- (Questão 1 - Turma A) **Seja** $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **dada por**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\text{sen}(x+y)}{2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 \quad , & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. **Determine** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **e** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
2. **A função** f **é diferenciável em** $(0,0)$**?**
3. **Calcule** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ **para** $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solução. 1) As derivadas parciais na origem são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t)}{2t}=1/2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

2) A função f não é diferenciável em $(0,0)$ uma vez que o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2\text{sen}(h+k)}{(2h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}-\frac{h}{2\sqrt{h^2+k^2}}$$

não existe. De fato, calculando o limite sobre as curvas $\alpha(t)=(0,t)$ e $\beta(t)=(t,t)$ quando $t\to 0^+$, obtemos dois valores distintos:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{0^2\text{sen}(0+t)}{(2.0^2+t^2)\sqrt{0^2+t^2}}-\frac{0}{2\sqrt{0^2+t^2}}=0$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2\text{sen}(t+t)}{(2t^2+t^2)\sqrt{t^2+t^2}}-\frac{t}{2\sqrt{t^2+t^2}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\text{sen(2t)}}{3\sqrt{2}t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\neq 0$$

3) Basta calcular a derivada direcional pela definição

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{u})-f(0,0)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t\sqrt{2})}{3t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\text{sen}(t\sqrt{2})}{t\sqrt{2}}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

- (Questão 1 - Turma B) **Seja** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **dada por**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \text{sen}(x+y)}{x^2+2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \quad 0 \quad , & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. **Determine** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **e** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
2. **A função** f **é diferenciável em** $(0,0)$**?**
3. **Calcule** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ **para** $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solução. 1) As derivadas parciais na origem são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen}(t)}{2t} = 1/2$$

2) A função f não é diferenciável em $(0,0)$ uma vez que o limite

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{k^2 \text{sen}(h+k)}{(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}} - \frac{k}{2\sqrt{h^2+k^2}}$$

não existe. De fato, calculando o limite sobre as curvas $\alpha(t) = (t,0)$ e $\beta(t) = (t,t)$ quando $t \to 0^+$, obtemos dois valores distintos:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{0^2 \text{sen}(t+0)}{(t^2+2.0^2)\sqrt{t^2+0^2}} - \frac{0}{2\sqrt{t^2+0^2}} = 0$$
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^2 \text{sen}(t+t)}{(t^2+2t^2)\sqrt{t^2+t^2}} - \frac{t}{2\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\text{sen(2t)}}{3\sqrt{2}t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

3) Basta calcular a derivada direcional pela definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t\vec{u}) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen}(t\sqrt{2})}{3t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\text{sen}(t\sqrt{2})}{t\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(a) (2,0) Calcule as dimensões do paralelepípedo com volume máximo, sabendo que suas faces são paralelas aos planos coordenados, uma das faces está contida no plano $z = 0$ e os vértices da correspondente face oposta pertencem ao parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2, z > 0$.

Resposta: De acordo com o enunciado, os vértices do paralelepípedo procurado são os 8 pontos da forma $(\pm x, \pm y, 0)$ e $(\pm x, \pm y, z)$ em que $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$ e $z = 1 - x^2 - y^2 > 0$. As dimensões do paralelepípedo são: comprimento $2x$, largura $2y$ e altura z. Seu volume, portanto, é igual a $V(x, y, z) = 4xyz$.

Consideramos o subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 1 - x^2 - y^2\}.$$

Pelo Teorema de Weierstrass, V admite um ponto de máximo em S. Note que esse ponto deve pertencer à superfície

$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = 1 - x^2 - y^2\} \subset S,$$

já que $V = 0$ nos pontos de S em que $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ e $V > 0$ em S'. Mais ainda, esse ponto de máximo determina o paralelepípedo de volume máximo pedido no enunciado.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, um ponto de máximo de V em S' deve satisfazer $\nabla V = \lambda \nabla g$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, em que $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Obtemos assim o seguinte sistema de equações e inequações

$$\begin{cases} 4yz = \lambda 2x \\ 4xz = \lambda 2y \\ 4xy = \lambda \\ z = 1 - x^2 - y^2 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \tag{1}$$

A diferença entre a 1^a equação e a 2^a equação de (1) nos diz que

$$2z(y - x) = -\lambda(y - x). \tag{2}$$

Em vista desse fato, consideramos os seguintes casos: (i) $x = y$ e (ii) $x \neq y$.

No caso (i), a 1^a equação de (1) implica que $\lambda = 2z$ e com a 3^a equação de (1), obtemos $z = 2x^2$. Usando a 4^a equação (1), obtemos finalmente que $2x^2 = 1 - x^2 - x^2$, o que implica que $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = z = \frac{1}{2}$.

No caso (ii), obtemos de (2) que $\lambda = -2z$. Usando a 3^a equação de (1), chegamos a $z = -2xy$. Isso implica que não há soluções nesse caso pois estamos assumindo que x, y, z são todos positivos.

Portanto, temos um único ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ candidato a ponto de máximo de V em S'. Como sabemos que V admite ponto de máximo em S e que este ponto deve pertencer a S', temos que necessariamente $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é ponto de máximo de V em S. Em particular, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é ponto de máximo de V em S'.

Concluimos que o paralelepípedo de volume máximo pedido no enunciado tem vértices $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0)$ e $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Portanto, sua base é quadrada com lados $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$ e sua altura é $\frac{1}{2}$. Seu volume é $\frac{1}{2}$.

(b) (1,5) Determine a menor e a maior distância entre a origem e o compacto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } z = 1 - x^2 - y^2\}.$$

Resposta: Vamos considerar a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida em $\mathbb{R}^3$. Note que, pelo Teorema de Weierstrass, f admite pontos de máximo e de mínimo em C, já que f é contínua e C é compacto (C é a intersecção entre um plano e um parabolóide e, neste caso, é uma elipse). Mais ainda, estes extremantes de f em C determinam os pontos de maior e menor distância de C à origem já que a distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à origem é dada por $\sqrt{f(x, y, z)}$ e a função $x \mapsto \sqrt{x}, x > 0$, é estritamente crescente.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, sabemos que os pontos extremantes de f em C satisfazem $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, para certos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, em que $g(x, y, z) = x + y + z$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Assim, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu 2x \\ 2y = \lambda + \mu 2y \\ 2z = \lambda + \mu \\ x + y + z = 1 \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \tag{3}$$

A diferença entre a 1^a equação e a 2^a equação de (3) nos diz que

$$x - y = \mu(x - y). \tag{4}$$

Em vista desse fato, consideramos os seguintes casos: (i) $x = y$ e (ii) $x \neq y$.

No caso (i), usamos a 4^a equação e a 5^a equação de (3) para obtermos $2x + z = 1$ e $2x^2 + z = 1$. Logo $x = x^2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Portanto, temos 2 soluções com $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e $(x, y, z) = (1, 1, -1)$. Observe que

$$f(0, 0, 1) = 1 \text{ e } f(1, 1, -1) = 3. \tag{5}$$

No caso (ii), obtemos de (4) que $\mu = 1$. Usando as 3 primeiras equações de (3), obtemos $\lambda = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. Usando a 4^a equação e a 5^a equação de (3), obtemos que $x + y = \frac{1}{2}$ e $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Decorre destas 2 equações que x deve satisfazer $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$ e, portanto, $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$. Obtemos então as soluções com $(x, y, z) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $(x, y, z) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Observe que

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \tag{6}$$

Em vista de (5) e (6), temos que $(1, 1, -1)$ é o ponto de C com maior distância à origem e os pontos $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ são os pontos de C com menor ditância à origem.

Questão 3 (Valor: 3,5 pontos). Os itens a seguir são independentes:

a. (1,5) Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 - 2xy - y^3 + 6$.

b. (2,0) Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Sabe-se que

$$F(3t^2 - t, t^2) = 9t^2 - 6t + 1 \text{ para todo } -2 < t < -1/2,$$

e que a parábola $x^2 - 16y = 0$ está contida na curva de nível 16 de F. Determine $\nabla F(4,1)$.

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x - 3y^2\end{array}\right\}$, $\nabla f(x,y) = \vec{0} \iff \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 & (\text{I}) \\ -2x - 3y^2 = 0 & (\text{II}) \end{cases}$

$\iff y = \frac{3}{2}x^2$ e $-2x - 3 \cdot \frac{9}{4}x^4 = 0 \iff$ $x = y = 0$ ou $x = -2/3$ e $y = 2/3$

Logo, os pontos críticos são $(0,0)$ e $(-2/3, 2/3)$

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{bmatrix}$ e $\det(H(x,y)) = -36xy - 4$

$\det(H(0,0)) = -4 < 0$. Portanto $(0,0)$ é ponto de sela de f.

$\det(H(-2/3, 2/3)) = 12 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3, 2/3) = -4 < 0$.

Portanto, $(-2/3, 2/3)$ é ponto de máximo local de f.

b) $F(3t^2 - t, t^2) = 9t^2 - 6t + 1 \implies \nabla F(3t^2 - t, t^2) \cdot (6t - 1, 2t) = 18t - 6$, $\forall t \in]-2, -1/2[$.

Fazendo $t = -1$, temos $(3t^2 - t, t^2) = (4, 1)$.

Logo, $\nabla F(4,1) \cdot (-7, -2) = -24$ (I).

Por outro lado, a parábola $x^2 - 16y = 0$ está contida na curva de nível 16 de F. Ou seja,

$$F\left(u, \frac{u^2}{16}\right) = 16, \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Derivando, obtemos: $\nabla F\left(u, \frac{u^2}{16}\right) \cdot \left(1, \frac{u}{8}\right) = 0$.

Fazendo $u = 4$, concluímos que

$$\nabla F(4,1) \cdot (1, 1/2) = 0 \quad (\text{II})$$

Chamando $\nabla F(4,1) = (a,b)$, as igualdades I e II nos dão o sistema abaixo:

$\begin{cases} -7a - 2b = -24 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$, que tem solução única $a = 8$ e $b = -16$.

conclusão: $\boxed{\nabla F(4,1) = (8, -16)}$