Soluções – Lista nº 3

Lucchesi

21 de junho de 2024

Problema 1 *Sem perda de generalidade, suponhamos que $m \leq n$. Então $k \geq m+1$. Seja (A, B) uma bipartição de $K_{m,n}$ tal que $|A| = m$ e $|B| = n$. Inicialmente colorimos todos os vértices de A. Cada vértice de B dispõe de uma lista com $m+1$ cores ou mais, portanto existe uma cor da sua lista que lhe pode ser atribuída. De fato, o grafo é k-lista colorável.*

Problema 2 *Seja G um grafo k-cromático. Suponha que um vértice v de cor c não tem um vizinho com a cor $c' \neq c$. Podemos então mudar a cor de v para c'. Se essa condição valer para todo vértice v de cor c, conseguiremos colorir o grafo com $k-1$ cores, uma contradição à hipótese que G é k-cromático. Portanto, algum vértice de G com cor c tem vizinho com cada uma das demais cores. Portanto, G tem um vértice de cor c com grau $k-1$ ou mais. Essa conclusão vale para cada cor c. De fato, o grafo tem k ou mais vértices com grau $k-1$ ou mais.*

Problema 3 *Seja G um grafo k-crítico. Suponha, por absurdo, que G tem dois vértices não adjacentes, u e v, tais que $N(u) \subseteq N(v)$. Como G é k-crítico, o grafo $G-u$ tem uma $(k-1)$-coloração. Como $N(u) \subseteq N(v)$ e u e v não são adjacentes, então podemos atribuir a u a mesma cor de v, obtendo assim uma $(k-1)$-coloração de G. Esta conclusão contradiz a hipótese que G é k-cromático.*

Suponha que G tem exatamente $k+1$ vértices e considere uma k-coloração de G. Então, precisamente dois vértices, digamos, u e v, usam uma mesma cor, cada um dos demais $k-1$ vértices usa uma cor exclusiva dele, uma das demais $k-1$ cores. Dado que G é crítico, pela primeira parte concluímos que $N(u) - N(v)$ tem um vértice, x e $N(v) - N(u)$ tem um vértice, y. Podemos então obter uma $(k-1)$-coloração de G, atribuindo a u a cor de y e a v a cor de x. Esta conclusão é uma contradição.

Problema 4 *Seja* $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. *Vamos obter o grafo orientado* F *a partir de* D *adicionando um novo vértice* x *e* k *arcos de* x *para cada um dos vértices de* X. *Evidentemente, existem os* k *branchings* x_i*-enraizados em* D *e disjuntos nos arcos se e somente se* F *tem* k *branchings* x*-enraizados e disjuntos nos arcos. Pelo Teorema de Edmonds, existem os* k *branchings de* F *se e somente se*

$$d_F^+(Y) \geq k \text{ para todo } Y \subset V(F) \text{ com } x \in Y.$$

Assim, D *tem os* k *branchings se e somente se*

$$d_D^+(Y) + |X - Y| \geq k \text{ para todo } Y \subset V(D).$$

Esta conclusão equivale à seguinte afirmação:

$$d_D^+(X) \geq |X \cap Y| \text{ para todo } Y \subset V(D).$$

Problema 5 *Sejam* u_1 *e* u_2 *os extremos de* e *e seja* w *o vértice de contração de* G/e. *Sejam* $d(u_1)$ *e* $d(u_2)$ *os graus dos vértices de* u_1 *e* u_2 *em* G, *respectivamente. Seja* d *o grau de* w *em* G/e. *Dado que* $G/e \simeq K_5$, *temos que* $d = 4$. *Por hipótese,* $\delta \geq 3$, *logo*

$$4 = d = d(u_1) + d(u_2) - 2 \geq 4.$$

Logo, $d(u_1) = 3 = d(u_2)$. *Seja* $X := \{v_i : 1 \leq i \leq 4\}$ *o conjunto de vértices de* $G - u_1 - u_2$. *O subgrafo* $G[X]$ *gerado por* G *é isomorfo a* K_4. *Dado que* $G/e \simeq K_5$, *temos que o conjunto dos dois vizinhos de* u_1 *em* G/e *e o conjunto dos dois vizinhos de* u_2 *em* G/e *são disjuntos. Sem perda de generalidade, suponhamos que* u_1 *é adjacente a* v_2 *e* v_4, *enquanto* u_2 *é adjacente a* v_1 *e a* v_3. *Então o grafo* $G - v_1v_3 - v_2v_4$ *é isomorfo a* $K_{3,3}$, *com bipartição* $(\{u_1, v_1, v_3\}, \{u_2, v_2, v_4\})$.

Seja C *um 5-corte do grafo de Petersen,* $\mathbb{P}$. *Seja* G *o grafo obtido de* $\mathbb{P}$ *pela contração de 4 arestas de* C. *Seja* e *a quinta aresta de* C, *que não foi contraída. O grafo* G/e *é isomorfo a* K_5. *Portanto, o* $K_{3,3}$ *é um minor de* $\mathbb{P}$.

Problema 6 *Conforme visto em classe, em uma imersão celular de um grafo simples com* m *arestas e* n *vértices, numa superfície de característica de Euler* c, *temos que* $m \leq 3(n - c)$.

A característica de Euler do plano projetivo é igual a 1 e o K_7 *tem 21 arestas, logo,* $21 > 18 = 3(7 - 1) = 3(n - c)$. *Portanto, o* K_7 *não tem uma* *imersão no plano projetivo. Analogamente, o toro tem característica 0 e o K_8 tem 28 arestas, logo $28 > 24 = 3(8-0) = 3(n-c)$. Portanto, o K_8 não tem imersão no toro.*

Problema 7 *Sejam u e v os extremos de e, (D, φ) um k-fluxo de G/e. Se, no grafo $G-e$, (D, φ) não for uma circulação de $G-e$ sem zeros em $\mathbb{Z}_k$, então podemos orientar a aresta e e associar um fluxo a e de forma que o resultado seja uma circulação de G sem zeros em $\mathbb{Z}_k$. Nesse caso, concluímos que G tem um k-fluxo.*

A outra alternativa é que (D, φ) é uma circulação de $G-e$ sem zeros. Então $G-e$ tem um k-fluxo, (D_1, φ_1). Seja X o conjunto de vértices acessíveis a partir de v por caminhos orientados em D_1. Vamos considerar cortes em $G-e$. É claro que $\partial^+(X) = \emptyset$. Sabemos que

$$0 = \sum_{v \in X} [\varphi_1(\partial^+(v)) - \varphi_1(\partial^-(v))] = \varphi_1(\partial^+(X)) - \varphi_1(\partial^-(X)) = \varphi_1(\partial^-(X)).$$

Concluímos que $\partial(X) = \emptyset$. Dado que G é 2-aresta conexo, deduzimos que $u \in X$, pois caso contrário e seria uma aresta de corte de G. Seja P um caminho orientado de v a u em D. Acrescentamos uma unidade a $\varphi_1(f)$ para cada aresta f de P e associamos o peso 1 à aresta e, orientada de u para v. Obtemos assim um $(k+1)$-fluxo de G.

Problema 8

(i) *Seja G um grafo simples não bipartido com $n \geq 3$ vértices e com $m > \frac{(n-1)^2}{4} + 1$, arestas. Vamos mostrar que G tem um triângulo, de duas formas.*

1ª demonstração: por indução em n. A base corresponde ao caso em que $n = 3$. Neste caso, $m \geq 3$ e portanto G é um triângulo. Podemos então supor que $n \geq 4$ e também que a afirmação vale para grafos com menos vértices do que G.

Vamos inicialmente mostrar que o grau mínimo δ satisfaz a desigualdade $\delta < n/2$. Se $m \geq t(2,n)$ então, dado que G não é bipartido, concluímos pelo Teorema de Turán que G tem triângulos. Podemos portanto supor que $m < t(2,n)$. Assim, $\delta < 2t(2,n)/n$. Sabemos que

$$t(2,n) = \begin{cases} n^2/4, & \text{se } n \text{ for par} \\ (n^2-1)/4, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, $\delta < n/2$.

Seja v um vértice de G cujo grau é δ e seja H o grafo $G - v$. Sejam m_H e n_H o número de arestas e de vértices de H, respectivamente. Vamos mostrar que ou H tem um triângulo ou H é bipartido. Sabemos que $m > \frac{(n-1)^2}{4} + 1$. Portanto, $m \geq \frac{n^2-2n}{4} + 2$. Logo,

$$m_H = m - \delta > \frac{n^2 - 2n}{4} + 2 - n/2 = \frac{n^2 - 4n + 4}{4} + 1 = \frac{(n_H - 1)^2}{4} + 1.$$

Por indução, ou H tem um triãngulo ou H é bipartido. Podemos então supor que H é bipartido.

Vamos agora mostrar que v é um vértice de um triângulo de G. Seja (A, B) uma bipartição de H. Vamos contar o número r de pares de vértices (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$ tais que a e b não são adjacentes. O grafo H tem $m - \delta$ arestas, portanto $m_H > \frac{(n-1)^2}{4} + 1 - \delta$. Por outro lado, H, um grafo simples bipartido com $n - 1$ vértices, tem no máximo $t(2, n-1)$ arestas. Logo, $r < t(2, n-1) - (m - \delta)$. Dado que $t(2, n-1) \leq \frac{(n-1)^2}{4}$, deduzimos que

$$r < \frac{(n-1)^2}{4} - (\frac{(n-1)^2}{4} + 1 - \delta) = \delta - 1.$$

Assim $r \leq \delta - 2$ O número de pares de vizinhos de v é igual a $\frac{\delta(\delta-1)}{2}$, que é maior do que $\delta - 2$, para todo δ. Concluímos que pelo menos dois vértices adjacentes a v induzem, juntamente com o vértice v, um triângulo de v.

2ª demonstração: por hipótese G não é bipartido, portanto tem ciclos ímpares. Suponha, por absurdo, que G não tem triângulos. Então G tem ciclos ímpares com 5 ou mais arestas. Seja C um ciclo ímpar de G com o menor número possível de arestas. Seja ℓ o número de arestas de C.

Proposição 1 *Nenhum vertice de $G - C$ é adjacente a três ou mais vértices de G.*

Proof: Suponha que um vértice v de $G - C$ é adjacente a (pelo menos) três vértices de C. A soma dos comprimentos dos três segmentos internamente disjuntos definidos pelos três vértices é igual a ℓ. Portanto, v

pertence a três ciclos, C_i, $i = 1, 2, 3$ tais que

$$|C_1| + |C_2| + |C_3| = 6 + \ell.$$

Dado que ℓ é ímpar, temos que pelo menos um dos três ciclos é ímpar. Digamos que C_1 é ímpar. Então, dado que $|C_2|, |C_3| \geq 4$, temos que $|C_1| \leq 6 + \ell - 8 < \ell$. Contradição. $\square$

O número de arestas de $G - C$ é no máximo $(n - \ell)^2/4$, pelo Teorema de Turán. Assim, o número total de arestas m de G é no máximo

$$\ell + 2(n - \ell) + (n - \ell)^2/4 \leq 5 + 2(n - 5) + (n - 5)^2/4 = (n - 1)^2/4 + 1.$$

Contradição.

(ii) *Lembre que n é ímpar. E, claro, $n \geq 5$. Basta subdividir uma vez uma aresta do grafo de Turán $T(n - 1, K_3)$. Esse grafo terá ciclos ímpares de comprimento cinco ou mais e terá exatamente $(n-1)^2/4+1$ arestas.*