MAE0229 - Introdução à Probabilidade e à Estatística II

1° sem de 2018

Lista de Exercícios 2 – Estimação I **Entrega dia 09/04/2018**

1. Numa empresa financeira, o lucro gerado por cada investimento realizado, no último ano, tem um valor médio de R$ 24 600 e um desvio padrão de R$ 10 800. Considere uma amostra aleatória de 100 investimentos. Determine:

   (a) A distribuição da média amostral.

   (b) A probabilidade da média amostral exceder R$ 30 000.

   (c) A probabilidade da média amostral estar entre R$ 21 000 e R$ 25 500.

   (d) A distribuição do lucro total amostral.

   (e) O 90º percentil do lucro total amostral.

2. Numa pesquisa de mercado, desejamos estimar a proporção de pessoas que compram determinado sabonete.

   (a) Que tamanho de amostra devemos recolher para que, com probabilidade 0,9 a proporção amostral não se desvie do verdadeiro valor por mais do que 0,05?

   (b) Se tivermos informação adicional de que a aceitação do sabonete é no mínimo 0,8, qual deve ser então o tamanho da amostra?

   (c) Decidimos recolher uma amostra de tamanho 81. Qual o erro máximo que cometemos com probabilidade 0,9?

   (d) Para a amostra de tamanho 81, qual a probabilidade de que o erro máximo seja 0,08, quando $p = 0,4$?

3. Seja X uma variável aleatória com média μ e variância $\sigma^2 = 400$. Definimos a variável $EA = \overline{X} - \mu$ como sendo o erro amostral da média.

   (a) Determine $E(EA)$ e $Var(EA)$.

   (b) Que proporção das amostras de tamanho 25 terão erro amostral absoluto maior do que 2 unidades?

   (c) E que proporção das amostras de tamanho 100?

(d) Neste último caso, qual o valor de d, tal que $P(|EA| > d) = 1\%$?

(e) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a uma unidade?

4. A duração de um certo tipo de equipamento, em milhares de horas, pode ser bem representada por uma variável aleatória X, com $E(X) = 2\theta$ e $Var(X) = 2\theta^2$. Com base numa amostra aleatória simples de dimensão n, definiram-se os seguintes estimadores para θ:

$$T_1 = \frac{\overline{X}}{2} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \frac{2 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{2n}.$$

a) Verifique se T_1 e T_2 são estimadores não viesados para θ.

b) T_1 e T_2 são estimadores consistentes para θ?

5. Suponha que dois economistas estimem μ (despesa familiar média com alimentação) com dois estimadores não viesados $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ (estatisticamente independentes). O segundo economista é menos cuidadoso que o primeiro, de maneira que o desvio padrão de $\hat{\mu}_2$ é cinco vezes maior do que o de $\hat{\mu}_1$. Solicitado a informar sobre como combinar $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ para obter uma estimativa global publicável, um grupo de estatísticos apresentou as seguintes propostas:

i) $\hat{W}_1 = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)$;

ii) $\hat{W}_2 = \frac{1}{5}(4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)$;

iii) $\hat{W}_3 = \frac{1}{6}(5\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)$;

iv) $\hat{W}_4 = \hat{\mu}_1$.

a) Quais dos estimadores são não viesados?

b) Disponha esses estimadores por ordem decrescente de eficiência.

c) Determine a combinação linear $a\hat{\mu}_1 + (1-a)\hat{\mu}_2, \quad 0 \leq a \leq 1$ mais eficiente possível como função de a.

6. Uma variável aleatória tem distribuição Gama se a sua f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \ \alpha > 0 \ \lambda > 0 \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases},$$

onde α é o chamado parâmetro de forma e λ é o parâmetro de taxa e $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} \, du$, $\alpha > 0$ é a função Gama.

Sejam X_i, $i = 1, \ldots, n$ as componentes de uma amostra aleatória desta distribuição representando o tempo entre duas ocorrências consecutivas de um abalo sísmico. Sabendo que $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $E(X^2) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$, determine, pelo método dos momentos, os estimadores de α e λ.

7. Seja X uma v.a. com distribuição exponencial deslocada,

$$f(x) = \lambda \exp\{-\lambda(x-\tau)\} \quad \text{onde } x > \tau > 0 \text{ e } \lambda > 0.$$

Considere $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n. Determine o estimador de máxima verossimilhança de λ, admitindo que τ é conhecido.