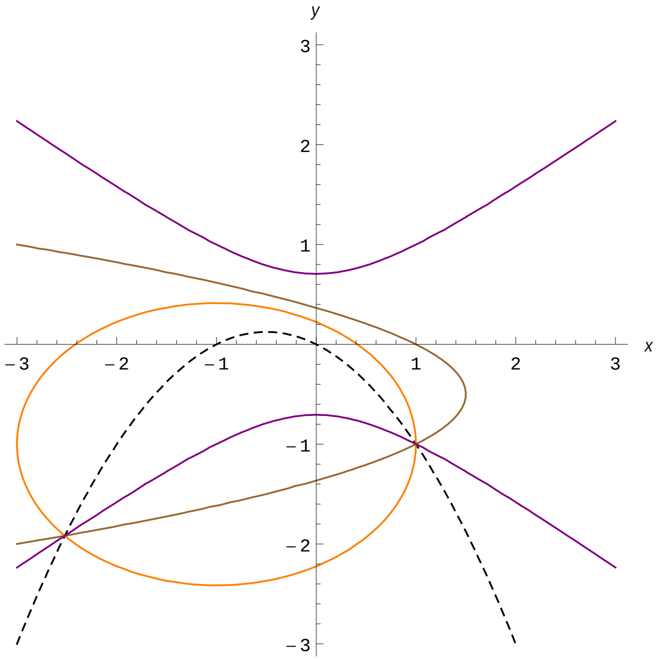
MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Primeira Prova — 29/08/2016 — Soluções

Questão 1 (Valor: $3,0$ pontos)**.** Seja f a função, definida em $\{(x,y,) \in \mathbb{R}^2 : x^2+x+2y \neq 0\}$, dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^2+2x+4y-1}{x^2+x+2y}.$$



Determine equações para as curvas de nível c de f quando $c = 0, 1$ e 2. Faça um esboço delas (em linha cheia) e da restrição no domínio (em pontilhado) ao lado.

Solução.

O domínio de f é todo o plano, exceto a parábola $x^2+x+2y=0$, ou seja, $y = -\dfrac{x^2+x}{2}$. As três curvas de nível solicitadas são as seguintes (excluindo-se os pontos onde interceptam a parábola pontilhada):

- $f^{-1}(0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y)=0 &\iff x^2+2y^2+2x+4y-1=0 \\ &\iff (x+1)^2+2(y+1)^2=4 \\ &\iff \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}=1 \text{ (elipse)} \end{aligned}$$

- $f^{-1}(1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y)=1 &\iff x^2+2y^2+2x+4y-1=x^2+2x+2y \\ &\iff x=1-2y^2-2y \text{ (parábola)} \end{aligned}$$

- $f^{-1}(2)$:

$$\begin{aligned} f(x,y)=0 &\iff x^2+2y^2+2x+4y-1=2x^2+2x+4y \\ &\iff -x^2+2y^2=1 \text{ (hipérbole)} \end{aligned}$$

Observação 0.1. Note que para o Tipo B, as curvas esboçadas são as mesmas, porém a elipse é a restrição no domínio (e portanto estaria pontilhada), enquanto a parábola pontilhada é a curva de nível 0.

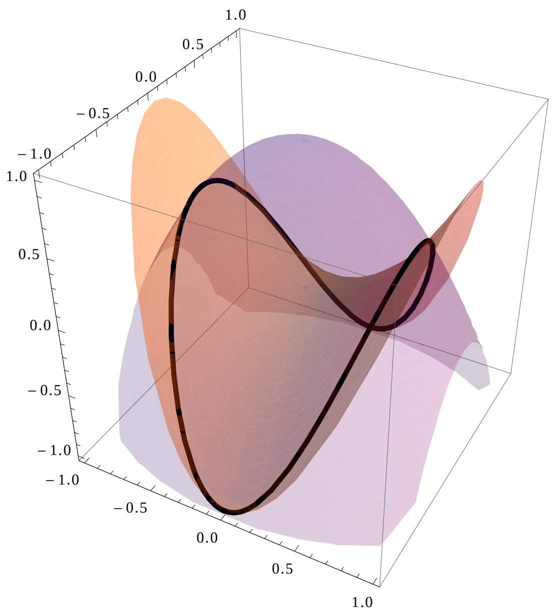
Questão 2 (Valor: $3,0 = 2,0 + 1,0$ pontos)**.** Seja C a curva dada pela interseção dos gráficos das funções $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $g(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$.

a. Determine uma parametrização para C.

b. Determine, caso existam, todos os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao eixo Ox. Escreva a equação da reta tangente em tais pontos.

Solução.

a. A curva é a interseção de um parabolóide hiperbólico com um parabolóide elíptico e pode ser visualizada na figura abaixo:



Uma parametrização para esta curva pode ser obtida igualando-se as funções f e g, ou seja, eliminando-se a coordenada z:

$$\begin{aligned} f(x,y) = g(x,y) &\iff x^2 - y^2 = 1 - x^2 - 2y^2 \\ &\iff 2x^2 + y^2 = 1, \end{aligned}$$

donde podemos escolher $x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Como $z(t) = x^2(t) - y^2(t)$ (ou $z(t) = 1 - x^2(t) - 2y^2(t)$) temos que $z(t) = \dfrac{1}{2}\cos^2(t) - \sin^2(t)$. Assim podemos parametrizar a curva C por

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2}\cos^2(t) - \sin^2(t)\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

b. Para que o vetor tangente à curva seja paralelo ao eixo Ox devemos ter $\gamma'(t_0) = \lambda(1,0,0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $\cos(t_0) = 0$ e $-3\cos(t_0)\sin(t_0) = 0$. Isto ocorre se e somente se $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ou $t_0 = \dfrac{3\pi}{2}$. Portanto temos dois pontos em C com a propriedade desejada, a saber $P = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, -1)$ e $Q = \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1, -1)$.

As equações das retas tangentes nesses pontos são, respectivamente

$$r_P \colon X = (0, 1, -1) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ e}$$
$$r_Q \colon X = (0, -1, -1) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que o vetor diretor escolhido é um mútiplo conveniente de $\gamma'(t_0)$.

Observação 0.2. Note que para o Tipo B, a parametrização de C tem as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ invertidas e portanto os pontos pedidos ocorrem quando $t_0 = 0$ ou $t = \pi$, ou seja $P = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ e $Q = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, sendo o vetor diretor das retas o mesmo apresentado acima.

Questão 3 (Valor: $4,0 = 2,0 + 1,0 + 1,0$ pontos).

a. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \dfrac{\sin(x-y)}{x^3-y^3}, & \text{se } x \neq y; \\ \dfrac{1}{3}, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Decida se f é contínua nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

b. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^{10}}{x-y^5}$ não existe.

c. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$.

Solução.

a. Podemos escrever $x^2 \dfrac{\sin(x-y)}{x^3-y^3} = \dfrac{x^2}{x^2+xy+y^2} \dfrac{\sin(x-y)}{x-y}$, para todo $x \neq y$.

Lembramos que f é contínua em (x_0,y_0) se e somente se $f(x_0,y_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Condiderando a curva $\gamma(t) = (t,0)$, contínua e passando pela origem, temos que

$$\lim_{t\to 0} f\big(\gamma(t)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t\times 0+0^2} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0} 1 \frac{\sin(t)}{t} = 1 \neq \frac{1}{3} = f(0,0)$$

e portanto f não pode ser contínua em $(0,0)$.

Analogamente, a continuidade de f no ponto $(1,1)$ equivale a $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) = \dfrac{1}{3}$. Deste modo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \cancelto{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}} \cancelto{1^{(*)}}{\frac{\sin(x-y)}{x-y}} = \frac{1}{3} = f(1,1),$$

donde f é contínua em $(1,1)$.

* justifica-se fazendo $t = x-y$, donde $(x,y)\to(1,1) \implies t\to 0$ e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin(x-y)}{x-y} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

b. Vamos considerar curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^{10}}{x-y^5}$. Elas satisfazem, para cada c na imagem de f, a equação $x^2+y^{10} = cx - cy^5$ para todo $x \neq y^5$. Observamos que, para qualquer nível c, impor $y = 0$ nos dá que $x = 0$ é uma solução, ou seja, qualquer curva de nível de f pode ser extendida continuamente a uma que passa pela origem (resolva a equação em x para cada y fixado, por exemplo).

Sejam então γ_1 e γ_2 parametrizações de tais extensões contínuas para níveis distintos c_1 e c_2 com $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = (0,0)$ para algum t_0. Temos então que

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\gamma_1(t)\big) = c_1 \neq c_2 = \lim_{t\to t_0} f\big(\gamma_2(t)\big),$$

donde concluimos que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^{10}}{x-y^5}$.

c. Fazendo $t = x^2+y^2$ temos que $(x,y)\to(0,0) \iff t\to 0$ e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-1}{t} \overset{(**)}{=} 1.$$

$^{(**)}$ justifica-se através da regra de L'Hospital, uma vez que obtemos uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$", e

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-e^{-t}}{1} = 1.$$

Observação 0.3. Note que para o Tipo B basta trocar y por $-y$ no item **a.** da questão.