Soluções – Lista nº 2

Lucchesi

26 de maio de 2024

Problema 1: Vamos mostrar a existência dos k branchings x_i-enraizados e disjuntos nos arcos se e somente se G tem k subárvores geradoras, disjuntas nas arestas.

É fácil ver que se tivermos os k branchings x_i-enraizados disjuntos nos arcos, para $i = 1, 2, \ldots, k$, então, considerando os subgrafos não orientados dos branchings, temos k subárvores geradoras de G, disjuntas nas arestas.

Reciprocamente, suponhamos que temos k subárvores geradoras de G, $T_1, T_2, \ldots, T_k$, disjuntas nas arestas. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, orientamos a árvore T_i em um branching x_i-enraizado, bastando para isso uma busca a partir de x_i (por exemplo, uma DFS).

O problema foi então reduzido à existência de k subárvores geradoras de G, disjuntas nas arestas. Pelo Teorema de Tutte-Nash-Williams, a condição necessária e suficiente é que, para toda partição $\mathcal{P}$ de V em blocos não vazios, $e(G/\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$.

Problema 2: Seja Q um ciclo hamiltoniano de um grafo G. Seja e uma aresta de $E(G) - E(Q)$. A aresta e é uma corda de Q. Assim, G tem um ciclo Q_e cuja única aresta fora de Q é a aresta e. Assim, $\triangle_{e \in E(G)-E(Q)} E(Q_e)$ induz um grafo par que contém todas as arestas de $E(G) - E(Q)$. Logo, G tem uma 2-circulação f_1 sobre $\mathbb{Z}_2$ cujo suporte inclui todas as arestas de $E(G) - E(Q)$. Outra 2-circulação sobre $\mathbb{Z}_2$, f_2, tem como suporte o conjunto $E(Q)$. Assim, (f_1, f_2) é uma circulação sem zeros sobre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Logo, G tem uma circulção sem zeros sobre $\mathbb{Z}_4$. Concluímos que G tem um 4-fluxo.

Problema 3: As seguintes afirmações são equivalente, como vimos em classe:

(i) O grafo tem uma cobertura com três subgrafos pares.

(ii) O grafo tem uma circulação sem zeros sobre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(iii) O grafo tme uma circulação sem zeros sobre $\mathbb{Z}_8$.

(iv) O grafo tem um 8-fluxo.

Pela hipótese, podemos supor que todo grafo 3-aresta-conexo tem um 8-fluxo. Seja G um grafo 2-aresta-conexo, seja $S(G)$ o conjunto de arestas que pertencem a um 2-corte. Vamos provar, por indução em $|S(G)|$, que G tem um 8-fluxo (e portanto tem a cobertura com três grafos pares). Se $S(G)$ é vazio então G é 3-aresta-conexo e nada temos a provar. Vamos supor então que S tem um 2-corte $\partial(X) := \{e_1, e_2\}$. Suponhamos que $e_i := u_i v_i$, onde $u_i \in X$.

Seja H o grafo obtido pela contração da aresta e_1. Todo 2-corte de H é um 2-corte de G que não contém a aresta e_1. Portanto, $|S(H)| < |S(G)|$. Por indução, H tem um 8-fluxo. Sejam D_H a orientação de H e f_H a função que associa os valores aos arcos de H.

Vamos definir uma extensão de D_H para uma orientação D_G de G e uma extensão de f_H para uma função de pesos para os arcos de D_G.

A orientação de e_1 vai ser oposta à de e_2, ou seja, e_2 entra em X se e somente se e_1 sai de X. O valor de $f_G(e_1)$ será igual ao valor de $f_H(e_2)$.

Para todo conjunto de vértices X de um grafo, a soma dos fluxos líquidos de cada vértice de X é igual ao fluxo líquido de X. Portanto, em um grafo orientado D, se todos os nós de D, exceto talvez um, estão equilibrados, então utilizando o raciocínio acima com $X := V(D)$, concluímos que todos os vértices estão equilibrados.

Se considerarmos o grafo $G_1 := G/(X \to x)$, o único vértice que talvez não esteja equilibrado é o extremo de e_1 em $\overline{X}$. Portanto, esse vértice está equilibrado. Se considerarmos agora todo o grafo G, todos os vértices estão equilibrados, exceto talvez o extremo de e_1 em X. Concluímos que no grafo orientado D_G, f_G é um 8-fluxo.

Problema 4: Basta aplicar o Teorema de Thomassen, uma vez que todos os vértices estão na fronteira de uma face externa.

Problema 5: O grafo G do exercício anterior é um subgrafo de $K_{3,3}$. Portanto, $\chi_L(K_{3,3}) \geq \chi_L(G) = 3$. Logo, precisamos demonstrar que, para toda função L que associa a cada vértice de $K_{3,3}$ um conjunto com três elementos, o grafo $K_{3,3}$ tem uma L-coloração.

Seja L uma tal função. O grafo $K_{3,3}$ tem um ciclo hamiltoniano $Q := (v_0, v_1, \ldots, v_5, v_0)$. O ciclo Q tem três cordas, a saber, $v_i v_{i+3}$, para $i = 0, 1, 2$. Vamos obter uma L-coloração φ de Q tal que $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_{i+3})$, para $i = 0, 1, 2$. É claro que φ é uma L-coloração de $K_{3,3}$. Vamos considerar dois casos, que dependem dos conjuntos $L(v_0)$ e $L(v_2)$ serem ou não disjuntos.

Vamos inicialmente supor que $L(v_0)$ e $L(v_2)$ não são disjuntos, seja c um elemento comum dos dois conjuntos. Então colorimos os vértices v_0 e v_2 com essa mesma mesma cor c e colorimos o vértice v_4 com alguma cor, d, do conjunto $L(v_4)$. O vértice v_1 pode ser colorido com alguma cor em $L(v_1) - c - d$. Os vértices v_j, $j = 3, 5$, também podem ser coloridos com uma cor em $L(v_j) - c - d$.

Vamos então supor que $L(v_0)$ e $L(v_2)$ são disjuntos. Vamos colorir v_i com uma cor c_i de $L(v_i)$, para $i = 0, 2$. Podemos colorir os vértices v_j, $j = 3, 5$, com uma cor $c_j \in L(v_j) - c_0 - c_2$. Agora colorimos o vértice v_4 com uma cor em $L(v_4) - c_3 - c_5$. Finalmente, colorimos o vértice v_1 com uma cor em $L(v_0) - c_0 - c_4$.