Introdução à Otimização Linear (2000)
Dualidade (linear e jogo) - versão 2.6.1

Leônidas de Oliveira Brandão
http://www.ime.usp.br/~leo
http://www.matematica.br
11 de janeiro de 2024 17:01

Sumário

Índice Remissivo

Capítulo 5

Dualidade em Programação Linear

Neste capítulo introduziremos o conceito de *dualidade para problemas lineares* empregando uma abordagem semelhante à empregada em *teoria dos jogos*. Essa abordagem usa a ideia de *penalidades*, via multiplicadores de Lagrange[1]. A vantagem dessa abordagem é possibilitar um processo que permite a construção do dual de qualquer problema linear. Entretanto, apresentaremos também a construção dos pares primal/dual a partir de um par padrão (o par PLC/DLC) empregando o processo de transformações entre problemas equivalentes.

Fixada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto completo, um vetor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e um vetor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, difinimos o problema canônico por (PLC):

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}. \end{array}\right\rangle \equiv \left\langle\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{x} \in X \\ & \text{sendo } X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n :\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Para este problema, que também estamos denominando **Problema Canônico**, convencionando que, se $X = \emptyset$, então $VO = -\infty$ (valor objetivo). Assim, podemos reescrever este problema como:

$$\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} :\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}. \tag{5.2}$$

Podemos eliminar a restrição $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, impondo multas por violações. Para ficar mais fácil esta exposição suporemos a existência de dois jogadores, o primeiro deseja resolver o problema anterior e será denominado jogador J_P. O segundo jogador será o J_D, cujo objetivo (neste momento) é evitar que J_P viole alguma restrição.

Assim, se J_P permitir que para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ que $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \neq b_i$, J_D aplicará uma multa $y_i \neq 0$ reduzindo o lucro de J_P. Além disso, para obtermos um problema equivalente ao problema 5.1, J_P está interessado em obter lucro máximo e J_D em ter prejuízo mínimo. Assim, para cada valor de produção $\boldsymbol{x}$ que J_P escolhe, J_D escolhe sua melhor multa: $\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})$.

Assim o problema (5.1) é equivalente a $\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\}$, que ainda pode ser reescrito na forma: *primeiro jogador* escolhe o $\boldsymbol{x}$, depois *segundo jogador* escolhe o $\boldsymbol{y}$, a partir do $\boldsymbol{x}$ já escolhido,

$$\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\}. \tag{5.3}$$

Desse modo, se existe $\boldsymbol{x}$ para o qual $\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (ou seja, poliedro X é não vazio), o primeiro jogador J_P escolherá um $\boldsymbol{x} \in X$, pois desse modo impedirá que o segundo jogador J_D leve a penalidade para $-\infty$. Explicando de

[1] Joseph-Louis Lagrange, nascido em 1736 numa região da hoje Itália. O problema considerado por Lagrange, foi: $\min\{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in A\}$, A um conjunto aberto. As componentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, são denominadas **Multiplicadores de Lagrange**.

outra forma, se J_P escolher $\boldsymbol{x} \notin X$, J_D consegue levar $\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})$ para $-\infty$ ($\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = -\infty$). Entretanto, se $X = \emptyset$, o primeiro jogador não opção além de escolher um $\boldsymbol{x}$ para o qual $\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, resultando em $-\infty$ (segundo jogador consegue levar para menos infinito), coincidindo com a convenção $\max_\emptyset f(x) = -\infty$.

Lema 5.1 *Os problemas (5.2) e (5.3) são equivalentes.*

Demonstração Elementar a partir das observações acima. ■

Continuando com a investigação do jogo J_P/J_D, podemos "inverter" os papéis dos jogadores. Qual o problema derivado quando J_D primeiro seleciona sua variável $\boldsymbol{y}$, para depois J_P escolher $\boldsymbol{x}$?

Neste caso, podemos reescrever o sistema como

$$\begin{array}{rcl}
\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\} & = & \sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}^t\mathbf{A}\boldsymbol{x})\} = \\
\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}^t\mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\} & = & \sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^t\mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\} = \\
\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^t\mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\} & = & \sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}^t\mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \ \ \}
\end{array}$$

e, a partir da última forma, podemos finalmente ser reduzido ao seguinte

$$\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})\}. \tag{5.4}$$

Para este problema, podemos fazer uma análise "inversa" à que motivou a definição de (5.2). Agora, o jogador J_D é o primeiro a selecionar sua variável $\boldsymbol{y}$, procurando minizar o valor objetivo, enquanto J_P pode selecionar $\boldsymbol{x}$ de modo a penalizar J_D sempre que este não conseguir $\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0}$, pois, se ficar algum $c_i - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{y} > 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, J_P toma $\sup\{x_i \geqq 0\} = +\infty$.

Deste modo, J_D escolhe primeiro sua variável $\boldsymbol{y}$, mas sabe que depois dele J_P vai escolher seu $\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}$ tentando crescer o valor da função objetivo, o que resulta no problema:

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})\} \ \equiv \ \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}} \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})\}.$$

este é o **problema dual** de (5.3). Note que na forma acima fica mais fácil perceber a ordem em que os jogadores atuam, o que talvez não seja tão claro na equação (5.4).

É importante notar a relação entre os problemas com restrições linear, 5.1, e o sem restrições, 5.3: as multas só serão aplicadas quando o primeiro jogador não conseguir um ponto viável. Isso pode ser traduzido no lema seguinte.

Para simplificar a notação definiremos a **função objetivo estendida**, também conhecida com **função lagrangeana**[2]

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y}). \tag{5.5}$$

Lema 5.2 *Qualquer que seja o poliedro primal P e seu correspondente dual D, sendo $S_x \subseteq \mathbb{R}^n$ e $S_y \subseteq \mathbb{R}^m$, respectivamente, os sinais das variáveis primais e duais, então*

$$\begin{array}{l}
\inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} \{\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\} \ = \ \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}, \quad \forall \overline{\boldsymbol{x}} \in P, \quad e \\
\sup_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{y}}) = \sup_{\boldsymbol{x}\in S_x} \{\overline{\boldsymbol{y}}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})\} \ = \ \overline{\boldsymbol{y}}^t\boldsymbol{b}, \quad \forall \overline{\boldsymbol{y}} \in D.
\end{array}$$

[2]Devido aos estudos de minimização irrestrita de Joseph-Louis Lagrange, usualmente considerado matemático Francês, mas nascido na Itália em 1736.

Demonstração Fica a cargo do leitor (note que os sinais das variáveis duais são definidos de modo a impedir que as restrições primais sejam inviáveis). ■

Portanto, J_D está interessado em resolver o seguinte problema

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\}. \tag{5.6}$$

ou seja, o problema do jogador J_D, quando este inicia o jogo, é

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}. \end{array} \tag{5.7}$$

Podemos caracterizar o problema (5.3) como a busca pelo melhor plano de produção, como exposto no capítulo 0: x_i quantidade de peças do produto i a serem produzidas e $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} = b_i$ a quantidade de insumo i disponível (a_{ij} a quantidade de insumo i no produto j).

Deste modo, podemos colocar o problema (5.4) como a determinação dos preços dos insumos, de modo a garantir que J_D receba em cada unidade de produto ao menos o valor unitário de venda de cada produto ($\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{y} \geqq 0$) - vide capítulo 0.

5.1 Como construir o dual de um problema linear

A partir da seção anterior, podemos notar que o processo de obtenção do dual consiste de dois passos: obtenção do "sinal" da multa (variável dual) e obtenção do "sinal" do poliedro dual. Nesta subseção, a partir de um problema primal de maximização, apresentaremos um esquema ilustrativo do referido processo.

Por simplicidade, admitamos que o problema primal seja de maximização na variável $\boldsymbol{x} \in S_x$, sendo S_x o "sinal" da variável $\boldsymbol{x}$ (no poliedro canônico por exemplo, teríamos $S_x := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\}$).

Para a obtenção do dual, existem dois passo principais (determinação dos "sinais" das variáveis duais e do poliedro dual), além de um passo simples que é inversão de papéis entre os jogadores (considerando o lagrangeano). Este processo é ilustrado abaixo.

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} \;\; \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \qquad \boldsymbol{x} \in \overline{X} \\ \quad (A) \end{array}\right\rangle \overset{(a)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{c} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (B) \end{array}\right\rangle \overset{(b)}{\leftrightarrow} \left\langle \begin{array}{c} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (C) \end{array}\right\rangle \overset{(c)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} \;\; \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ \qquad \boldsymbol{y} \in \overline{Y} \\ \quad (D) \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Se pensarmos em termos de dedução da esquerda para a direita dos problemas: em

(a) devemos determinar o "sinal" da multa do problema (B), a partir do poliedro $\overline{X}$, de modo que este fique equivalente ao (A);

(b) devemos determinar o problema dual (basta aplicar a definição: inverter a ordem dos jogadores);

(c) devemos determinar o "sinal" do poliedro dual $\overline{Y}$, em (D), de modo que o problema (D) fique equivalente ao (C).

Por exemplo, para o problema canônico do início do capítulo (5.1), teríamos a seguinte sequência:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x},\; \boldsymbol{x}\in\overline{X} \\ \overline{X} := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \\ \qquad (A) \end{array}\right\rangle \overset{(a)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{c} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \text{logo } S_y = \mathbb{R}^m \\ (B) \end{array}\right\rangle \overset{(b)}{\leftrightarrow} \left\langle \begin{array}{c} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (C) \end{array}\right\rangle \overset{(c)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y},\; \boldsymbol{y}\in\overline{Y} \\ \overline{Y} := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\} \\ \qquad (D) \end{array}\right.$$

5.2 Par Primal/Dual

Em função deste jogo duplo este par de problemas, (5.7) e (5.1), é designado par **primal-dual**. Se o problema (5.1) é o **Problema Primal**, então (5.7) é seu **Problema Dual**.

Podemos fazer o mesmo jogo com todas as outras variantes de restrições, obtendo a tabela seguinte.

Restrições	Tipos de problemas/penalidades minimização $\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x})$	Tipos de problemas/penalidades maximização $\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x})$
$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$
$\mathbf{A}\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_-$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$
$\mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_-$

Restrições	Tipos de problemas/penalidades $\min_{\boldsymbol{x}}\sup_{\boldsymbol{y}}$ $\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x})$	Tipos de problemas/penalidades $\max_{\boldsymbol{x}}\inf_{\boldsymbol{y}}$ $\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_-$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$
$\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}\leqq\mathbf{0}$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+$	$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_-$

Exercício 5.1 *Usando os multiplicadores, deduza os problemas duais de*

1. $\max\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$;
2. $\max\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}\}$;
3. $\max\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}\}$;
4. $\min\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$;
5. $\min\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}\}$;
6. $\min\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}\}$;

Exercício 5.2 *Considere o problema geral de maximização em Programação Linear, (P_{max}), abaixo descrito e obtenha seu dual.*
Sugestão: procure resolver este problema por dois processos, verificando o mesmo resultado, via dual do problema canônico de programação linear e via dualização usando o processo esquematizado na seção 5.1

$$\begin{array}{rccccccl}
\max & \langle\boldsymbol{c}^1,\boldsymbol{x}^1\rangle & + & \langle\boldsymbol{c}^2,\boldsymbol{x}^2\rangle & + & \langle\boldsymbol{c}^3,\boldsymbol{x}^3\rangle & & \\
 & \mathbf{A}^{11}\boldsymbol{x}^1 & + & \mathbf{A}^{12}\boldsymbol{x}^2 & + & \mathbf{A}^{13}\boldsymbol{x}^3 & = \boldsymbol{b}^1 \\
 & \mathbf{A}^{21}\boldsymbol{x}^1 & + & \mathbf{A}^{22}\boldsymbol{x}^2 & + & \mathbf{A}^{23}\boldsymbol{x}^3 & \leqq \boldsymbol{b}^2 \\
 & \mathbf{A}^{31}\boldsymbol{x}^1 & + & \mathbf{A}^{32}\boldsymbol{x}^2 & + & \mathbf{A}^{33}\boldsymbol{x}^3 & \geqq \boldsymbol{b}^3 \\
 & \boldsymbol{x}^1\mathbb{R}^{n_1}_+ & , & \boldsymbol{x}^2\mathbb{R}^{n_2} & , & \boldsymbol{x}^3\mathbb{R}^{n_3}_- & &
\end{array}$$

Exercício 5.3 *Prove que o dual do dual de um problema geral de maximização em Programação Linear equivale ao seu primal.*

Podemos relacionar a função de custo extendida com a viabilidade (e valor objetivo) dos problemas,

Lema 5.3 *Usando a função de custo estendida, valem as seguintes equivalências,*

$$\overline{\boldsymbol{x}}\in\overline{X}:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\} \iff \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}=\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}, \tag{$\star$}$$

$$\overline{\boldsymbol{y}}\in\overline{Y}:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{c}\} \iff \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}})\in\mathbb{R}. \tag{$\star\star$}$$

Demonstração As duas equivalências seguem, respectivamente, das seguintes[3],

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} + \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}) \in \mathbb{R} \iff \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}) = 0 \iff \mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$$

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c}-\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R} \iff \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c}-\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}}) = 0 \iff \boldsymbol{c}-\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}} \leqq \mathbf{0} \iff \mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c}.$$

■

Em particular, quando consideramos um par de pontos viáveis nos problemas (5.1) e (5.7), podemos obter a seguinte desigualdade,

Lema 5.4 *Se* $\langle \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{X} \cap \mathbb{R}^n_+$ *e* $\overline{\boldsymbol{y}} \in \overline{Y}\rangle$, *então* $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \leqq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}$.

Demonstração Das hipóteses segue que $\boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} \overset{\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}}{=} (\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}})^t\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{x}}^t\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}} \overset{\overline{\boldsymbol{x}}\geqq\mathbf{0}\wedge\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}}\geqq\boldsymbol{c}}{\geqq} \overline{\boldsymbol{x}}^t\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$. ■

Exercício 5.4 *Redefinindo* $\overline{Y} := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}\}$, *mostre que:* $\left\langle \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+ \text{ e } \overline{\boldsymbol{y}}\in\overline{Y}\right\rangle \Rightarrow \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}$.

Note que $\overline{Y}$ acima definido forma o conjunto das restrições do dual do problema de minimização sobre $\overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+ = X$. Ou seja, o dual de $\min\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$ é $\max\{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}\}$. Daqui pode-se concluir que para um primal de minimização sobre $\overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+$, o valor objetivo de qualquer ponto viável primal é maior ou igual a de qualquer viável dual ($\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}$). A este dois resultados, normalmente denominamos **Teorema Fraco de Dualidade**:

Teorema 5.1 *Considerando como restrições primais o poliedro canônico* X *e tomando* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *e* $\overline{\boldsymbol{y}}$, *respectivamente, um ponto viável primal e um viável dual:* $\begin{cases} \text{se o problema primal é de maximização,} & \text{então } \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \leqq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} \\ \text{se o problema primal é de minimização,} & \text{então } \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}. \end{cases}$

Corolário 5.1 *Se* $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$ *são viáveis no par canônico primal/dual,* (PLC)/(DLC), *com* $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}$, *então* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *é solução do* (PLC) *e* $\overline{\boldsymbol{y}}$ *é solução do* (DLC).

Demonstração Qualquer que seja o par $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ viável primal e dual, então

$$\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \overset{\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}}{=} (\mathbf{A}\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t\mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \overset{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}\wedge\mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{c}}{\geqq} \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}, \quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ tais que } \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \mathbf{A}^t\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{c} \text{ e } \boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}. \qquad (\star)$$

Denotando por Y o poliedro dual e considerando quaisquer pares viáveis primal/dual $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X\times Y$, podemos aplicar o resultado $(\star)$ para os pares $(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})$ e $(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}})$ e concluir a tese:

(A) $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} \overset{(\star)}{\geqq} \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{x}\in X$, logo $\overline{\boldsymbol{x}}$ é uma solução ótima do (PLC); e

(B) $\boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \overset{(\star)}{\leqq} \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}, \forall\boldsymbol{y}\in Y$, logo $\overline{\boldsymbol{y}}$ é uma solução ótima do (DLC). ■

Exemplo 5.1 *Alguns exemplos de funcionais não lineares onde a desigualdade é estrita: lembre-se, o jogador primal escolhe seu "melhor" ponto sabendo que o jogador dual vai tentar prejudicá-lo. Por exemplo, no problema* $\inf_{\boldsymbol{y}}\sup_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, *o jogador primal escolhe o* $\boldsymbol{y}$ *e depois o jogador dual escolhe seu* $\boldsymbol{x}$.

$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\inf_{\boldsymbol{y}\in B}\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\sup_{\boldsymbol{x}\in A}\inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\boldsymbol{y}\in B \wedge \boldsymbol{x}\in A$
$\frac{x}{y}$	$+\infty$	0	$y>0 \wedge x\geqq 0$
$-\frac{x}{y}$	0	$-\infty$	$y>0\wedge x>0$
$1-\frac{x}{y}$	1	$-\infty$	$y>0\wedge x>0$[4]
$-(x-y)^2$	0	$-\infty$	$y\in\mathbb{R}\wedge x\in\mathbb{R}$

[3] Note que $\overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+$ resulta no poliedro canônico $X = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}\}$.

Entretanto vale um resultado mais geral que o exposto no teorema acima. Mesmo para problemas de otimização não-lineares, vale o seguinte teorema Fraco de Dualidade,

Lema 5.5 *Sejam A e B quaisquer conjuntos e* $L(.,.) : A \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *qualquer função. Então*

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in B} \sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \sup_{\boldsymbol{x}\in A} \inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{5.9}$$

Demonstração Quaisquer que sejam $\overline{\boldsymbol{x}} \in A$ e $\overline{\boldsymbol{y}} \in B$, teremos

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) \geqq L(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \geqq \inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}), \quad \forall(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \in A \times B.$$

Deste modo podemos minimizar o funcional à esquerda quanto à $\overline{\boldsymbol{x}}$ e à direita quanto à $\overline{\boldsymbol{y}}$, seguindo daí a tese,

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in B} \sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \sup_{\boldsymbol{x}\in A} \inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

■

Devemos notar que o resultado acima está em um formato mais geral que o Teorema Fraco de dualidade 5.1, pois usando o lema 5.2 podemos perceber que a equação (5.9) replica 5.1: $\overline{\boldsymbol{x}}$ viável primal $\Rightarrow$ $\inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{y}}$ viável dual $\Rightarrow \inf_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}$, assim, por exemplo, quando o primal é de maximização, para qualquer par viável $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$,

$$\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \leqq L(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \leqq \sup_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}}.$$

Exercício 5.5 *Adotando* $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})$ *e as equivalências*

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \left\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\right\} \equiv \max\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \left\{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t\boldsymbol{y})\right\} \equiv \min\{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\},$$

demonstre o teorema 5.1 como corolário do lema anterior.

5.3 Teorema Forte de Dualidade

Nesta seção voltaremos a trabalhar com o par primal/dual a partir do problema canônico, isto é,

$$\text{Primal:} \quad \left.\begin{array}{l} \max \ \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \max\{\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in X\} \\ \text{sendo } X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}; \end{array}\right. \tag{PLC}$$

$$\text{Dual:} \quad \left.\begin{array}{l} \min \ \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c} \end{array}\right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min\{\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}^t \in Y\} \\ \text{sendo } Y := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\}. \end{array}\right. \tag{DLC}$$

Denotaremos por VOP e VOD, respectivamente, os valores ótimos do (PLC) e do (DLC). Lembrando que VOP$= -\infty$ quando o (PLC) for inviável e VOD$= +\infty$ quando o (DLC) for inviável, podemos mostrar que

Lema 5.6 *Se o* (PLC) *é viável, então* VOP$=$ VOD
VOP$= +\infty \implies$ (DLC) *inviável.*

[4] Se deixar $x \geqq 0$, então ocorreria empate entre o primal e o dual, pois $\sup_{x\geqq 0} \inf_{y>0} 1 - \frac{x}{y} = 1$ (o jogador primal escolheria $x = 0$).

Demonstração Supondo o (PLC) viável, analisaremos separadamente dois casos:

- Se VOP$= +\infty$, então existe $\boldsymbol{x}_\lambda \in X$, $\forall \lambda \geqq 0$, para o qual

$$\lim_{\lambda\to\infty} \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}_\lambda = +\infty.$$

Neste caso não pode existir $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y$, pois se existisse um tal $\overline{\boldsymbol{y}}$, do teorema Fraco de Dualidade (5.1), para maximização, teríamos

$$\boldsymbol{b}^t \overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in X,$$

o que implicaria (por continuidade) que $\boldsymbol{b}^t \overline{\boldsymbol{y}} \geqq \lim_{\lambda\to\infty} \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}_\lambda = +\infty$ (absurdo, pois $\boldsymbol{b}^t \overline{\boldsymbol{y}}$ é um número real).

- Se VOP$\in \mathbb{R}$, então existe um $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ que atinge o ótimo, VOP$= \boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{x}}$. Neste caso, da condição suficiente de otimalidade, existe uma base viável B que gera $\overline{\boldsymbol{x}}$ e para a qual

$$\boldsymbol{\gamma}_N = \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N^t \boldsymbol{\lambda} \leqq \mathbf{0}, \quad \text{sendo } \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}_B^{-1})^t \boldsymbol{c}_B. \qquad (\star)$$

Daí podemos provar que $\boldsymbol{\lambda}$ é um ponto viável no (DLC) e que VOD$= \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{\lambda}$:

  - $\boldsymbol{\lambda} \in Y$: para mostrar que $\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} \geqq \boldsymbol{c}$ fica mais fácil analisar separadamente os índices de B e de N,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B - \mathbf{A}_B^t \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N^t \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B - \mathbf{A}_B^t (\mathbf{A}_B^{-1})^t \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N^t \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}_N^t \boldsymbol{\lambda} \overset{(\star)}{\leqq} \mathbf{0} \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0} \implies \boldsymbol{c} - \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} \leqq \mathbf{0}.$$

  - Como $\overline{\boldsymbol{x}}$ é gerado por B, temos que $\overline{\boldsymbol{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$ e $\overline{\boldsymbol{x}}_N = \mathbf{0}$, deste modo

$$\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{b}^t (\mathbf{A}_B^{-1})^t \boldsymbol{c}_B = (\mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{b})^t \boldsymbol{c}_B = \overline{\boldsymbol{x}}_B^t \boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{c}_B^t \overline{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{c}_B^t \overline{\boldsymbol{x}}_B + \boldsymbol{c}_N^t \mathbf{0} = \boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{x}}. \qquad (\star\star)$$

  Além disso, do teorema Fraco de Dualidade para o problema primal de maximização (teorema 5.1), segue que

$$\boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{x}} \overset{(\star\star)}{=} \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{\lambda} \leqq \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{y}, \quad \forall \boldsymbol{y} \in Y.$$

  Logo, $\boldsymbol{\lambda}$ é solução ótima do (DLC) e $\boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{\lambda}$, como desejávamos demonstrar. ■

Do mesmo modo, se o dual for ilimitado, então o primal é inviável,

Lema 5.7 *Se o* (DLC) *é viável, então* VOD$=$ VOP
VOD$= -\infty \implies$ (PLC) *inviável.*

Demonstração Colocaremos o (DLC) na forma canônica para podermos usar o lema acima e concluir a tese.

$$(\mathsf{DLC}) \quad \left\langle \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}^t \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{ll} \max & -\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}^t \boldsymbol{y} - \mathbf{I} \boldsymbol{y}^r = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}^r \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{ll} \max & -\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{y}^- - \mathbf{0}^t \boldsymbol{y}^r \\ & [\mathbf{A}^t | -\mathbf{A}^t | -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^+ \\ \boldsymbol{y}^- \\ \boldsymbol{y}^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \\ & (\boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^-, \boldsymbol{y}^r)^t \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\mathrm{P})$$

Como (P) está na forma canônica e é viável por hipótese, podemos aplicar o lema anterior para concluir que:

- VOP$=$ VOD: direto, apenas usando o fato que o dual do dual é o primal.
- VOD$= -\infty \implies$ (PLC) inviável: Como VOD$= -\infty$ e, da construção de (P), o valor objetivo de (P) é o negativo do correspondente (DLC), segue que seu valor ótimo é o negativo de VOD, ou seja, VO de (P)$= +\infty$.

  Assim, estamos em condições de aplicar a segunda parte do lema 5.6 e daí concluimos que o dual de (P) é inviável. Para finalizar a tese, basta mostrarmos que o dual de (P) é precisamente o (PLC):

$$\text{dual de (P)} \equiv \left\langle \begin{array}{c} \min \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{w} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \geqq \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{w} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{w} \geqq -\boldsymbol{b} \\ -\mathbf{A}\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{w} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{w} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{w} \leqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \overset{\boldsymbol{x} := -\boldsymbol{w}}{\equiv} \left\langle \begin{array}{l} \max \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\mathrm{D})$$

Como o dual do (DLC), (D), equivale ao (PLC), segue daí a tese. ■

Com estes dois lemas, podemos enunciar um resultado importante para problemas lineares, o **Teorema Forte de Dualidade**,

Teorema 5.2 *Se um dos problemas do par primal/dual é viável, então os valores ótimos coincidem.*

Demonstração Como qualquer problema de linear pode ser colocado na forma canônica, a tese segue diretamente dos lemas 5.6 e 5.7. ■

Exemplo 5.1 *Considere os problemas* (PLC) *e* (DLC)*, usando*

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{c} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, apesar do (PLC) *ter dimensão 4, fica fácil ver que o mesmo é equivalente a um problema no* $\mathbb{R}^2$*:* $\max\{-x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \geqq 2 \wedge x_2 \leqq 2\}$.

Graficamente é fácil verificar que o (PLC) *tem solução ótima (única)* $\overline{\boldsymbol{x}} = (0, 2, 0, 0)$ *e o* (DLC) *tem como solução* $\boldsymbol{y} \in [\{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2\}]$ *(casco convexo), sendo* $\boldsymbol{y}^1 = (0, 1)$ *e* $\boldsymbol{y}^2 = (-1, 2)$ *(como exercício, prove estas duas afirmações).*

Devemos notar que no (PLC)*, podemos utilizar duas bases distintas para o único vértice ótimo, sendo*

Base $B_1 = (2, 4)$	$\boldsymbol{\gamma}_{N_1} = (\gamma_1, \gamma_3) = (-2, 1)$
	$\mathbf{A}_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}^t = \boldsymbol{c}_{B_1}^t \mathbf{A}_{B_1}^{-1} = (1, 0)$
Base $B_2 = (2, 3)$	$\boldsymbol{\gamma}_{N_2} = (\gamma_2, \gamma_3) = (-1, -1)$
	$\mathbf{A}_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}^t = \boldsymbol{c}_{B_2}^t \mathbf{A}_{B_2}^{-1} = (0, 1)$

◇

Exercício 5.6 *Considerando o par primal/dual canônico, prove que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{x}} \text{ viável primal, } \overline{\boldsymbol{y}} \text{ viável dual, tais que} \\ \left\langle \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}}) = \mathbf{0} \\ \overline{\boldsymbol{y}}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \textbf{ (folgas complementares)} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{x}} \text{ solução do (PLC) e } \overline{\boldsymbol{y}} \text{ solução do (DLC).}$$

5.4 Aplicações do Teorema Forte de Dualidade: Teorema de Alternativas

Nesta seção examinaremos teoremas de alternativas a partir do Teorema Forte de Dualidade, particularmente o lema de Farkas. Estes teoremas podem ser caracterizados pela existência de dois sistemas (S_1 e S_2) mutuamente exclusivos: ambos os sistemas não podem ter solucão e se um deles não tem solução o outro tem.

Na seção seguinte reapresentamos o lema de Farkas, desta vez demonstrado pelo teorema de Weierstrass e o da separabilidade de hiperplano.

Assim, um **teorema de alternativa** pode ser esquematizado da seguinte maneira: considerando os dois sistemas lineares S_1 e S_2, então

$S_1 \wedge S_2 = falso$: ou seja, ambos os sistemas não podem ter solução
$\neg S_1 \Rightarrow S_2$: ou seja, se S_1 não tem solução, então S_2 tem (ou vice-versa[5])

Um dos mais conhecidos (e antigos) teoremas de alternativas, que surgiu bem antes da teoria de Programação Linear, é o **Lema de Farkas**, de 1902.

Lema 5.8 *(* **lema de Farkas***) Se tomarmos* $S_1 : \begin{array}{ll} (1) & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ (2) & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}$ *e* $S_2 : \begin{array}{ll} (3) & \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0} \\ (4) & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} > 0 \end{array}$ *, então* (S_1, S_2) *constitue um teorema de alternativas.*

Demonstração Vamos usar o esquema de prova acima indicado:

- $S_1 \wedge S_2 = falso$: Por contradição suporemos a existência de um par $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, respectivamente, solução de S_1 e S_2. Neste caso teríamos

$$0 \overset{(4)}{<} \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} \overset{(1)}{=} (\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}})^t\overline{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}^t}_{\geqq \mathbf{0}} \underbrace{\mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}}}_{\leqq \mathbf{0}} \overset{(2)\wedge(3)}{\leqq} 0.$$

  o que é claramente uma contradição. Logo, não pode existir o par $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$.

- Nesta parte associaremos ao par (S_1, S_2) um par primal/dual, de modo que a negação de um dos sistemas equivalha à inviabilidade de um dos problemas lineares e ilimitação do outro (via Teorema Forte de Dualidade)[6].

  Considere o par primal/dual $(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min \mathbf{0}^t\boldsymbol{x} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right.$ e $(D) \left\{ \max \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \quad \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0} \right.$.

  Mostraremos que $\neg S_1 \Rightarrow S_2$. Suponha que S_1 não tenha solução, então (P) é inviável, logo $\mathsf{VOP} = +\infty$. Por outro lado, (D) é viável (para $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$), assim podemos aplicar o Teorema Forte de Dualidade para concluirmos que $\mathsf{VOD} = \mathsf{VOP} = +\infty$. Deste modo, (D) é ilimitado e portanto deve existir uma direção de ilimitação $\overline{\boldsymbol{y}}$, ou seja,

$$\exists \overline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}} \leqq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} > 0,$$

  seguindo daí que S_2 tem solução. ■

Corolário 5.2 *(* **lema de Farkas***) Se tomarmos* $S_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\}$ *e* $S_2 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} < 0 \end{array} \right\}$*, então* (S_1, S_2) *constitue um teorema de alternativas.*

Uma consequência interessante deste teorema é uma caracterização de otimalidade do par primal/dual.

Teorema 5.3 *O par canônico de programação linear tem solução ótima* $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *se e somente se* $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *é solução do sistema* $\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \\ \mathbf{A}^t\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c} \\ \overline{\boldsymbol{x}} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right.$.

A condição necessária para otimalidade (que usa o lema de Farkas) é bastante trabalhosa, porém a condição suficiente pode ser feita diretamente como uma aplicação do corolário 5.1 ($(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$ par viável primal/dual, com $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{y}} \implies (\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$ são as soluções do primal/dual) ou usando Farkas. Apenas para ilustrar o potencial de uso de teoremas de alternativas como substitutos dos teoremas de dualidade de programação linear, apresentaremos esta última opção.

Demonstração

[5] Note que $A \Rightarrow B$ equivale a expressão $\neg B \Rightarrow \neg A$.

[6] Este é o ponto chave de demonstração de teorema de alternativas usando esta técnica: encontrar o par primal/dual conveniente.

($\Leftarrow$) Podemos reescrever o sistema $\mathcal{S}$ como o $\mathcal{S}_1$ de Farkas, e com isso obtemos o seguinte par

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^t & -\mathbf{A}^t & -\mathbf{I} \\ \boldsymbol{c}^t & -\boldsymbol{b}^t & \boldsymbol{b}^t & \mathbf{0}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^+ \\ \boldsymbol{y}^- \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 0 \end{bmatrix} \\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}^+;\boldsymbol{y}^-;\boldsymbol{z}) \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_2 := \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{s} + t0 < 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{O} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{A} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{s} \\ t \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \right. .$$

Como o sistema $\mathcal{S}$ é viável, $\mathcal{S}_1$ tem solução e por Farkas (lema 5.2) o sistema $\mathcal{S}_2$ acima é inviável. Entretanto as inequações não estritas de $\mathcal{S}_2$ podem ser reescritas como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}^t\boldsymbol{r} + t\boldsymbol{c} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{s} - t\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{s} \leqq \mathbf{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}^t\boldsymbol{r} \geqq (-t)\boldsymbol{c} \\ \mathbf{A}(-\boldsymbol{s}) = (-t)\boldsymbol{b} \\ (-\boldsymbol{s}) \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}^t\boldsymbol{r} \geqq t\boldsymbol{c} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{s} = t\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{s} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\} \tag{5.10}$$

Deste modo o sistema $\mathcal{S}_2$ não pode ter solução para um particular t. Logo, tomando $t = 1$ as restrições (5.10) de $\mathcal{S}_2$ se resumem precisamente ao sistema $\mathcal{S}_1$ que por hipótese é viável. Ou seja, o caso particular de $\mathcal{S}_2$ tomando $t = 1$ fica

$$\left. \begin{array}{lc} (1) & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{s} < 0 \\ (2) & \mathbf{A}^t\boldsymbol{r} \geqq \boldsymbol{c} \\ (3) & \mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ (4) & \boldsymbol{s} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{lc} (1) & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} < 0 \\ (2,3,4) & \mathcal{S}_1 \end{array} \right.$$

Portanto, para todo par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que satisfaça $\mathcal{S}_1$, como $\mathcal{S}_2$ é inviável, $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \geqq 0$. E este resultado é precisamente o teorema fraco de dualidade em programação linear, no formato do lema 5.4. Assim, para concluir a demonstração basta repetir a prova do lema 5.4. ■

Como exercícios de teoremas de alternativas, sugerimos o teorema de Gale e mais uma variante do lema de Farkas bastante interessante, conforme abaixo.

Exercício 5.7 *(* **teorema de Gale***) Demonstre o teorema de alternativas de Gale:* S_1 : (1) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *e* S_2 : (2) $\mathbf{A}^t\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ *.*
(3) $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} = 1$

Note que os poliedros associados aos sistemas S_1 e S_2 são definidos por igualdades, por isso as variáveis $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ serão livres de sinais no par primal/dual adequado.

Exercício 5.8 *Considerando $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$, mostre que os sistemas seguintes constituem um teorema de alternativas:* S_1 : (1) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *e* S_2 : (3) $\mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{1}$ *.*
(2) $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Muita atenção à desigualdade $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, que implica em $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Exemplo 5.2 *Dado dois conjuntos de pontos $\mathcal{A} := \{\boldsymbol{a}^i\}_{i\in I}$ e $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{b}^i\}_{i\in I}$, $I := \{1, 2, \ldots, n\}$, determinar se existe um hiperplano que separe estritamente os dois conjuntos.*

Defina as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente, com linhas $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ e $\{(\boldsymbol{b}^i)^t\}_{i\in I}$. O problema é determinar a existência ou não de um vetor $(\boldsymbol{x}, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} > \gamma\mathbf{1}$ e $\mathbf{B}\boldsymbol{x} < \gamma\mathbf{1}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \gamma \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{$\star$}$$

Mas este sistema está numa forma adequada para teoremas de alternativas e usando o exercício 5.8 ($\mathbf{C}\boldsymbol{d} \geqq \mathbf{1} \equiv \mathbf{C}\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$), notamos que ($\star$) tem solução se e somente se o sistema abaixo não tiver solução,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & -\mathbf{B}^t \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\star\star)$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0}$$

Note que o sistema $(\star\star)$ *tem solução* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, *então* $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ *e* $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ *(pois* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}^t\boldsymbol{u} - \mathbf{1}^t\boldsymbol{v} = 0$*). Assim, para resolver este sistema podemos construir o seguinte PL*

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{1}^t\boldsymbol{u} + \mathbf{1}^t\boldsymbol{v} - 2 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & -\mathbf{B}^t \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leqq \mathbf{1} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geqq \mathbf{0}. \end{array}$$

Se (P) tem solução 0, *então* $(\star\star)$ *tem solução e* $(\star)$ *não. Por outro lado, se (P) tem solução menor que* 0, *então* $(\star\star)$ *não tem solução e assim,* $(\star)$ *tem solução.* $\diamond$

É importante notar que a viabilidade do sistema $(\star\star)$ é equivalente a existência de um ponto $\boldsymbol{x}$ dentro do casco convexo de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{a}^i = \mathbf{A}^t\boldsymbol{u} = \mathbf{B}^t\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}^i, \text{ com } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Exercício 5.9 *Prove a afirmação acima.*

5.5 Lema de Farkas pelos teoremas de Weierstrass e separabilidade por hiperplano

Podemos notar que nos sistemas alternativos de Farkas, $\left\langle S_1 : \begin{array}{ll} (1) & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ (2) & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle$ e $\left\langle S_2 : \begin{array}{ll} (3) & \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0} \\ (4) & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} > 0 \end{array} \right\rangle$, as equações (1) e (2) implicam que $\boldsymbol{x}$ está no cone gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$, $(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$, enquanto a equação (3) diz que $\boldsymbol{y}$ está na intersecção dos semi-espaços negativos $\{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{a}^i \leqq 0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

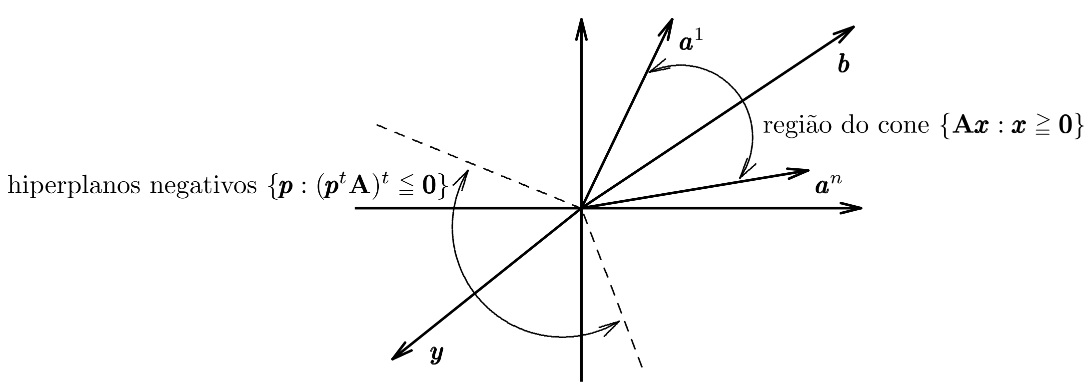

Figura 5.1: Farkas: cone gerado e semi-espaços negativos tem intersecção como $\mathbf{0}$

Portanto, é fácil ver que uma solução $\boldsymbol{x}$ para $\langle(1), (2)\rangle$ e uma $\boldsymbol{y}$ para $\langle(3)\rangle$ não podem fazer produto escalar positivo. Ou de outro modo, podemos intuir que ambas as regiões podem ser separados por um hiperplano.

Teorema 5.4 *(* **Teorema de Weierstrass***) Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é contínua e* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, *fechado e limitado, então existe* $\boldsymbol{x}^* \in S$ *tal que* $f(\boldsymbol{x}^*) \leqq f(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in S$.

Teorema 5.5 *(* **Teorema da Separabilidade por Hiperplano***) Se* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, *fechado e convexo, e* $\boldsymbol{x}^* \notin S$, *então existe* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ *para o qual* $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in S$.

Demonstração Sejam $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$ e $\overline{S} := S \cap \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^1)\}$, sendo $\boldsymbol{x}^1 \in S \neq \emptyset$ qualquer. Deste modo $\overline{S}$ é fechado e limitado, e portanto pelo teorema de Weierstrass existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{S}$ tal que $f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leqq f(\boldsymbol{x})$, para todo $\boldsymbol{x} \in \overline{S}$. Além disso, da definição de $\overline{S}$, segue que $\langle \boldsymbol{x} \in S \setminus \overline{S} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}^1) \geqq f(\overline{\boldsymbol{x}})\rangle$, logo

$$f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leqq f(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S.$$

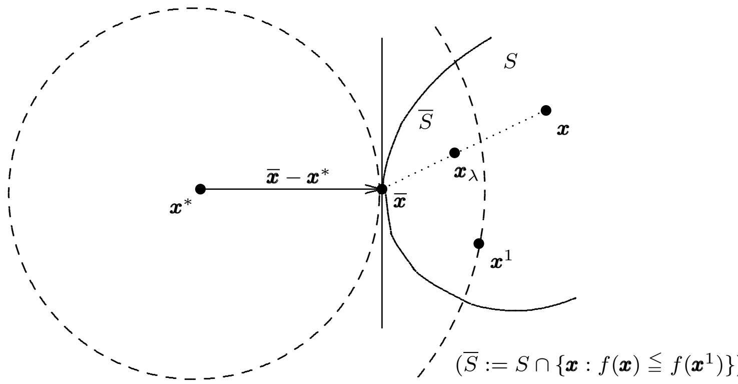

Figura 5.2: Hiperplano separador de $\boldsymbol{x}^* \notin S$ com S

Defina $\boldsymbol{p} := \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*$, então $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in S$, pois:

$\forall(\boldsymbol{x}, \lambda) \in S \times]0,1[$, como S é convexo, segue que $\boldsymbol{x}_\lambda := \overline{\boldsymbol{x}} + \lambda(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \in S$ e daí

$$\begin{aligned}
\|\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*\|^2 &= f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leqq f(\boldsymbol{x}_\lambda) = \|\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{x}^*\|^2 = (\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^* + \lambda(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}))^t(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^* + \lambda(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}))\\
&= \|\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*\|^2 + 2\lambda(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*)^t(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \lambda^2\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|^2\\
&\Longrightarrow\ 0 \leqq 2\lambda(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*)^t(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \lambda^2\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|^2 = 2\lambda\boldsymbol{p}^t(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \lambda^2\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|^2\\
&\overset{\lambda \geqq 0}{\Longrightarrow}\ 2\boldsymbol{p}^t(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \lambda\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|^2 \geqq 0 \ \overset{\lambda \to 0}{\Longrightarrow}\ \boldsymbol{p}^t(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \geqq 0\\
&\Longrightarrow\ \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{p}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^t\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{p}^t(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{c} \overset{\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}}{>} \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^*
\end{aligned}$$

Portanto, $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} > \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}^*,\ \forall \boldsymbol{x} \in S$, completando a demonstração. ■

Com estes dois resultados podemos demonstrar a parte mais difícil do lema de Farkas: (se S_1 inviável, então S_2 é viável).

Teorema 5.6 *Sejam* $\langle S_1 : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\rangle$ *não tem solução, então* $\langle S_2 : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} > 0\rangle$ *tem solução.*

Demonstração Seja S o cone definido pelas de $\mathbf{A}$, ou seja, $S := \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\}$. Logo S é fechado e convexo (pois é cone).

Além disso, $\boldsymbol{b} \notin S$, deste modo podemos aplicar o teorema da separabilidade por hiperplano (5.5). Seja então $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ tal separador, $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{b} > \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in S$.

Como $\boldsymbol{0} \in S$, segue a tese,

$$\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{b} > 0.$$

■

Exercício 5.10 *Sendo* $P := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_+ : \mathbf{A}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}^t\boldsymbol{y} = 1\}$ *e* $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, *prove que:*

$$\forall \boldsymbol{y} \in P \implies -\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \leqq \max_{i \in I, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - b_i.$$

Dica: Escreva em problema primal com restrições em P e note que, se $Q := \{(\boldsymbol{x}; \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \leqq \alpha\boldsymbol{1}\}$, então

$$\forall(\boldsymbol{x}; \alpha) \in Q \Rightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \leqq \alpha\boldsymbol{1} \Rightarrow \max_{i \in I} \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - b_i \leqq \alpha.$$

5.6 Referências

1. D.Bertsimas e J.N.Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, EUA, 1997.
2. O.L.Mangasarian, *Non linear programming*, McGraw-Hill, EUA, 1969.