MAE0229 - Introdução à Probabilidade e à Estatística II

Lista de Exercícios 3 - 1°sem de 2018 Classe

Profa. Lígia Henriques-Rodrigues

1. Considere uma população normal e a estatística T definida, para amostras de dimensão 2, da seguinte forma:

$$T = \frac{X_1 + 2X_2}{2}$$

   (a) Determine a distribuição amostral de T e os respetivos parâmetros.

   (b) T é um estimador não viesado para μ? Calcule o viés e o EQM do estimador T.

   (c) Proponha um novo estimador para μ que não seja viesado.

2. Para o parâmetro θ de certa população, foram indicados dois estimadores: $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$. Diga qual preferiria, sabendo que:

$$E[\hat{\theta}_1] = \frac{n+1}{n}\theta \qquad Var[\hat{\theta}_1] = \frac{k}{n}\theta$$

$$E[\hat{\theta}_2] = \frac{n+1}{n}\theta \qquad Var[\hat{\theta}_2] = \frac{k}{n+3}\theta,$$

onde k é uma constante.

3. Com base em amostras de tamanho $n = 3$, provenientes de uma população normal, considere os seguintes estimadores para a média μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3 \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_3$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 \qquad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

   (a) Compare os estimadores propostos quanto ao viesamento e eficiência.

   (b) Calcule a estimativa fornecida por cada um deles, com base na amostra: (7,8; 8,8; 6,7).

4. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro β ($\beta > 0$) de uma população com distribuição exponencial, isto é, cuja f.d.p. é a seguinte

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} .$$

5. O número de falhas por mês de um certo tipo de componentes segue distribuição de Poisson de parâmetro λ. Ensaiaram-se 8 desses componentes, tendo-se obtido o respectivo número de falhas durante um mês: (3; 1; 6; 4; 1; 3; 0; 2).

   (a) Mostre que o estimador de máxima verossimilhança de λ coincide com o estimador de λ usando o método dos momentos.

   (b) Com base no número de falhas observado, calcule o valor comum da estimativa de máxima verossimilhança e dos momentos de λ.

6. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma distribuição com f.d.p. dada por

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1; \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

   (a) Determine, pelo método dos momentos, o estimador de θ.

   (b) Determine, pelo método de máxima verossimilhança, o estimador de θ.

7. Seja X uma v.a. com a seguinte função de probabilidade:

$$P_\alpha(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \alpha, & x = 0, 2, 4 \\ \alpha, & x = 1, 3, 5 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \qquad \text{com } 0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{3} \quad .$$

   (a) Determine, pelo método dos momentos, um estimador para α.

   (b) Verifique se o estimador encontrado é viesado e consistente.

   (c) Será melhor o estimador encontrado em a) ou o estimador $\hat{\alpha} = \dfrac{X_1 + X_n - 4}{6}$.

   (d) Considerando a amostra $(1, 0, 5, 2, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 5, 2)$, determine uma estimativa para α pelo método dos momentos.