

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Exercício 1:

Para $X \sim N(50, 81)$ calcule

- (a) $P(X \leq 75)$ (b) $P(X \geq 60)$ (c) $P(X \leq 35)$
(d) $P(85 \leq X \leq 100)$ (e) $P(|X - 40| \leq 10)$ (f) $P(|X - 50| \geq 18)$.

Solução:

- (a) $P(X \leq 75)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 75) &= P\left(\frac{X - 50}{9} \leq \frac{75 - 50}{9}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{25}{9}\right) \\ &= P(Z \leq 2,78) = 0,9973 \end{aligned}$$

- (b) $P(X \geq 60)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X - 50}{9} \geq \frac{60 - 50}{9}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{10}{9}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,11) \\ &= 1 - 0,8665 = 0,1335 \end{aligned}$$

- (c) $P(X \leq 35)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 35) &= P\left(\frac{X - 50}{9} \leq \frac{35 - 50}{9}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{-15}{9}\right) \\ &= P(Z \leq -1,67) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,67) \\ &= 1 - 0,9525 = 0,0475 \end{aligned}$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

(d) $P(85 \leq X \leq 100)$

$$\begin{aligned}P(85 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{85 - 50}{9} \leq \frac{X - 50}{9} \leq \frac{100 - 50}{9}\right) \\&= P\left(\frac{35}{9} \leq Z \leq \frac{50}{9}\right) \\&= P(Z \leq 5,56) - P(Z \leq 3,89) \\&\approx 0\end{aligned}$$

(e) $P(|X - 40| \leq 10)$

$$\begin{aligned}P(|X - 40| \leq 10) &= P(-10 \leq X - 40 \leq 10) \\&= P(-20 \leq X - 50 \leq 0) \\&= P\left(-\frac{20}{9} \leq Z \leq 0\right) \\&= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2,22) \\&= 0,5 - (1 - P(Z \leq 2,22)) \\&= 0,5 - 1 + 0,9868 = 0,4868\end{aligned}$$

(f) $P(|X - 50| \geq 18)$

$$\begin{aligned}P(|X - 50| \geq 18) &= P(X - 50 \geq 18) + P(X - 50 \leq -18) \\&= P(Z \geq 2) + P(Z \leq -2) \\&= 1 - P(Z \leq 2) + 1 - P(Z \leq 2) \\&= 2 - 2(0,9772) = 0,0456\end{aligned}$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Exercício 2:

Na distribuição $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ encontre

1. $P(X \geq \mu + 2\sigma)$.
2. $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.
3. O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$.
4. O número a tal que $P(X > a) = 0,90$.

Solução:

1. $P(X \geq \mu + 2\sigma)$.

$$\begin{aligned}P(X \geq \mu + 2\sigma) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\&= P\left(Z \geq \frac{2\sigma}{\sigma}\right) \\&= P(Z \geq 2) \\&= 1 - P(Z \leq 2) \\&= 1 - 0,9772 = 0,0228\end{aligned}$$

2. $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.

$$\begin{aligned}P(|X - \mu| \leq \sigma) &= P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) \\&= P\left(\frac{-\sigma}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sigma}{\sigma}\right) \\&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\&= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\&= P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) \\&= 2P(Z \leq 1) - 1 \\&= 2(0,8413) - 1 = 0,6826\end{aligned}$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à
Estatística II
I semestre de 2018
Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

3. O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$.

$$\begin{aligned}P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) &= P(-a\sigma \leq X - \mu \leq a\sigma) \\&= P(-a \leq Z \leq a) \\&= P(Z \leq a) - P(Z \leq -a) \\&= P(Z \leq a) - (1 - P(Z \leq a)) \\&= 2P(Z \leq a) - 1.\end{aligned}$$

lembre que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$, logo

$$2P(Z \leq a) - 1 = 0,99 \Rightarrow P(Z \leq a) = \frac{1,99}{2} = 0,995 \Rightarrow a = 2,575$$

4. O número a tal que $P(X > a) = 0,90$.

$$\begin{aligned}P(X > a) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\&= P\left(Z > \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\&= P\left(Z < \frac{\mu - a}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

lembrando que, $P(X > a) = 0,90$, tem-se que

$$P\left(Z < \frac{\mu - a}{\sigma}\right) = 0,90 \Rightarrow \frac{\mu - a}{\sigma} = 1,285 \Rightarrow a = \mu - 1,285\sigma.$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Exercício 3:

Considere X uma v.a. Normal de valor médio 2 e variância 9. Seja I um intervalo do tipo $[4 - a, a]$. Determine o valor de a de modo que $P(X \in I) = 0.90$.

Solução:

$$\begin{aligned}P(X \in I) &= P(4 - a \leq X \leq a) \\&= P(X \leq a) - P(X \leq 4 - a) \\&= P\left(\frac{X - 2}{3} \leq \frac{a - 2}{3}\right) - P\left(\frac{X - 2}{3} \leq \frac{4 - a - 2}{3}\right) \\&= P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{2 - a}{3}\right) \\&= P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a - 2}{3}\right) \\&= P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right)\right) \\&= 2P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) - 1,\end{aligned}$$

lembre que, $P(X \in I) = 0.90$, logo

$$\begin{aligned}2P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) - 1 = 0,90 &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 2}{3}\right) = 0,95 \\ \frac{a - 2}{3} = 1,645 &\Rightarrow a = 3(1,645) + 2 = 6,935\end{aligned}$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Exercício 4:

Suponha que as idades de um certo grupo de estudantes seguem uma distribuição normal. Sabendo que 82% dos estudantes têm menos de 25 anos e que 70% têm idade superior a 20 anos, determine a proporção de estudantes com idade acima de 22 anos.

Solução:

Seja X = “idade de um certo grupo de estudantes”, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tal que,

$$P(X \leq 25) = 0,82 \quad \text{e} \quad P(X > 20) = 0,7.$$

Primeiro vamos encontrar os valores de μ e σ com as informações dadas acima.

$$\begin{aligned} P(X \leq 25) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

como $P(X \leq 25) = 0,82$,

$$\frac{25 - \mu}{\sigma} = 0,915 \Rightarrow \mu = 25 - 0,915\sigma \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - P\left(Z < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

lembre que, $P(X > 20) = 0,7$, assim,

$$P\left(Z < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0,3$$

$$\frac{20 - \mu}{\sigma} = 0,915 \Rightarrow \mu = 20 + 0,915\sigma \tag{2}$$

Fazendo (1) igual (2), tem-se que,

$$25 - 0,915\sigma = 20 + 0,915\sigma \Rightarrow 5 = \sigma(0,915 + 0,915) \Rightarrow \sigma = \frac{5}{1,83} = 2,732$$

substituindo σ em (1),

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à
Estatística II
I semestre de 2018
Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

$$\mu = 25 - 3,472(0,915) = 21,823,$$

assim,

$$\begin{aligned}P(X \geq 22) &= P\left(\frac{X - 21,823}{3,472} \geq \frac{22 - 21,823}{3,472}\right) \\&= P(Z \geq 0,051) \\&= 1 - P(Z \leq 0,051) \\&= 1 - 0,5199 = 0,4801.\end{aligned}$$

A proporção de estudantes com idade acima de 22 anos é de, 48,01%.

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Exercício 5:

O volume de comercialização na Bolsa de Valores de Nova York tem crescido nos últimos anos. Para as duas primeiras semanas de janeiro de 1998, o volume médio diário foi de 646 milhões de ações (*Barron's*, janeiro 1998). A distribuição de probabilidade do volume diário é aproximadamente normal com desvio padrão de cerca de 100 milhões de ações.

1. Qual é a probabilidade de que o volume de comercialização seja menor do que 400 milhões de ações?
2. Durante que porcentagem de tempo o volume de comercialização excedeu 800 milhões de ações?
3. Se a Bolsa quer emitir um *press release* sobre os 5% de dias de comercialização de pico, qual o volume acionará um *release*?

Solução:

1. Qual é a probabilidade de que o volume de comercialização seja menor do que 400 milhões de ações?

Seja X = “volume diário de comercialização na Bolsa de Valores de Nova York, em milhões de ações”, $X \sim N(646, 100^2)$,

$$\begin{aligned}P(X < 400) &= P\left(\frac{X - 646}{100} < \frac{400 - 646}{100}\right) \\&= P\left(Z < -\frac{246}{100}\right) \\&= P(Z < -2,46) \\&= 1 - P(Z < 2,46) \\&= 1 - 0,9931 = 0,0069.\end{aligned}$$

2. Durante que porcentagem de tempo o volume de comercialização excedeu 800 milhões de ações?

$$\begin{aligned}P(X > 800) &= P\left(\frac{X - 646}{100} > \frac{800 - 646}{100}\right) \\&= P\left(Z > \frac{154}{100}\right) \\&= P(Z > 1,54) \\&= 1 - P(Z \leq 1,54) \\&= 1 - 0,9382 = 0,0618,\end{aligned}$$

MAE0229 – Introdução à Probabilidade e à Estatística II

I semestre de 2018

Lista de exercícios 1 - Revisões - C A S A (gabarito)

Durante 6,18% do tempo o volume de comercialização excedeu 800 milhões de ações.

3. Se a Bolsa quer emitir um *press release* sobre os 5% de dias de comercialização de pico, qual o volume acionará um *release*?

Se quer saber o valor de a tal que, $P(X > a) = 0,05$,

$$\begin{aligned}P(X > a) &= P\left(\frac{X - 646}{100} < \frac{a - 646}{100}\right) \\&= P\left(Z > \frac{a - 646}{100}\right) \\&= 1 - P\left(Z < \frac{a - 646}{100}\right)\end{aligned}$$

lembrando que, $P(X > a) = 0,05$,

$$\begin{aligned}1 - P\left(Z < \frac{a - 646}{100}\right) &= 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a - 646}{100}\right) = 0,95, \\ \frac{a - 646}{100} &= 1,645 \Rightarrow a = 646 + 100(1,645) = 810,5.\end{aligned}$$

Um volume de comercialização de 810,5 milhões de ações acionará um *release*.