MAC 5771 - MAC 0452 - IME - USP

Lista de exercícios nº 3

31.5.2024 - prazo para entrega: 10.6.2024

Problema 1 *Mostre que* $K_{m,n}$ *é* k*-lista colorável, para todo* $k \geq \min\{m, n\}+1$.

Problema 2 *Mostre que em toda* k*-coloração de um grafo* k*-cromático existe um vértice de cada cor que é adjacente a vértices de todas as outras cores. Conclua que todo grafo* k*-cromático contém* k *ou mais vértices de grau* $k-1$ *ou mais.*

Problema 3 *Mostre que se* u *e* v *são vértices não adjacentes de um grafo crítico então* $N(u) \not\subseteq N(v)$. *Conclua que um grafo* k*-crítico não pode ter exatamente* $k+1$ *vértices.*

Problema 4 *Suponha que temos* k *vértices distintos* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *em um grafo orientado* D. *Queremos ter* k *branchings* B_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, *tais que cada* B_i *é* x_i*-enraizado e todos são dois a dois disjuntos nos arcos. Dê e prove uma caracterização para a existência dos* k *branchings.*

Problema 5 *Seja* G *um grafo simples com grau mínimo* $\delta \geq 3$ *e seja* e *uma aresta de* G. *Prove que se* $G/e \simeq K_5$ *então* G *tem um subgrafo* $H \simeq K_{3,3}$. *Conclua que o grafo de Petersen tem um minor isomorfo a* $K_{3,3}$.

Problema 6 *Mostre que o* K_7 *não tem uma imersão no plano projetivo e o* K_8 *não tem imersão no toro.*

Problema 7 *Seja* G *um grafo 2-aresta-conexo e seja* e *uma aresta de* G. *Mostre que se* G/e *admite um* k*-fluxo então* G *admite um* $(k+1)$*-fluxo.*

Problema 8

(i) *Considere um grafo simples* G, *não bipartido, com* $n \geq 3$ *vértices e com* $m > \frac{1}{4}(n-1)^2 + 1$ *arestas. Prove que* G *tem um triângulo.*

(ii) *Para todo* n *ímpar,* $n \geq 3$, *determine um grafo simples não bipartido e sem triângulos, com* $m = \frac{1}{4}(n-1)^2 + 1$ *arestas.*