Gabarito da Turma A

1a. questão: (3,5) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a. Determine as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c. f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

d. f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$? Justifique.

Solução:

a. Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3y^4 - x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^3y}{(x^2+3y^2)^2}$.

Em $(0,0)$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{0}{x^2-0}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ e

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y} = 0$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4 - x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+3y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ estão definidas em $\mathbb{R}^2$.

b. A $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$. De fato, seja a curva $\gamma(t) = (t,t)$, para $t \in \mathbb{R}$, que é contínua, tem sua imagem contida no domínio da f e $\gamma(t) = (0,0)$ somente para $t = 0$. Logo,
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x} f(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3t^4 - t^4}{(4t^2)^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8} \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

c. f não é diferenciável em $(0,0)$. Vejamos o porquê.

Como as derivadas parciais de f em $(0,0)$ existem, resta analisar o limite abaixo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{ítem a.}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+3y^2} - 0.x - 0.y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ e este último limite não existe.

De fato, denotando por $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{(x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ e considerando a curva γ do ítem b., temos

$\lim\limits_{t\to 0} g(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to 0} g(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{(t^2+3t^2)\sqrt{2t^2}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{4\sqrt{2}\,|t|}$ que não existe.

d. f é diferenciável para qualquer $(x,y) \neq (0,0)$, pois segundo o ítem a. as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, para $(x,y) \neq (0,0)$, são funções racionais e
por isso contínuas. Em consequência, f é diferenciável para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

2a. questão : (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$f(t^2+t,\ t+1) = t^2+2t+1, \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo-se que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,2) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2)$.

Solução: Como f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, vamos usar livremente que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sendo $x = x(t) = t^2+t$ e $y = y(t) = t+1$, e usando os fatos de f ser diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (t^2+t, t+1)$ ser diferenciável em $\mathbb{R}$, pela regra da cadeia obtemos da igualdade dada no enunciado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)).(2t+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).1 = 2t+2, \text{ ou ainda,}$$

$$(2t+1).\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) = 2t+2 \qquad \textbf{(I)}$$

Por serem as derivadas parciais de 2a. ordem de f contínuas, temos que as derivadas parciais de 1a. ordem de f são funções diferenciáveis, o que junto com a diferenciabilidade de γ, permite usarmos a regra da cadeia na igualdade **(I)** e obtermos:

$$2.\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \ + \ (2t+1).\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t),y(t)).(2t+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(t),y(t)).1\right) \ +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t),y(t)).(2t+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t),y(t)).1 = 2. \qquad \textbf{(II)}$$

Tomando $t=1$, obtemos que $(x(1),y(1)) = (2,2)$. Portanto, para $t=1$ em **(II)**, temos:

$$2.\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \ + \ 3.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2).3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2)\right) \ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2).3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2, \text{ou ainda}$$

$$2.\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \ + \ 9.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) + 3.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2) \ + 3.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2. \quad \textbf{(III)}$$

Substituindo os valores dados das derivadas parciais de 2a. ordem no ponto $(2,2)$ em (III), obtemos $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2) + 9.1 + 6.1 + 2 = 2$, donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \frac{-15}{2}.$$

3a. questão: (2,0) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = (t^3 + 1,\ -t,\ t^6 + 2t^3 - 2t^2 + 1).$$

Suponha que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que o ponto (3, 0, 10) pertence ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,\ -1,\ f(2,-1))$. Determine uma equação desse plano.

Solução: Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2, -1)$ é dada por

$$z = f(2,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)(y+1).$$

Como o ponto $(3, 0, 10)$ pertence a esse plano, então de sua equação acima obtemos que

$$10 = f(2,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)(3-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)(0+1),\ \text{que pode ser reescrito como:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 10 - f(2,-1). \qquad \textbf{(1)}$$

Por outro lado, por estar a curva $\gamma(t) = (t^3 + 1,\ -t,\ t^6 + 2t^3 - 2t^2 + 1)$, com $t \in \mathbb{R}$, contida no gráfico de f temos então que:

$$f(t^3+1, -t) = t^6 + 2t^3 - 2t^2 + 1,\ \text{com } t \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(2)}$$

Ainda mais, por serem diferenciáveis as funções f (em $\mathbb{R}^2$) e as componentes de γ (em $\mathbb{R}$), a regra da cadeia garante que o primeiro membro da igualdade **(2)** é derivável (em $\mathbb{R}$) e que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).(-1) = 6t^5 + 6t^2 - 4t. \qquad \textbf{(3)}$$

.

Para $t = 1$, obtemos $x(1) = 2$, $y(1) = -1$ e $f(2,-1) = 2$ e na equação **(3)** que

$$3\,\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 8.$$

Em resumo, obtivemos as equações: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 10 - 2 \\ 3\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 8 \end{cases}$.

Desse sistema resulta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 4.$

Portanto, uma equação do plano é $z = 2 + 4(x-2) + 4(y+1)$, ou seja, $4x + 4y - z - 2 = 0$.

4a. questão: (2,0) Sejam a função $f(x,y) = 2x^3 - 3y^2$ e $(x_0,\ y_0)$ um ponto em $I\!R^2$. Determine os pontos (x_0, y_0) que satisfazem as duas condições abaixo:

a. $\nabla f(x_0,\ y_0)$ é paralelo à reta tangente à curva $x^3y - 2xy^3 + xy + y^2 - 1 = 0$ no ponto $(1,-1)$;

b. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = 4\sqrt{5}$, onde $\vec{v}$ é o versor do vetor $(2,1)$.

Solução: Seja $h(x,y) = x^3y - 2xy^3 + xy + y^2 - 1$. A curva dada em **(a.)** é a curva de nível 0 de h. Como h é de classe $\mathcal{C}^1$ em $I\!R^2$ (pois é polinomial), temos que $\nabla h(1,-1)$ é ortogonal à curva dada no ponto $(1,-1)$. Portanto, com a hipótese de **(a.)** temos que

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \nabla h(1,-1) = 0. \qquad \textbf{(A)}$$

Notemos que f é diferenciável em $I\!R^2$, pois suas derivadas parciais de 1a.ordem são polinomiais e, portanto, contínuas em $I\!R^2$. Deste fato sobre a f e de **(b.)** resulta que

$$4\sqrt{5} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v}, \text{ onde } \vec{v} = \frac{(2,1)}{||(1,2)||} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad \textbf{(B)}$$

Desde que $\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2y^3 + y \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x^3 - 6xy^2 + x + 2y \end{cases}$ e $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6y \end{cases}$,

então $\nabla h(1,-1) = (-8+4+2, 1-6+1-2) = (-2,-6)$ e $\nabla f(x_0, y_o) = (6x_0^2, -6y_0)$, que

aplicados em **(A)** e **(B)** dão origem ao sistema $\begin{cases} 6x_0^2 - 18y_0 = 0 \\ 12x_0^2 - 6y_0 = 20 \end{cases}$.

Da primeira equação resulta que $x_0^2 = 3y_0$, cuja utilização na 2a. equação resulta em $y_0 = \frac{2}{3}$ e, em consequência, $x_0 = \sqrt{2}$ ou $x_0 = -\sqrt{2}$.

Portanto, os pontos procurados são $\left(\sqrt{2}, \dfrac{2}{3}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{2}{3}\right)$.