Introdução à Probabilidade e à Estatística II

Testes de Hipóteses I

Lígia Henriques-Rodrigues

MAE0229 – 1º semestre 2018

1. Introdução

Neste capítulo pretendemos resolver a seguinte questão:

Feita uma determinada afirmação sobre um parâmetro de uma população, desejamos saber se os resultados experimentais provenientes de uma amostra contrariam ou não tal afirmação.

Objetivo do teste estatístico de hipóteses: Fornecer uma metodologia que nos permita verificar se os dados amostrais trazem evidências que apoiem ou não uma hipótese (estatística) formulada.

A ideia central deste procedimento é supor verdadeira a hipótese em questão e verificar se a amostra observada é "verossímel" nessas condições.

Etapas:

- formular duas hipóteses que temos interesse em testar;
- observar os dados experimentais relacionados com o problema;
- utilizar um procedimento estatístico para tomada de decisão.

Contexto:

Seja $(\mathscr{X}, \mathscr{P})$ o modelo estatístico paramétrico com $\mathscr{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$

Hipóteses

Definição

Uma hipótese estatística é uma afirmação acerca de um parâmetro de uma população.

Hipótese Nula (H_0): afirmação sobre o parâmetro contra a qual estaremos buscando evidência nos dados amostrais.

Exemplo: $H_0: \ \theta = 0,28$

Hipótese Alternativa (H_1): afirmação sobre o parâmetro que esperamos ser verdadeira.

Exemplo: $H_1: \ \theta = 0,25$

Exemplo - Lançamento de uma moeda:

Suponha que queremos avaliar se uma moeda é honesta. Neste caso, as hipóteses são:

$$H_0 : \text{A moeda é honesta} \quad \textit{versus} \quad H_1 : \text{A moeda não é honesta}$$

As hipóteses anteriores podem ser rescritas utilizando a linguagem estatística. Sendo $X \sim Ber(\theta)$, com θ a probabilidade de sair cara,

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \textit{versus} \quad H_1 : \theta \neq \frac{1}{2}.$$

Num teste de hipóteses, as hipóteses H_0 e H_1 dividem o espaço paramétrico Θ em dois sub-espaços, Θ_0 associado a H_0 e Θ_1 associado a H_1.

As hipóteses são classificadas em função da cardinalidade do sub-espaço paramétrico associado.

Assim,

Se $\#\Theta_i = 1$, a hipótese H_i $(i = 0, 1)$ diz-se simples.

Se $\#\Theta_i \neq 1$, a hipótese H_i $(i = 0, 1)$ diz-se composta.

Nota: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\emptyset = \Theta_0 \cap \Theta_1$

No caso mais geral, pretende-se testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad versus \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad versus \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad versus \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad versus \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

dependendo da informação que o problema traz.

Exemplo: Considere que uma pessoa está sendo acusada de cometer um crime.

Podemos considerar as seguintes hipóteses:

- H_0: o suspeito não é culpado
- H_1: o suspeito é culpado

Se houver evidências de que o suspeito cometeu o crime, dizemos que ele é culpado (digitais na arma, cabelo no local do crime, etc).

Se não houver evidências de que o suspeito cometeu o crime, dizemos que ele é inocente.

Erros na decisão

Note que apesar de todas as evidências incriminando o suspeito, o suspeito pode ser inocente.

Se o suspeito não cometeu o crime, e for considerado culpado estamos cometendo um erro. (ERRO TIPO I)

Note que apesar de não encontrarmos evidências incriminando o suspeito, o suspeito pode ser culpado.

Se o suspeito cometeu o crime e for considerado inocente estamos cometendo um erro. (ERRO TIPO II)

	Não cometeu o crime	Cometeu o crime
julgado inocente	ACERTO	ERRO TIPO II
julgado culpado	ERRO TIPO I	ACERTO

Exemplos:

Podemos formular as seguintes hipóteses de interesse:

- H_0 : O consumo de leite não aumenta o nível de cálcio nos ossos;
  H_1 : O consumo de leite aumenta o nível de cálcio nos ossos.
- H_0 : O antibiótico não faz efeito;
  H_1 : O antibiótico faz efeito.
- H_0 : A população não está envelhecida;
  H_1 : A população está envelhecida.

Erros na decisão

	Situação Real	
Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão Correta
Não Rejeitar H_0	Decisão Correta	Erro tipo II

Considerando as hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \textit{versus} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

Erro de tipo I: Rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira

$$\alpha = \alpha(\theta_0) = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira});$$

Erro de tipo II: Não rejeitar a hipótese nula quando esta é falsa

$$\beta = \beta(\theta_1) = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}).$$

A importância dos erros de tipo I e tipo II

Nas aplicações práticas, o erro tipo I é socialmente mais importante que o erro tipo II. Assim, devemos tomar como H_0 aquela hipótese, que, rejeitada, conduza a um erro de tipo I mais importante de evitar.

Exemplo: Suponha um experimento para se determinar se determinado produto é cancerígeno. Após realizado o teste, podemos concluir: (i) A é cancerígeno ou (ii) A não é cancerígeno.
A hipótese a ser testada deve ser:

$$H_0 : \text{ A é cancerígeno},$$

pois a probabilidade de erro na rejeição dessa hipótese, se ela for verdadeira, deve ser um valor muito pequeno.

Assim, na realização dos testes, controlaremos o erro tipo I, procurando diminuir a probabilidade de sua ocorrência.

Num teste de hipóteses é desejável que α e β sejam os menores possíveis, uma vez que representam as probabilidades de tomar decisões incorretas.

No entanto, dada uma dimensão da amostra, *n*, não é possível minimizar simultaneamente α e β. Assim:

$$\text{Se } \alpha \text{ diminui} \Longrightarrow \beta \text{ aumenta;}$$
$$\text{Se } \beta \text{ diminui} \Longrightarrow \alpha \text{ aumenta.}$$

A minimização simultaneamente de α e β pode ser obtida aumentando o tamanho da amostra, isto é, recolhendo mais informação.

Região Crítica ou de Rejeição – RC e Decisão

O objetivo do teste de hipóteses é dizer, usando uma estatística $\hat{\theta}$, se a hipótese H_0 é ou não aceitável. Esta decisão é tomada através da consideração de uma região crítica ou de rejeição, RC.

A RC é construída sob a validade da hipótese nula e é constituída por todos os valores da estatística, $\hat{\theta}$, desfavoráveis a (que levam à rejeição de) H_0,

$$P(\hat{\theta} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha,$$

com α fixado a priori.

Seja $\hat{\theta}_{obs}$, o valor observado da estatística

- Se $\hat{\theta}_{obs} \in \quad \mathrm{RC} \quad \Rightarrow$ Rejeitamos H_0
- Se $\hat{\theta}_{obs} \notin \quad \mathrm{RC} \quad \Rightarrow$ Não rejeitamos H_0

Relação entre a hipótese alternativa e a RC

Se $H_1 : \theta \neq \theta_0$ – teste bilateral $\Rightarrow$ RC é uma reunião de caudas;

Se $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 < \theta_0)$ – teste unilateral à esquerda$\Rightarrow$ RC é uma cauda à esquerda;

Se $H_1 : \theta > \theta_0$ ou $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ – teste unilateral à direita$\Rightarrow$ RC é uma cauda à direita.

Função poder do teste - hipóteses simples

A função poder do teste é definida por

$$\pi(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0|\theta) = P_\theta(RC), \quad \forall\theta \in \Theta.$$

Quando $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, e $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, temos

$$\pi(\theta_0) = P(\text{rejeitar } H_0|\theta_0) = P_{\theta_0}(RC) = \alpha$$

e

$$\pi(\theta_1) = P(\text{rejeitar } H_0|\theta_1) = P_{\theta_1}(RC) = 1 - \beta$$

Logo, para hipóteses simples,

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha, & \theta = \theta_0 \\ 1 - \beta, & \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Procedimento geral para a construção de um teste de hipóteses

- **Passo 1:** Definir as hipóteses H_0 e H_1 a serem testadas;
- **Passo 2:** Escolher a estatística que será utilizada para testar H_0;
- **Passo 3:** Fixe a probabilidade α de erro de tipo I e construa a RC;
- **Passo 4:** Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística do teste;
- **Passo 5:** Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário, rejeite H_0.