MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Primeira Prova — 11/09/2017

Tipo de Prova: ● ○ ● ● ○ ○ ● ●

Questões Dissertativas

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

a. Determine o domínio de f.

Solução. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

b. Encontre uma equação para as curvas de nível $c = -1$ e $c = 0$ de f. Esboce tais curvas no sistema cartesiano abaixo.

Solução.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 1 = -x^2 - y^2 + 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.
\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = -1$ é a reta $x = 0$ menos os pontos $(0, \pm 1)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 1 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.
\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = 0$ é a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ menos os pontos $(0, \pm 1)$.

c. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$? Justifique sua resposta.

Solução. Não. Observando as curvas de nível acima, vemos que há pontos arbitrariamente próximos de $(0,1)$ tais que f vale 0 e tais que f vale -1. Logo o limite não pode existir.

Questão 2. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2 + y^4}$.

Solução.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^4} \cdot y^2$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (Limite Fundamental, ou por L'Hospital)

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^4}}^{limitada} \cdot \overbrace{y^2}^{\to 0} = 0$, segue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2 + y^4} = 1 \cdot 0 = 1$.

Testes

1. Considere as curvas

$$\gamma_1(t) = (t, 2t, 3t^2) \;\text{ e }\; \gamma_2(t) = (t, 1, t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dadas as superfícies

$$S_1 : \; z = y^2 - x^2; \quad S_2 : \; z^2 = y^2 + x^2; \quad \text{e} \quad S_3 : \; z^2 = y^2 + x^2 - 1$$

é correto afirmar que: **b.** a imagem de $\gamma_1(t)$ está contida em S_1 e a imagem de $\gamma_2(t)$ está contida em S_3.

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{xy^2 + x^3\sqrt[5]{y^6}}{\sqrt{x^4 + y^8}}$. Então o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: **c.** não existe.

3. Considere as seguintes curvas:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t^2+2, -t^2),\ t \in \mathbb{R};\\ \gamma_2(t) &= (-\cos^2 t + 2,\ \sin t),\ t \in \mathbb{R};\\ \gamma_3(t) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{\sqrt{3}}{2}(e^t - e^{-t})\right),\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

É correto afirmar que a imagem de: **d.** γ_3 está contida num ramo de uma hipérbole que passa em $(\sqrt{3}, 0)$.

4. Seja C a interseção das superfícies

$$z = y^2 - x^2 \text{ e } z = 3x^2 + 2y^2 - 1.$$

O vetor tangente a C no ponto $P = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4})$ tem a mesma direção do vetor: **a.** $v = (0, 1, 0)$.

5. Considere a curva $\gamma(t) = (\sin t, \sec^2 t - 1)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A imagem de γ está contida na curva de nível: **b.** $c = -1$ da função $f(x, y) = (y+1)(x^2-1)$.

Tipo de Prova: ○ ● ○ ● ○ ○ ● ○

Questões Dissertativas

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

a. Determine o domínio de f.

Solução. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

b. Encontre uma equação para as curvas de nível $c = -1$ e $c = 0$ de f. Esboce tais curvas no sistema cartesiano abaixo.

Solução.

$$\begin{aligned}\frac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 + 1 = -x^2 - y^2 + 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad 2y^2 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = -1$ é a reta $y = 0$ menos os pontos $(\pm 1, 0)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 + 1 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = 0$ é a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ menos os pontos $(\pm 1, 0)$.

c. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique sua resposta.

Solução. Não. Observando as curvas de nível acima, vemos que há pontos arbitrariamente próximos de $(1, 0)$ tais que f vale 0 e que f vale -1. Logo o limite não pode existir.

Questão 2. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^4 + y^2}$.

Solução.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} \cdot \frac{y^2}{x^4 + y^2} \cdot x^2$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (Limite Fundamental, ou por L'Hospital)

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{y^2}{x^4 + y^2}}^{limitada} \cdot \overbrace{x^2}^{\to 0} = 0$, segue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^4 + y^2} = 1 \cdot 0 = 1.$

Testes

1. Considere a curva $\gamma(t) = (1 - \sec^2 t, \sin t)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A imagem de γ está contida na curva de nível: **d.** $c = 2$ da função $f(x,y) = (1-y^2)(x-1)+3$.

2. Considere as seguintes curvas:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t^2+7, -t^2),\ t \in \mathbb{R};\\ \gamma_2(t) &= (-\cos^2 t + 2,\ \sin t),\ t \in \mathbb{R};\\ \gamma_3(t) &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{\sqrt{7}}{2}(e^t - e^{-t})\right),\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

É correto afirmar que a imagem de: **b.** γ_3 está contida num ramo de uma hipérbole que passa em $(\sqrt{7}, 0)$.

3. Seja $f(x,y) = \dfrac{xy^2 + x^3\sqrt[5]{y^6}}{\sqrt{x^4+y^8}}$. Então o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: **c.** não existe.

4. Considere as curvas

$$\gamma_1(t) = (2t, t, 3t^2) \ \text{ e } \ \gamma_2(t) = (t, 1, t) \ \ (t \in \mathbb{R}).$$

Dadas as superfícies

$$S_1: \ z = x^2 - y^2; \quad S_2: \ z^2 = y^2 + x^2 - 1; \quad \text{e} \quad S_3: \ z^2 = y^2 + x^2 + 1$$

é correto afirmar que: **c.** a imagem de $\gamma_1(t)$ está contida em S_1 e a imagem de $\gamma_2(t)$ está contida em S_2.

5. Seja C a interseção das superfícies

$$z = y^2 - x^2 \text{ e } z = 3x^2 + 2y^2 - 1.$$

O vetor tangente a C no ponto $P = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4})$ tem a mesma direção do vetor: **a.** $v = (0, 3, 0)$.

Tipo de Prova: ○ ● ○ ● ○ ● ○ ●

Questões Dissertativas

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

a. Determine o domínio de f.

Solução. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

b. Encontre uma equação para as curvas de nível $c = -1$ e $c = 0$ de f. Esboce tais curvas no sistema cartesiano abaixo.

Solução.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 1 = -x^2 - y^2 + 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = -1$ é a reta $x = 0$ menos os pontos $(0, \pm 1)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 1 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\ &\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = 0$ é a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ menos os pontos $(0, \pm 1)$.

c. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$? Justifique sua resposta.

Solução. Não. Observando as curvas de nível acima, vemos que há pontos arbitrariamente próximos de $(0,1)$ tais que f vale 0 e tais que f vale -1. Logo o limite não pode existir.

Questão 2. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2 + y^4}$.

Solução.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^4} \cdot y^2$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$ (Limite Fundamental, ou por L'Hospital)

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4}}^{limitada} \cdot \overbrace{y^2}^{\to 0} = 0$, segue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2+y^4} = 1 \cdot 0 = 1.$

Testes

1. Considere as curvas

$$\gamma_1(t) = (2t, t, 3t^2) \ \text{ e } \ \gamma_2(t) = (t, 1, t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dadas as superfícies

$$S_1: \ z = x^2 - y^2; \quad S_2: \ z^2 = y^2 + x^2 + 1; \quad \text{e} \ \ S_3: \ z^2 = y^2 + x^2 - 1$$

é correto afirmar que: **a.** a imagem de $\gamma_1(t)$ está contida em S_1 e a imagem de $\gamma_2(t)$ está contida em S_3.

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y + y^3\sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{y^4+x^8}}$. Então o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: **d.** não existe.

3. Considere a curva $\gamma(t) = (\sin t,\, 1 - \sec^2 t)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A imagem de γ está contida na curva de nível: **b.** $c = 2$ da função $f(x,y) = (1-y)(1-x^2) + 1$.

4. Considere as seguintes curvas:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t^2+5, -t^2), \ t \in \mathbb{R};\\
\gamma_2(t) &= (-\cos^2 t + 2, \ \sin t), \ t \in \mathbb{R};\\
\gamma_3(t) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{\sqrt{2}}{2}(e^t - e^{-t})\right), \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

É correto afirmar que a imagem de: **c.** γ_3 está contida num ramo de uma hipérbole que passa em $(\sqrt{2}, 0)$.

5. Seja C a interseção das superfícies

$$z = x^2 - y^2 \text{ e } z = 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

O vetor tangente a C no ponto $P = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ tem a mesma direção do vetor: **d.** $v = (2, 0, 0)$.

Tipo de Prova: ● ○ ● ○ ○ ● ● ○

Questões Dissertativas

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

a. Determine o domínio de f.

Solução. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

b. Encontre uma equação para as curvas de nível $c = -1$ e $c = 0$ de f. Esboce tais curvas no sistema cartesiano abaixo.

Solução.

$$\begin{aligned}
\frac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 + 1 = -x^2 - y^2 + 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\
&\Leftrightarrow \quad 2y^2 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\
&\Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.
\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = -1$ é a reta $y = 0$ menos os pontos $(\pm 1, 0)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 + 1 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1\\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 1.
\end{aligned}$$

Logo, a curva de nível $c = 0$ é a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ menos os pontos $(\pm 1, 0)$.

c. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique sua resposta.

Solução. Não. Observando as curvas de nível acima, vemos que há pontos arbitrariamente próximos de $(1,0)$ tais que f vale 0 e que f vale -1. Logo o limite não pode existir.

Questão 2. Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2y^2}-1}{x^4+y^2}$.

Solução.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2}\cdot\frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot x^2$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2} = \lim_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u} = 1$ (Limite Fundamental, ou por L'Hospital)

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\dfrac{y^2}{x^4+y^2}}^{limitada}\cdot\overbrace{x^2}^{\to 0} = 0$, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2y^2}-1}{x^4+y^2} = 1\cdot 0 = 1$.

Testes

1. Considere a curva $\gamma(t) = (\sec^2 t - 1, \sin t)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. A imagem de γ está contida na curva de nível: **e.** $c=-1$ da função $f(x,y)=(x+1)(y^2-1)$.

2. Considere as seguintes curvas:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t^2+3,-t^2),\ t\in\mathbb{R};\\ \gamma_2(t) &= (-\cos^2 t+2,\ \sin t),\ t\in\mathbb{R};\\ \gamma_3(t) &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}(e^t+e^{-t}),\frac{\sqrt{5}}{2}(e^t-e^{-t})\right),\ t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

É correto afirmar que a imagem de: **e.** γ_3 está contida num ramo de uma hipérbole que passa em $(\sqrt{5},0)$.

3. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y+y^3\sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{y^4+x^8}}$. Então o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: **b.** não existe.

4. Considere as curvas

$$\gamma_1(t) = (2t,t,3t^2) \ \text{ e } \ \gamma_2(t)=(t,1,t) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Dadas as superfícies

$$S_1:\ z=x^2-y^2;\quad S_2:\ z^2=y^2+x^2-1;\quad \text{e}\ \ S_3:\ z^2=y^2+x^2$$

é correto afirmar que: **d.** a imagem de $\gamma_1(t)$ está contida em S_1 e a imagem de $\gamma_2(t)$ está contida em S_2.

5. Seja C a interseção das superfícies

$$z=x^2-y^2 \text{ e } z=2x^2+3y^2-1.$$

O vetor tangente a C no ponto $P=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ tem a mesma direção do vetor: **c.** $v=(1,0,0)$.