MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 5 - Testes de hipóteses (2 populações) - C A S A (gabarito)

Exercício 1:

Um projetista aeronáutico tem evidências teóricas de que a pintura do avião reduz sua velocidade média a uma potência e posição de flapes específicas. Ele testa seis aviões consecutivos da linha de montagem antes e depois da pintura. Os resultados relativos às velocidades atingidas são mostrados abaixo.

	X	Y
Avião	Pintado	Não Pintado
1	286	289
2	285	286
3	279	283
4	283	288
5	281	283
6	286	289

Sabendo que os dados tem distribuição normal, os dados confirmam a teoria do projetista? Use $\alpha = 0,05$.

Solução:

Note que os dados proveem de amostras dependentes, as observações são pareadas, seja X : "velocidade atingida pelos aviões pintados" e Y : "velocidade atingida pelos aviões sem pintar", assumindo normalidade tem–se que $D = X - Y$ e

$$d_i = x_i - y_i = (-3, -1, -4, -5, -2, -3)$$

se deve calcular a média e a variância de D,

$$\overline{d} = \overline{x} - \overline{y} = 283,3333 - 286,3333 = -3$$

e

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2 = 2,$$

o interesse reside em testar

$$\begin{cases} H_0: & \mu_D = \mu_X - \mu_Y = 0, \text{ a velocidade média atingida pelos aviões pintados e não pintados} \\ & \text{é a mesma.} \\ \\ H_1: & \mu_X < \mu_Y, \Leftrightarrow \mu_D < 0, \text{ a velocidade média atingida pelos aviões pintados e menor} \\ & \text{do que a atingida pelos aviões não pintados.} \end{cases}$$

Note que também poderiamos definir $D = Y - X$ e neste caso a hipóteses seria $H_0 : \mu_D = 0$ contra $H_1 : \mu_D > 0$.

A estatística de teste é

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \mu_D)}{S_D} \underset{\mu_D=0}{\sim} t_{(n-1)},$$

em que $\mu_D = \mu_X - \mu_Y = 0$.

A decisão pode ser tomada calculando o $IC(\mu_X - \mu_Y = \mu_D; 0,95)$ vendo se 0 pertence ou não a este intervalo, e calculando o valor observado da estatística de teste e a região crítica.

$$t_{obs} = \frac{-3}{\sqrt{2}/\sqrt{6}} = -5,1962$$

A região crítica é dada por

$$RC_\alpha = (-\infty\ ,\ t_{\alpha,n-1}]$$

considerando $\alpha = 0,05$ e 5 graus de liberdade, tem–se que $t_{(0,05;5)} = -2,015$, assim

$$RC_{0,05} = (-\infty\ ,\ -2,015]$$

como $t_{obs} \in RC_{0,05}$, a decisão a tomar é rejeitar H_0 ao nível de significância do 5% e portanto se tem evidências a favor da teoria do projetista.

Exercício 2:

A equipe de marketing de uma determinada empresa realizou duas campanhas publicitárias. A campanha 1 conseguiu 250 novos clientes em um total de 300 abordagens enquanto que a campanha 2 obteve 178 novos clientes em um total de 260. Existe evidência para acreditar que essas campanhas publicitárias possuem performance diferentes? Utilize $\alpha = 0,05$.

Solução:

Seja p_i : "proporção de novos clientes considerando a campanha i", $i = 1, 2$.

$$\widehat{p}_1 = \frac{250}{300} = 0,8333, \ \ \widehat{p}_2 = \frac{178}{260} = 0,6846$$

e

$$\widehat{p}_c = \frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0,7643.$$

Se quer testar

$$\begin{cases} H_0 : & p_1 = p_2, \text{ as campanhas publicitárias possuem performance igual.} \\ H_1 : & p_1 \neq p_2, \text{ as campanhas publicitárias possuem performance diferente.} \end{cases}$$

Sob H_0 a estatística de teste é

$$Z = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}_c(1-\widehat{p}_c)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Tem–se que

$$z_{obs} = \frac{0,8333 - 0,6846}{\sqrt{0,7643(1-0,7643)\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{260}\right)}} = \frac{0,1487}{0,0360} = 4,1348,$$

a região crítica é dada por

$$RC_\alpha = (-\infty \ , -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2} \ , \infty),$$

considerando $\alpha = 0,05$, tem–se que $z_{0,025} = 1,96$, portanto

$$RC_{0,05} = (-\infty \ , -1,96) \cup (1,96 \ , \infty),$$

como $z_{obs} \in RC_{0,05}$ se rejeita a hipótese $p_1 = p_2$, logo a um nível de significância do 5% existe evidência para concluir que as campanhas publicitárias possuem performance diferente.

Exercício 3:

Considere as duas amostras seguintes, extraídas de duas populações normais.

Amostra 1	Amostra 2
4,34	1,87
5,00	2,00
4,97	2,00
4,25	1,85
5,55	2,11
6,55	2,31
6,37	2,28
5,55	2,07
3,76	1,76
-	1,91
-	2,00

Há alguma evidência para se concluir que a variância da população 1 seja maior do que a variância da população 2?

Solução:

Seja X : "observações correspondentes à amostra 1", $X \sim N(\mu_X, \sigma_1^2)$ e Y : "observações correspondentes à amostra 2", $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_2^2)$.

Da amostra se calculam as seguintes quantidades

$$\overline{x} = 5,1489, \;\; s_1^2 = 0,9027, \;\; n_1 = 9$$
$$\overline{y} = 2,0145, \;\; s_2^2 = 0,0294, \;\; n_2 = 11.$$

Se quer testar

$$\begin{cases} H_0: \;\; \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \text{ as variâncias das duas populações são iguais.} \\ \\ H_1: \;\; \sigma_1^2 > \sigma_2^2, \text{ a variância da população 1 é maior que a variância da população 2.} \end{cases}$$

A estatística de teste é

$$W = \frac{S_1^2}{S_2^2} \underset{H_0}{\sim} F_{(n-1;m-1)},$$

neste exercício, a estatística de teste $W \underset{H_0}{\sim} F_{(8;10)}$,

$$w_0 = \frac{0,9027}{0,0294} = 30,6752,$$

a região crítica é dada por

$$RC_\alpha = (f_2, \infty),$$

tal que $P(W \in RC_\alpha) = P(W > f_2) = \alpha$, logo considerando $\alpha = 0,05$, $f_2 = 3,0717$ e portanto

$$RC_{0,05} = (3,0717, \infty).$$

Como $w_0 \in RC_{0,05}$ se rejeita a hipótese nula, a um nível de significância do 5% existe evidência para concluir que a variância da população 1 é maior que a variância da população 2.

Exercício 4:

Um fundo de investimento está analisando duas empresas para fazer uma aquisição. O valor total das ações da empresa A tem um valor de mercado maior que a empresa B. Como a empresa B é mais barata, se a rentabilidade for a mesma então ela deve ser adquirida. Desta forma, os analistas estão interessados em testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0: & \mu_A = \mu_B, \\ \\ H_1: & \mu_A > \mu_B, \end{cases}$$

onde μ_A e μ_B são os retornos médios das ações da empresa A e B respectivamente. Os analistas sabem que a distribuição dos retornos seguem uma distribuição normal. Os resultados dos relatórios financeiros dos retornos mensais mostram $\overline{x}_A = 3,28$ e $s_A^2 = 4,02$ com $n_A = 12$ enquanto que $\overline{x}_B = 1,73$ e $s_B^2 = 3,89$ com $n_B = 8$.

a) Considerando que as empresas atuam no mesmo segmento de mercado, isto é, possuem o mesmo risco $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, há evidência para acreditar que as empresas têm os mesmos rendimentos? Use $\alpha = 0,05$.

b) Considerando o caso em que os riscos não sejam iguais, há mudança na avaliação dos rendimentos quando comparado ao item a)? Use $\alpha = 0,05$.

Solução:

Seja X : "retornos da empressa A", $X \sim N(\mu_A; \sigma_A^2)$ e Y :"retornos da empressa B", $Y \sim N(\mu_B; \sigma_B^2)$.

a) Supondo $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, a estatística de teste é dada por

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \underset{H_0}{\sim} t_{(n_A+n_B-2)},$$

em que

$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2},$$

com os dados do exercício

$$s_p^2 = \frac{11(4,02) + 7(3,89)}{18} = 3,9694.$$

A estatística de teste observada é

$$t_{obs} = \frac{3,28 - 1,73}{\sqrt{3,9694}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}} = \frac{1,55}{0,9094} = 1,7045.$$

A região crítica é dada por

$$RC_\alpha = (t_{\alpha, n_A+n_B-2}\ , \infty),$$

considerando $\alpha = 0,05$ tem–se que $t_{(18)} = 1,7341$, assim

$$RC_{0,05} = (1,7341\ , \infty),$$

como $t_{obs} \notin RC_{0,05}$ então não se rejeita a hipótese $\mu_A = \mu_B$, logo a um nível de significância do 5% existe evidência para concluir que as empresas têm os mesmos rendimentos.

b) Supondo $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$, os graus de liberdade são dados por

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{\frac{A^2}{n-1}+\frac{B^2}{m-1}},$$

em que $A = \frac{S_A^2}{n_A}$ e $B = \frac{S_2^2}{n_B}$. Logo, $A = 0,335$, $B = 0,4863$, portanto

$$\nu = \frac{(0,335+0,4863)^2}{\frac{0,335^2}{11}+\frac{0,4863^2}{7}} = \frac{0,6745}{0,0440} = 15,3296 \approx 15.$$

A estatística de teste é

$$T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \underset{H_0}{\sim} t_\nu,$$

Neste caso

$$t_{obs} = \frac{3,28 - 1,73}{\sqrt{\frac{4,02}{12}+\frac{3,89}{8}}} = \frac{1,55}{0,9062} = 1,7104.$$

A região crítica é dada por

$$RC_\alpha = (t_{\alpha,\nu}\ , \infty),$$

considerando $\alpha = 0,05$ tem–se que $t_{(15)} = 1,7531$, assim

$$RC_{0,05} = (1,7531\ , \infty),$$

como $t_{obs} \notin RC_{0,05}$ então não se rejeita a hipótese $\mu_A = \mu_B$, logo a um nível de significância do 5% existe evidência para concluir que as empresas têm os mesmos rendimentos. Não houve mudanças na avaliação dos rendimentos quando comparados ao item (a).