

MAT-5711 – CÁLCULO AVANÇADO
SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS – INTEGRAÇÃO EM \mathbb{R}^n

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e que $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = \frac{1}{2}$.

Exercício 2. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é racional e } y \text{ é irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x \text{ é racional e } y = \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível.} \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e que $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$.

Exercício 3. Mostre que um conjunto ilimitado não pode ter conteúdo nulo.

Exercício 4. Dê um exemplo de conjunto fechado de medida nula que não tem conteúdo nulo.

Exercício 5. Mostre que se A é um conjunto de conteúdo nulo então seu bordo também tem conteúdo nulo.

Exercício 6. Mostre que se f e g são limitadas e integráveis sobre um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ então fg também o é.

Exercício 7. Mostre que:

a. se C tem conteúdo nulo então C é limitado por um retângulo fechado A , C é J -mensurável e $\int_A \chi_C = 0$.

b. Se C é limitado, tem medida nula e $\int_A \chi_C$ existe então $\int_A \chi_C = 0$.

Dica. Determine $L(f, P)$ para uma partição P qualquer de A e use que um retângulo não pode ter conteúdo nulo.

Exercício 8. Dê um exemplo de conjunto limitado C tal que $\int_A \chi_C$ não existe.

Exercício 9. Mostre que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente, então f é integrável.

Exercício 10. Sejam A um conjunto J -mensurável e $\epsilon > 0$. Mostre que existe um compacto $C \subset A$, J -mensurável, tal que $\int_{A \setminus C} 1 < \epsilon$.

Exercício 11. Seja $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy dx.$$

Exercício 12. Use o teorema de Fubini para dar um prova simples do Teorema de Schwarz, ou seja, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, se f é uma função de classe C^2 .

Exercício 13. Deduza uma fórmula para o cálculo do volume de um sólido em \mathbb{R}^3 obtido pela rotação de uma região J -mensurável no plano yz ao redor do eixo z (suponha que a região em questão não intercepta o eixo z).

Exercício 14. Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $\frac{\partial f}{\partial y}$ também contínua e defina $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Mostre que $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Dica. Escreva $F(y)$ como uma integral iterada.

A hipótese f contínua é realmente necessária?

Exercício 15. Sejam A e B conjuntos J -mensuráveis em \mathbb{R}^3 . Defina $A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, c) \in A\}$ e B_c de modo análogo. Suponha que A_c e B_c sejam, para cada c , conjuntos J -mensuráveis em \mathbb{R}^2 de mesma área. Mostre que A e B têm o mesmo volume.

Exercício 16. Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^n}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a. Mostre que f_n é contínua em $x_0 = 0$.

Dica. Mostre que $a < e^a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e depois defina $a = \frac{t}{2n}$ para mostrar que $\frac{t^n}{e^t} < \frac{(2n)^n}{e^{t/2}}$. Faça então $t = \frac{1}{x}$ e $x \rightarrow 0^+$.

b. Mostre que f_n é diferenciável em $x = 0$.

c. Mostre que $f'_n(x) = f_{n+2}(x) - n f_{n+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d. Conclua que f_n é de classe C^∞ . Ela é analítica real?

e. Esboce o gráfico de $g(x) = f_0(x) f_0(1-x)$.

f. Seja $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ um retângulo em \mathbb{R}^n . Construa uma função, de classe C^∞ , $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) > 0$ para $x \in \overset{\circ}{A}$ e $\phi(x) = 0$ em caso contrário.

Exercício 17. Mostre que a coleção de funções dadas por $\phi_{2m+1}(x) = f(x - m\pi)$, se $m \geq 0$, e $\phi_{2m}(x) = f(x + m\pi)$, se $m \geq 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos(x)}{2}, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

são uma partição da unidade. Determine o suporte de cada ϕ_i e mostre que cada $x \in \mathbb{R}$ tem uma vizinhança que intercepta no máximo três desses suportes.

Exercício 18. Sejam S um subconjunto arbitrário de \mathbb{R}^n e $x_0 \in S$. Dizemos que uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r em x_0 se existe um aberto U contendo x_0 e uma função $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r , tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U \cap S$. Mostre nesse caso que se $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r cujo suporte está contido em U então

$$h(x) = \begin{cases} \phi(x)g(x), & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin \text{supp } \phi. \end{cases}$$

é uma função bem definida e de classe C^r em \mathbb{R}^n .

Exercício 19. Mostre que se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r em cada ponto $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$ então f pode ser estendida a uma função $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um aberto de \mathbb{R}^n contendo S .

Dica. Determine uma cobertura apropriada para S , defina A como sua reunião e então tome uma partição da unidade subordinada a esta cobertura.

Exercício 20. Seja S a porção do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 limitada pelas hipérbolas $xy = 1$ e $xy = 2$, além das retas $y = x$ e $y = 4x$. Calcule $\int_S x^2 y^3 dx dy$.

Dica. Considere $x = u/v$ e $y = uv$.

Exercício 21. Seja S o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$. Calcule $\int_S x + 2y - z dx dy dz$.

Dica. Considere uma mudança que “endireita” o tetraedro.

Exercício 22. Defina $f :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

a. Mostre que f é injetora, calcule $f'(r, \theta)$ e mostre que $\det f'(r, \theta) \neq 0$ para todo (r, θ) . Determine o conjunto $f(]0, \infty[\times]0, 2\pi[)$.

b. Explícite a expressão de $f^{-1}(x, y)$.

c. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ a região delimitada por círculos de raios r_1 e r_2 , $0 < r_1 < r_2$ e pela retas que passam pela origem e fazem ângulo θ_1 e θ_2 com o eixo dos x , respectivamente. Se $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $h(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$, mostre que

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(r, \theta) r d\theta dr.$$

Mostre também que se $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$ então

$$\int_{B_r} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} r g(r, \theta) d\theta dr.$$

d. Se $C_r = [-r, r] \times [-r, r]$, mostre que

$$\int_{B_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi(1 - e^{-r^2}) \quad \text{e} \quad \int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2.$$

e. Prove também que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$\text{e conclua que } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Exercício 23. Sejam $0 < a < b$. Considere o círculo no plano xz de raio a e centro em $(b, 0, 0)$. Ao rotacionar esse círculo em torno do eixo z obtemos uma superfície chamada *toro* (vide exercício 17 da lista 1). Se realizamos esse processo com o disco ao invés do círculo obtemos o *toro sólido*. Determine o volume do toro sólido.

Dica. Você pode calcular isto diretamente, mas é bem mais conveniente utilizar as *coordenadas cilíndricas* do \mathbb{R}^3 : $g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. Determine a região no domínio de g que tem o toro como imagem.

O resultado obtido é um caso particular do exercício 13 desta lista.