MAE0229 -Introdução à Probabilidade e à Estatística II

Prof. Lígia Henriques-Rodrigues

Prova # 1 – 23 abril de 2018

Questão	Valor
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome: ______________________________ **Nro. USP:** ______________

Observações:

- Não destaque as folhas.
- Organize suas respostas.
- Não serão fornecidas folhas adicionais.
- Use todo o espaço disponível (frente e verso).

Fórmulas:

- Média: $\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$
- Variância: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2)$.
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$ e $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- $n = \left(\frac{\sigma z_\gamma}{\epsilon}\right)^2; \qquad n = \frac{p(1-p)z_\gamma^2}{\epsilon^2}$.
- Se $X \sim B(n,p)$, então, quando n é grande, e sendo $\hat{p} = \frac{X}{n}$, $\hat{p} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $1 \leq i \leq n$, σ^2 conhecida, então $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, i.e., $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $1 \leq i \leq n$, com σ^2 desconhecida então $\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.
- Se n é grande, $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$, conhecida, então $\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
- Se n é grande, $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$, desconhecida, então $\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\right)$.
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $1 \leq i \leq n$, com μ desconhecido, então $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

---

1. *(valor: 2,5)* Numa empresa financeira, o lucro gerado por cada investimento realizado, no último ano, tem um valor médio de R$ 25 mil e um desvio padrão de R$ 11 mil. Considerando uma amostra aleatória de 100 investimentos, determine:

   a) A probabilidade do lucro total amostral exceder R$ 2650 mil.

   b) A probabilidade da média amostral estar entre R$ 22 mil e R$ 25,5 mil.

2. *(valor: 2,5)* A duração de um certo tipo de equipamento, em milhares de horas, pode ser bem representada por uma variável aleatória X, com $E(X) = 2\theta$ e $Var(X) = 2\theta^2$. Com base numa amostra aleatória simples de dimensão n, definiram-se os seguintes estimadores para θ:

$$T_1 = \frac{\overline{X}}{2} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \frac{2 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{2n}.$$

   a) Verifique se T_1 e T_2 são estimadores não viesados para θ.

   b) T_1 e T_2 são estimadores consistentes para θ?

3. *(valor: 2,5)* Um determinado banco deseja ter informação sobre o tempo de utilização de seus caixas eletrônicos pelos clientes, em determinada região, nos fins de semana. Mais especificamente, deseja estimar a proporção p de usuários dessa região, que demoram 2 minutos ou mais para realizarem suas operações. Uma amostra aleatória de clientes que utilizam caixas eletrônicos em fins de semana nessa região será coletada, e o tempo de utilização de cada um será registrado.

   a) Qual deve ser o tamanho da amostra, para que o erro de sua estimativa seja no máximo 0,08 com um grau de confiança de 0,85?

   b) A direção do banco sabe que, nas condições descritas, essa proporção p não ultrapassa 15 %. Com essa informação seria possível considerar em *a)* uma amostra de tamanho menor? Se sim, de quanto? Se não, por quê?

   c) Uma amostra de 80 clientes forneceu as seguintes medidas desse tempo (em minutos): 1,2; 1,2; 1,1; 1,3, 1,5; 0,9, 2,0; 1,3; 1,4; 1,6; 1,6; 1,3; 2,2; 1,6; 1,0; 0,8; 1,5; 2,3; 1,7; 1,6; 2,4; 1,2; 1,2; 1,0; 0,9; 2,2; 1,7; 1,5; 1,3; 1,2; 1,9; 0,9; 1,3; 1,3; 1,8; 1,3; 2,7; 1,4; 0,9; 1,2; 1,3; 2,4; 2,1; 1,0; 1,0; 1,1; 1,6; 1,3; 1,1; 1,9; 1,1; 2,2; 2,1; 1,7; 1,5; 0,9; 2,0; 1,1; 1,4; 1,6; 1,4; 1,7; 2,3; 1,6; 1,0; 0,8; 1,5; 1,3; 2,7; 1,2; 0,9; 1,2; 1,3; 1,4; 2,8; 1,0; 1,0; 1,1; 1,6; 1,3.
   Dê uma estimativa pontual para p e, com base nela, construa o intervalo de 90 % de confiança otimista para p.

4. *(valor: 2,5)* Admita que o salário pago por uma determinada empresa a seus funcionários segue uma distribuição normal. Selecionaram-se aleatoriamente 10 funcionários da empresa e registraram-se seus salários, tendo-se obtido um salário médio de R$3400 e um desvio padrão de R$1015.

   a) Sabendo que o desvio padrão populacional é de R$1000, determine o intervalo de confiança para média populacional dos salários pagos pela empresa com um coeficiente de confiança $\gamma = 0{,}95$.

   b) Admitindo que o desvio padrão populacional é desconhecido, determine o intervalo de confiança para média populacional dos salários pagos pela empresa com um coeficiente de confiança $\gamma = 0{,}95$.

   c) Construa um intervalo de confiança para a desvio padrão populacional dos salários pagos pela empresa com um coeficiente de confiança $\gamma = 0{,}95$.