdots & \overline{a}_{1,n} & \bar{b}_1 \\ \overline{a}_{2,1} & \overline{a}_{2,2} & \cdots & \overline{a}_{2,n} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a}_{m,1} & \overline{a}_{m,2} & \cdots & \overline{a}_{m,n} & \bar{b}_m \end{array}\right]$$

sendo $\overline{a}_{ij} := (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A})_{ij}$, e lembrando que $\bar{\boldsymbol{b}} := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{\lambda}' := \boldsymbol{c}_B'\mathbf{A}_B^{-1}$.

Para ilustrarmos o Simplex Tabular, consideraremos um caso simples (que pode ser resolvido graficamente).

Exemplo 4.2 *Considere o problema linear* $\max\{-x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \geqq 2 \wedge x_2 \leqq 2 \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$. *É fácil ver que a solução ótima deste problema é dada pelo vértice* $\overline{\boldsymbol{x}} = (0, 2)'$.
Colocando na forma canônica e usando $B = (1, 4)$ *como base viável inicial (por ser mais simples) obteremos,*

$$\left.\begin{array}{l} \max -x_1 + x_2 \\ \quad x_1 \ + x_2 - x_3 \qquad = 2 \\ \qquad\quad x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ \quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \geqq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \mathbf{A}_B = \mathbf{I} = \mathbf{A}_B^{-1} \ e \ \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}_B'\mathbf{A}_B^{-1} = (c_1, c_4) = (-1, 0).$$

Deste modo $\boldsymbol{\gamma}_N' = \boldsymbol{c}_N' - \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{A}_N = (c_2, c_3) - (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1) = (1, 0) - (-1, 1) = (2, -1)$, *e o "tableau" inicial fica na forma*

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}^1 = (\underline{2}, 0, 0, \underline{2}) & & \boldsymbol{x}^2 = (0, \underline{2}, 0, \underline{0}) & & \boldsymbol{x}^3 = (0, \underline{2}, \underline{0}, 0) \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \textit{entra } x_2 \\ \textit{sai } x_1 \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \textit{entra } x_3 \\ \textit{sai } x_4 \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

O algoritmo parou na última configuração em razão obtermos $\boldsymbol{\gamma}_N = (-1, -1)' \leqq \mathbf{0}$. *Note que a segunda iteração trocou a base de um mesmo vértice e finalmente detectando otimalidade.*

Mais ainda, como consideramos o mesmo (PLC) do exercício 4.1, esta é a resposta ao seu item 3: na iteração 2, apesar do vértice $\boldsymbol{x} = (0, 2, 0, 0)$ *ser ótimo, em função de usarmos a base* $B = (2, 4)$ *resulta* $\boldsymbol{\gamma}_N = (-2, 1)' \not\leqq \mathbf{0}$, *enquanto que para a base* $B = (2, 3)$ *temos* $\boldsymbol{\gamma}_N = (-1, -1)' \leqq \mathbf{0}$.

[8] É sempre possível introduzir m variáveis artificiais para obter esta base.

Exemplo 4.3 *Considerando os dados do (PLC) abaixo, e conhecendo a base B numa iteração do Simplex, construa o "tableau" desta iteração e finalize o algoritmo.*

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} := (0,0,1,0,0)', \text{ e sabendo que } \mathbf{A}^{-1}_{(2,4,5)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}:$$

1. *construa o "tableau" do Simplex sabendo que* $B=(2,4,5)$
2. *resolva o problema pelo Simplex Tabular a partir do "tableau" obtido em* 1 *acima.*

Resolução

1. Sabendo que a base inicial é $B=(2,4,5)$, as variáveis do *Simplex* são: $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{A}_B^{-1'}\boldsymbol{c}_B = \mathbf{A}_B^{-1'}(0;0;0) = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\gamma}_N := \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}_N = (0;1)$.

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\left(2\times\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = (0,0,1,0,0)\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.$$

O "tableau" está apresentando no próximo item. ■

2. Lembrando que o "tableau" tem a forma $\dfrac{-\boldsymbol{\gamma}' \mid \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}}{\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}}$, segue que o *Simplex*:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr|r} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4/5 & 1/5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -9/5 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \text{Solução: } \overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = 1$$

entra: 3
sai: 2

solução encontrada, pois $\boldsymbol{\gamma} \leqq \mathbf{0}$ ■

No exemplo a seguir, a condição de saído do algoritmo *Simplex* é a ilimitação. Neste caso é possível provar que a resposta do *Simplex* é correta, bastando verificar que existe de fato uma semi-reta de ilimitação (provando a viabilidade e a ilimitação).

Exemplo 4.4 *Considerando os dados do (PLC) abaixo, e conhecendo a base B numa iteração do Simplex, construa o "tableau" desta iteração e finalize o algoritmo.*

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} := (1,1,0,0,0)':$$

1. *construa o "tableau" do Simplex sabendo que* $B=(3,4,5)$
2. *resolva o problema pelo Simplex Tabular a partir do "tableau" obtido em* 1 *acima e, ao final, demonstre o que for possível sobre a resposta.*

Resolução

1. Como a base "atual" é $B=(3,4,5)$, correspondente a uma matriz identidade, as variáveis do *Simplex* são: $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{A}_B^{-1'}\boldsymbol{c}_B = \mathbf{I}(0;0;0) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{c} - \mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c} = (1;1;0;0;0)$.

$$\overline{\boldsymbol{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = (1,1,0,0,0)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = 0.$$

O "tableau" está apresentando no próximo item. ■

2. Lembrando que o "tableau" tem a forma $\dfrac{-\boldsymbol{\gamma}' \;\big|\; \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}}{\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \;\big|\; \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}}$, segue que:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -9 & -1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \text{entra:} & & 1 & & & \\ \text{sai:} & & 3 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3/2 & 1/4 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & -11/2 & -9/4 & 0 & 1 & 48 \end{array} \rightarrow \text{Semi-reta: } \overline{\boldsymbol{x}}+\lambda\overline{\boldsymbol{h}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 48 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

ilimitação detectada, pois:
$\gamma_2 > 0$ e $\boldsymbol{\pi} = (-1/2; -3; -11/2) \leqq \mathbf{0}$

De fato, $\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda\overline{\boldsymbol{h}}$ é semi-reta, pois:

- $$\mathbf{A}(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda\overline{\boldsymbol{h}}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 48 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ -8+18 \\ -18+48 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2-2 \\ -2-1+3 \\ -\frac{9}{2}-1+\frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- $$\boldsymbol{c}'(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda\overline{\boldsymbol{h}}) = (1;1;0;0;0)\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 48 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}\right) = 2 + \lambda(\tfrac{1}{2}+1) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$ ■