MAT-2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP-USP

Solução da Questão 1 da Terceira Prova — 28/11/2016

Questão 1 (Tipo A – Valor: $3,0$ pontos)**.**

a. Determine todos os pontos da superfície de nível 1 da função $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em que seu plano tangente é paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$.

b. Determine os pontos de máximo e mínimo da função dada por $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ sobre o conjunto compacto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\}.$$

Solução. **a.** Sabemos que um vetor normal à superfície de nível $g(x,y,z) = 1$ (uma esfera) no ponto (x_0, y_0, z_0) é seu gradiente $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$. Para que plano tangente à esta esfera seja paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$ seus vetores normais devem ser parelelos, ou seja, $(2x_0, 2y_0, 2z_0) = \lambda(2, 1, -3)$, donde $y_0 = \frac{x_0}{2}$ e $z_0 = -\frac{3x_0}{2}$. Como (x_0, y_0, z_0) pertence à esfera temos $1 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{14}{4}x_0^2$, ou seja, temos dois pontos:

$$\Big(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\Big) \qquad \text{e} \qquad \Big(-\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\Big).$$

b. Os pontos críticos no interior de C são dados pelas soluções de $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, a saber $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Segue-se que $f(1,0) = -7$.

Na fronteira de C aplicamos multiplicadores de Lagrange com a restrição $g(x,y) = 0$, onde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 16$. Como $\nabla g(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0) \neq (0,0)$ para todo (x_0, y_0) na fronteira de C obtemos então o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_0 - 4 = \lambda 2x_0 \\ 6y_0 = \lambda 2y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 16 \end{cases}.$$

A segunda equação nos dá $\lambda = 3$ ou $y_0 = 0$.

- $\lambda = 3$: obtemos $x_0 = -2$ e $y_0 = \pm\sqrt{12}$. Segue-se que $f(-2, \sqrt{12}) = f(-2, -\sqrt{12}) = 47$.
- $y_0 = 0$: obtemos $x_0 = \pm 4$. Segue-se que $f(-4, 0) = 43$ e $f(4, 0) = 11$.

Concluimos então que $(0,1)$ é ponto de mínimo e $(\pm\sqrt{12}, -2)$ são pontos de máximos de f sobre o compacto C.

Questão 1 (Tipo B – Valor: $3,0$ pontos)**.**

a. Determine todos os pontos da superfície de nível 1 da função $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em que seu plano tangente é paralelo ao plano $3x + y - 2z = 2$.

b. Determine os pontos de máximo e mínimo da função dada por $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y - 5$ sobre o conjunto compacto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\}.$$

Solução. O procedimento é totalmente análogo ao caso anterior, obtendo:

a. $\big(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\big)$ e $\big(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\big)$.

b. $(0,1)$ é ponto de mínimo e $(\pm\sqrt{12}, -2)$ são pontos de máximos de f sobre o compacto C.

- (Questão 2 - Turma A) **Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por**

$$f(x,y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$$

onde k é um número real não nulo.

1. **Para que valores de k a função f possui exatamente dois pontos críticos?**
2. **Classifique os dois pontos críticos de f obtidos no item anterior.**

Solução. 1) Os pontos críticos são determinados por

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3kx^2 + 2x - 4 = 0 \\ f_y(x,y) = 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

As soluções são $y = 1$ e $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12k}}{3k}$. A fim de que existam duas soluções reais distintas devemos ter $1 + 12k > 0$, ou seja, $k > -1/12$ (com $k \neq 0$).

2) As derivadas parciais de segunda ordem são

$$f_{xx}(x,y) = 6kx + 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad f_{yy}(x,y) = 4$$

e então o hessiano é $H(x,y) = 4(6kx + 2)$. Portanto

$$(x_0, 1) = (\frac{-1 + \sqrt{1+12k}}{3k}, 1)$$

é ponto de mínimo local de f pois

$$f_{xx}(x_0, 1) = 2\sqrt{1+12k} > 0 \quad \text{e} \quad H(x_0, 1) = 8\sqrt{1+12k} > 0$$

Por outro lado,

$$(x_1, 1) = (\frac{-1 - \sqrt{1+12k}}{3k}, 1)$$

é ponto de sela de f pois

$$H(x_1, 1) = -8\sqrt{1+12k} < 0$$

- (Questão 2 - Turma B) **Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por**

$$f(x,y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$$

onde k é um número real não nulo.

1. **Para que valores de k a função f possui exatamente dois pontos críticos?**
2. **Classifique os dois pontos críticos de f obtidos no item anterior.**

Solução. 1) Os pontos críticos são determinados por

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3kx^2 + 2x - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

As soluções são $y = 1/2$ e $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+6k}}{3k}$. A fim de que existam duas soluções reais distintas devemos ter $1 + 6k > 0$, ou seja, $k > -1/6$ (com $k \neq 0$).

2) As derivadas parciais de segunda ordem são

$$f_{xx}(x,y) = 6kx + 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad f_{yy}(x,y) = 4$$

e então o hessiano é $H(x,y) = 4(6kx + 2)$. Portanto

$$(x_0, 1/2) = (\frac{-1 + \sqrt{1+6k}}{3k}, 1/2)$$

é ponto de mínimo local de f pois

$$f_{xx}(x_0, 1/2) = 2\sqrt{1+6k} > 0 \quad \text{e} \quad H(x_0, 1/2) = 8\sqrt{1+6k} > 0$$

Por outro lado,

$$(x_1, 1/2) = (\frac{-1 - \sqrt{1+6k}}{3k}, 1/2)$$

é ponto de sela de f pois

$$H(x_1, 1/2) = -8\sqrt{1+6k} < 0$$

MAT-2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP-USP

Solução da Questão 3 da Terceira Prova — 28/11/2016

Questão 3 (Tipo A – Valor: 4,0 pontos)**.** Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos e os mais distantes da origem sobre os seguintes conjuntos compactos:

a. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \text{ e } z = 3 - x^2 - y^2\}$;

b. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \text{ e } z \leq 3 - x^2 - y^2\}$.

Solução. Observamos, apesar de não necessária a justificativa, que o problema tem solução, pois resolvê-lo equivale a encontrar máximos e mínimos da função (contínua) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre os conjuntos compactos (dado do enunciado, mas de fácil verificação). Assim, o teorema de Weierstrass garante existência de solução.

Vamos inicialmente visualizar os conjuntos A e B na figura 1: A é a curva (indicada em negrito), dada pela interseção, no primeiro octante, das superfícies de nível 1 de $g(x,y,z) = xyz$ e nível 0 de $h(x,y,z) = 3 - x^2 - y^2 - z$. O conjunto B é a parte da superfície de nível 1 de $g(x,y,z)$ no primeiro octante que está "abaixo" do paraboloide $h(x,y,z) = 0$.

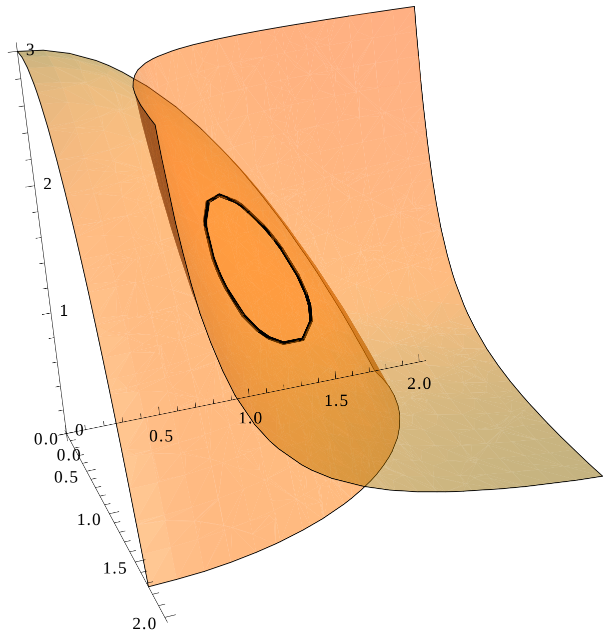

FIGURA 1. Regiões A e B do enunciado

a. Para a região A podemos aplicar multiplicadores de Lagrange com duas restrições. Os candidatos (x_0, y_0, z_0) a extremantes locais são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x_0,y_0,z_0), \nabla g(x_0,y_0,z_0), \nabla h(x_0,y_0,z_0)\} \text{ é L.D.} \\ g(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ h(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \det \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 & z_0 \\ y_0 z_0 & x_0 z_0 & x_0 y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \\ z_0 = 3 - x_0^2 - y_0^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z_0(1-2z_0)(x_0+y_0)(x_0-y_0) = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \\ z_0 = 3 - x_0^2 - y_0^2 \end{cases}$$

Em vista das restrições descartamos $z_0 = 0$, pois $z > 0$ e $x_0 = -y_0$, pois estamos restritos ao primeiro octante, onde todas as coordenadas têm o mesmo sinal (positivas e não nulas). Só resta analizar quando $z_0 = \frac{1}{2}$ ou $x_0 = y_0$.

- Se $z_0 = \frac{1}{2}$ temos, da segunda equação que $y_0 = \frac{2}{x_0}$, e a terceira equação fica
$$\frac{1}{2} = 3 - x_0^2 + \frac{4}{x_0^2},$$
a qual é biquadrada e não tem soluções reais.
- Se $x_0 = y_0$ temos, da segunda equação, $z_0 = \frac{1}{x_0^2}$, e a terceira equação fica
$$\frac{1}{x_0^2} = 3 - 2x_0^2,$$
que é novamente biquadrada e tem como soluções reais positivas $x_0 = y_0 = 1, z_0 = 1$ e $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, z_0 = 2$.

Comparando os valores de f nesses pontos obtemos $f(1,1,1) = 3 < 5 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$. Assim é $(1,1,1)$ é o ponto onde a distância é mínima e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ onde ela é máxima.

b. Para a região B podemos aplicar multiplicadores de Lagrange com uma restrição, verificando que os pontos obtidos satisfazem a desigualdade

$$z < 3 - x^2 - y^2. \tag{0.1}$$

Os extremantes na igualdade são os obtidos no item anterior e devemos comparar os valores de f nos candidatos aqui obtidos com aqueles do item anterior. O sistema de Lagrange neste caso é
$$\begin{cases} \{\nabla f(x_0, y_0, z_0), \nabla g(x_0, y_0, z_0)\} \text{ é L.D.} \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$
ou seja,
$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \vec{0} \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_0(y_0^2 - z_0^2) = 0 \\ 2y_0(z_0^2 - x_0^2) = 0 \\ 2z_0(x_0^2 - y_0^2) = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$
Em vista das restrições devemos ter $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, que não satisfaz a desigualdade (0.1). Portanto os candidatos a extremantes são os mesmos do item anterior, ou seja estão sobre o bordo do conjunto B.

Questão 3 (Tipo B – Valor: 4,0 pontos)**.** Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos e os mais distantes da origem sobre os seguintes conjuntos compactos:

a. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 2 \text{ e } z = 5 - x^2 - y^2\}$;

b. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 2 \text{ e } z \leq 5 - x^2 - y^2\}$.

Solução. A solução é completamente análoga à anterior: "mutatis mutandis" os sistemas de Lagrange são:

a. $\begin{cases} 2z_0(1-2z_0)(x_0+y_0)(x_0-y_0) = 0 \\ x_0y_0z_0 = 2 \\ z_0 = 5 - x_0^2 - y_0^2 \end{cases}$ com soluções $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$, sendo

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right) = 17 > 5 = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1).$$

Logo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$ é o ponto onde a distância é máxima e o ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$ é aquele onde ela é mínima.

b. $\begin{cases} 2x_0(y_0^2 - z_0^2) = 0 \\ 2y_0(z_0^2 - x_0^2) = 0 \\ 2z_0(x_0^2 - y_0^2) = 0 \\ x_0y_0z_0 = 2 \end{cases}$, cuja única solução é $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt[3]{2}$, que satisfaz $z < 5 - x^2 - y^2$ e $f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{4} < 5$, pois $(3\sqrt[3]{4})^3 = 108 < 125 = 5^3$, sendo portanto o ponto de mínimo de f na região B. O ponto de máximo é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$, obtido no item anterior.