MAT5711 — Cálculo Avançado

Exame Final — 22/06/2012

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ NUSP: ______________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. O exame tem duração de 4 horas.
2. O exame pode ser feito à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
3. Não utilize esta página para rascunho e escreva somente dentro das margens de cada página.
4. Justifique suas afirmações.
5. Escolha questões cuja soma dos valores indicados não exceda 10 pontos e ao menos uma de cada grupo de pontuação. Indique suas escolhas com um "X" na tabela abaixo.

Questão	Valor	Escolha
1	1.0 ponto	
2	1.0 ponto	
3	1.0 ponto	
4	2.0 pontos	
5	2.0 pontos	
6	2.0 pontos	
7	2.0 pontos	
8	3.0 pontos	
9	3.0 pontos	
10	3.0 pontos	

NOTAS TOTAIS

	Corretor 1	Corretor 2	Corretor 3
Nota			
Nota final			

BOA PROVA!

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 1 (Valor: $1,0 = 0,5 + 0,5$ ponto)**.** Sejam $M_3(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 3×3 com entradas reais e seus subconjuntos

$$\begin{aligned} SO_3(\mathbb{R}) &= \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}, \\ O_3(\mathbb{R}) &= \{A \in M_3(\mathbb{R}) : AA^t = \mathrm{Id}\}. \end{aligned}$$

a. Mostre que $SO_3(\mathbb{R})$ e $O_3(\mathbb{R})$ são variedades compactas em $\mathbb{R}^9$, determinando suas dimensões. Elas são conexas? Justifique.

b. Determine os espaços tangentes a cada uma delas na identidade.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 2 (Valor: $1,0$ ponto)**.** Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ considere a função $f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. Suponha que exista $a \in \mathbb{R}^m$ tal que a função f_a tem um ponto fixo $b \in \mathbb{R}^n$, isto é, $f_a(b) = b$ e que $Df_a(b)$ é uma transformação linear que não tem 1 como autovalor. Mostre que existem vizinhanças U_a de a e V_b de b tais que, para todo $x \in U_a$, a função f_x tem um único ponto fixo $y \in V_b$.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 3 (Valor: $1.0 = 0.5 + 0.5$ ponto)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

a. Mostre que se $x_0 \in \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é ponto de máximo de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ então $\nabla f(x_0) = 0$.

b. Suponha que $n = 3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ é uma submersão de classe $\mathcal{C}^\infty$. Mostre que, para todo compacto $K \subset \Omega$, a função $\|f\|\big|_K$ atinge seu máximo na fronteira de K.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 4 (Valor: 2.0 pontos)**.** Sejam $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo $\overline{D}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ um função de classe $\mathcal{C}^2$ tal que $f\big|_{\partial D} = 0$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta f = \lambda f$. Mostre que $\displaystyle\int_D \|\nabla f\|^2 + \lambda \int_D f^2 = 0$ e que $\lambda < 0$.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 5 (Valor: $2.0 = 0.8 + 1.2$ pontos)**.** Definimos a função $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

a. Mostre que a função Γ está bem definida, isto é, o limite que a define é finito para todo $s > 0$.

b. Mostre que para todos reais $s > 0$ e inteiros positivos k temos

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.$$

Dica. Use que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$. Provando isto também você ganha mais meio ponto nesta questão.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 6 (Valor: $2.0 = 1.0 + 1.0$ pontos)**.** Sejam, respectivamente, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ e $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ a esfera unitária e a bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

a. Mostre que a área de $\mathbb{S}^{n-1}$ é $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

b. Mostre que o volume de B^n é ω_n/n.

Dica. Utilize-se de definições e resultados da questão 5.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 7 (Valor: $2.0 = 1.0 + 1.0$ pontos)**.** Seja $f : (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação multilinear.

a. Mostre que

$$Df_{(a_1,\ldots,a_k)}(v_1,\ldots,v_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_1,\ldots,a_{i-1},v_i,a_{i+1},\ldots,a_k).$$

b. Se $f_1,\ldots,f_{n-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são campos de vetores diferenciáveis, definimos o campo de vetores $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}$ em $p \in \mathbb{R}^n$ como sendo o único vetor em $T_p\mathbb{R}^n$ que representa o funcional linear $\phi_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\phi_p(u) = \det\big(f_1(p),\ldots,f_{n-1}(p),u\big)$. Explicite a diferencial de $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}$ no ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 8 (Valor: $3.0 = 1.0 + 1.0 + 1.0$ pontos). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo o disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$, onde $f^2(x,y) + g^2(x,y) = 1$.

a. Mostre que $f_x g_y - f_y g_x = 0$ em Ω.

b. Sendo $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, calcule $\int_{\mathbb{S}^1} f\,dg - g\,df$.

c. Conclua que não pode existir função ϕ com as propriedades acima tal que sua restrição a $\mathbb{S}^1$ seja a identidade.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 9 (Valor: $3.0 = 1.5 + 1.5$ pontos)**.** Sejam $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ e $A : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $A(p) = -p$ sua aplicação antípoda. Mostre que

a. se $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ é o elemento de área de $\mathbb{S}^2$, então $A^*\omega = -\omega$;

b. a aplicação antípoda de $\mathbb{S}^2$ não é diferenciavelmente homotópica à identidade.

Corretor 1:	Corretor 2:	Corretor 3:

Questão 10 (Valor: $3.0 = 1.5 + 1.5$ pontos)**.** Considere o 2-cubo singular $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$c(s,t) = \big((s+1)\cos(2\pi t), (s+1)\sin(2\pi t), 2\pi t\big).$$

a. Determine formalmente ∂c, explicitando cada uma de suas faces com a orientação apropriada e verifique que $\partial(\partial c) = 0$.

b. Considere a 2-forma $\omega = z\,dx \wedge dy$. Caracterize todas as 1-formas η tal que $d\eta = \omega$ e verifique o teorema de Stokes nesse caso.