MAC 5771 - MAC 0452 - IME - USP

Lista de exercícios nº 4

24.6.2024 - prazo para entrega: 4.7.2024

Problema 1 *Considere a relação $\preceq$ em que $G \preceq H$ se e somente se G é um subgrafo de H. Prove que a quase-ordem $\preceq$ não é boa, nem mesmo se for restrita a árvores. Para isso, basta exibir uma sequência infinita que não tem um par bom.*

Problema 2 *Um grafo é de* <u>*intervalo*</u> *se existe um conjunto $\{I_v : v \in V(G)\}$ de intervalo reais tais que $uv \in E(G)$ se e somente se $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Uma decomposição arbórea $(T, \mathcal{V})$ é uma* <u>*decomposição linear*</u> *se a árvore T é um caminho. A* <u>*largura linear*</u> $\mathrm{pw}(G)$ *é a menor largura de todas as decomposições lineares de G.*

Teorema 1 (Fulkerson e Gross, 1965) *Um grafo é de intervalo se e somente se existir uma ordem linear de seus cliques tal que, para cada vértice v do grafo, os cliques contendo v são consecutivos dentro desta ordem.*

(i) *Prove que um grafo G tem uma decomposição linear em que todas as partes são completas se e somente se G é de intervalo.*

(ii) *Usando a parte anterior, mesmo que não a tenha feito, prove que*

$$\mathrm{pw}(G) = \min\{\omega(H) - 1 : G \preceq H \text{ e } H \text{ é de intervalo}\}.$$

Problema 3 *Lembre que C_n, $n \geq 3$, é o ciclo com n vértices. Prove que* $\mathrm{tw}(C_n) = 2$.

Problema 4 *Considere uma propriedade $\mathcal{P}$ de grafos finitos fechada sob a operação de minor. Deduza, pelo* GMT *(Graph Minor Theorem), que existe uma coleção finita $\mathcal{F}$ de grafos finitos tais que $G \in \mathcal{P}$ se e somente se para cada grafo $F \in \mathcal{F}$, nenhuma subdivisão de F é um subgrafo de G.*